BLOQUE 2. ÁLGEBRA LINEAL.
ESPACIOS VECTORIALES

- El espacio vectorial IR^n.
- Subespacio vectorial.
- Dependencia e independencia lineal.
- Sistema generador. Base.

Este primer tema sentará las bases que permitirán desarrollar futuros conceptos. Se analizará la estructura de espacio vectorial, el entorno de trabajo que permitirá obtener los resultados que se tratarán en los temas posteriores. Dicha estructura está presente en el espacio de factores, el de productos finales, el conjunto de posibilidades de producción o el conjunto de oportunidades asociado a un problema de optimización.

Posteriormente se estudiarán los conceptos de subespacio vectorial, sistema de generadores, dependencia e independencia lineal, base y dimensión. Estos conceptos constituyen la esencia de ``lo lineal".

1. El espacio vectorial IR^n

En ocasiones es necesario recoger el comportamiento de ciertas variables, como precios de bienes y renta del consumidor, parámetros de un modelo lineal,... Se trata pues de manejar *n*-tuplas de datos que son elementos del conjunto IR^n.

$$IR^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in IR\}$$

En el conjunto IR^n se definen las operaciones *suma*:

$$\begin{array}{llcll} + : & IR^n & \times & IR^n & \rightarrow \quad IR^n \\ & (x_1,\ldots,x_n) & & (y_1,\ldots,y_n) & \mapsto (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \end{array}$$

y *producto por un escalar*:

$$\begin{array}{llcl} \bullet : IR \times & IR^n & \rightarrow & IR^n \\ \lambda & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) \end{array}$$

Recordemos que $(IR,+,\times)$ **es un cuerpo conmutativo**, lo que significa que las dos operaciones + y × verifican las propiedades ya estudiadas en el tema anterior.

Se dice que IR^n es un *espacio vectorial sobre el cuerpo* IR, porque está dotado de las operaciones

$$+ : IR^n \times IR^n \rightarrow IR^n \qquad \text{y}$$

$$\bullet : \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}^n$$

que cumplen las siguientes propiedades:

+:

i) *Asociativa*: $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})\ \forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in IR^n$.

ii) *Conmutativa:* $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}\ \forall \vec{x},\vec{y}\in IR^n$.

iii) *Elemento neutro:* $\exists \vec{0}\in IR^n \,/\, \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}\ \forall \vec{x}\in IR^n$.

iv) *Elemento simétrico:* $\forall\ \vec{x}\in IR^n\ \exists\ \vec{x}'\in IR^n \,/\, \vec{x}+\vec{x}'=\vec{x}'+\vec{x}=\vec{0},\ \ \vec{x}'=-\vec{x}$.

$\bullet$:

i) *Asociativa mixta*: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{x}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{x})\ \forall \vec{x}\in IR^n, \forall \alpha,\beta\in IR$.

ii) *Distributiva respecto a la suma en* IR^n:

$$\alpha\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\cdot\vec{x}+\alpha\cdot\vec{y}\ \forall \vec{x},\vec{y}\in IR^n, \forall \alpha\in IR.$$

iii) *Distributiva respecto a la suma en* IR:

$$(\alpha+\beta)\cdot\vec{x}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{x}\ \forall \vec{x}\in IR^n, \forall \alpha,\beta\in IR.$$

iv) *Neutralidad*: $1\cdot\vec{x}=\vec{x}\ \forall \vec{x}\in IR^n$.

Propiedades de $\mathbf{IR}^n$

De los axiomas de espacio vectorial se deducen las siguientes propiedades:

i) $0\cdot\vec{x}=\vec{0}\ \forall\ \vec{x}\in IR^n$.

ii) $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}\ \forall\ \lambda\in IR$.

iii) Si $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow \lambda=0$ *ó* $\vec{x}=\vec{0}$.

iv) $\forall\ \vec{x}\in IR^n$ *y* $\forall\ \lambda\in IR$, $(-\lambda)\cdot\vec{x}=-(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot(-\vec{x})$.

Espacios $\mathbf{IR}^2$ *y* $\mathbf{IR}^3$

En IR^2, el *plano real*, un vector $\vec{v}$ puede identificarse con un segmento de recta orientado que parte del origen *O* y tiene su extremo en un punto *Q* con abscisa *x* y ordenada *y*: las *componentes del vector* $\overline{OQ}$. Así, $\vec{v}=(x, y)$. (Véase la Figura 1).

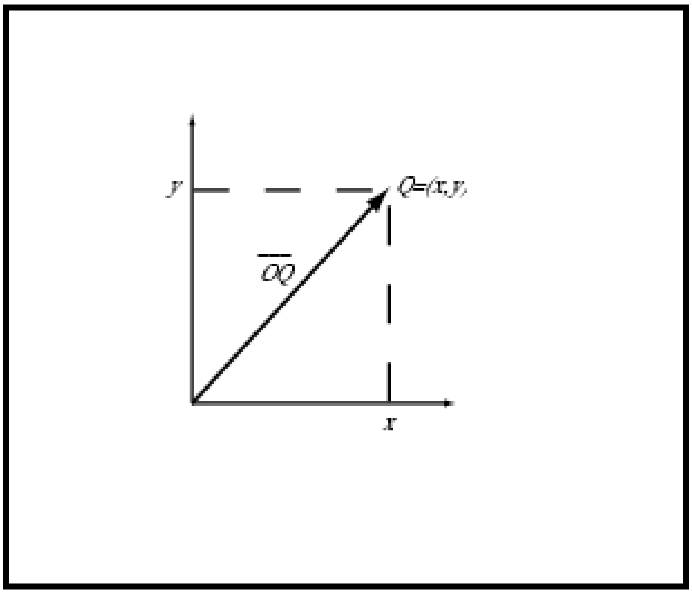

Figura 1: Vector del plano cartesiano.

En IR^3, los vectores están de igual modo caracterizados por su módulo y dirección, pero tienen tres componentes. (Véase la Figura 2).

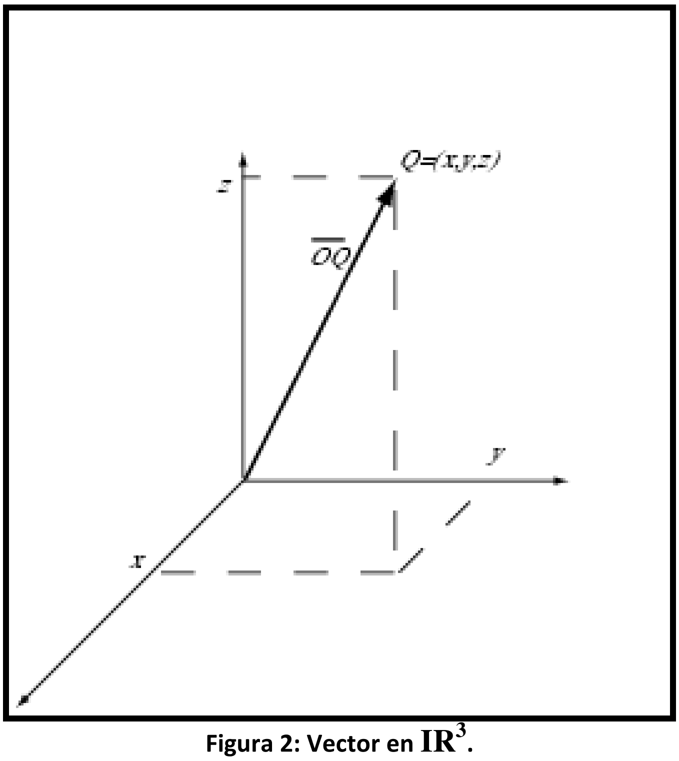

Figura 2: Vector en IR^3.

2. Subespacio vectorial

Sea *U* un subconjunto no vacío de IR^n. Se dice que *U* es un *subespacio vectorial* de IR^n si *U* dotado de las mismas operaciones definidas en IR^n es, a su vez, espacio vectorial.

Teorema. Es condición necesaria y suficiente para que un subconjunto *U* de IR^n sea un subespacio vectorial de IR^n, que se cumplan las condiciones:

$$\begin{array}{l} \vec{x}+\vec{y}\in U \quad \forall \vec{x}, \vec{y}\in U \\ \alpha\vec{x}\in U \quad \forall \vec{x}\in U, \forall \alpha\in IR \end{array}.$$

El teorema anterior se puede resumir en el siguiente resultado:

Corolario. Es condición necesaria y suficiente para que un subconjunto *U* de IR^n sea un subespacio vectorial de IR^n, que se cumpla:

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in U \quad \forall \vec{x}, \vec{y}\in U, \forall \alpha, \beta\in IR$$

3. Dependencia e independencia lineal

Definiciones

Se llama *sistema de vectores de* IR^n a un conjunto finito de vectores de IR^n.

Se dice que un vector $\vec{x}\in$ IR^n es una *combinación lineal* de un sistema formado por los *m* vectores $\vec{x_1},\ldots,\vec{x_m}$ de IR^n, si existen *m* escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in$ IR tales que:

$$\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{x_1}+\cdots+\lambda_m\cdot\vec{x_m}$$

A los escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ se les llama los *coeficientes* de la combinación lineal.

Se dice que el sistema de vectores $\{\vec{x_1},\ldots,\vec{x_m}\}$ de IR^n, es *libre* o *linealmente independiente*, si la única combinación lineal del sistema que produce el vector $\vec{0}$ es la que tiene todos los coeficientes nulos, es decir, si:

$$\lambda_1\cdot\vec{x_1}+\cdots+\lambda_m\cdot\vec{x_m}=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$$

Si existe alguna combinación lineal del sistema, con coeficientes no todos nulos, que es igual a $\vec{0}$, se dice que el sistema es *ligado* o *linealmente dependiente*.

Un sistema $S = \{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_m}\}$ es ligado si y sólo si alguno de sus vectores es combinación lineal de los demás.

4. Sistema generador. Base

Un sistema $S = \{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_m}\}$ de vectores de IR^n se llama un *sistema de generadores de* IR^n (y se dice que *S* genera el espacio IR^n) si todo vector $\vec{x} \in IR^n$ se puede expresar como combinación lineal del sistema *S*:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x_1} + \cdots + \lambda_m \cdot \vec{x_m}$$

De forma análoga, un sistema $S = \{\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_m}\}$ de vectores de un subespacio vectorial *U* de IR^n se llama un *sistema de generadores de U* (y se dice que *S* genera el subespacio *U*) si todo vector $\vec{x} \in U$ se puede expresar como combinación lineal del sistema *S*.

Un sistema de vectores que es un sistema de generadores de IR^n (de un subespacio *U* de IR^n), y es libre, se llama *base* de IR^n (base de *U*).

En particular, *n* vectores en IR^n linealmente independientes, forman un sistema generador del espacio y, por tanto, constituyen una base del mismo.

Propiedades

i) IR^n posee al menos una base. Todo subespacio vectorial $U \neq \{\vec{0}\}$ de IR^n con un sistema de generadores con un número finito de vectores, posee por lo menos una base.

ii) Todas las bases de IR^n tienen el mismo número de vectores: *n*. La *dimensión* de IR^n es *n*, el número de elementos de cualquiera de sus bases.
Todas las bases de un subespacio vectorial *U* de IR^n con un sistema de generadores con un número finito de vectores, tienen el mismo número *m* de vectores. La *dimensión* de *U* es el número de vectores de cualquiera de sus bases. Se escribe *dim*(*U*)=*m*.

Teorema. Sea $B=\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ una base de IR^n . Todo vector $\vec{x} \in IR^n$ se puede expresar de una única forma como combinación lineal de los vectores de la base dada.

Análogamente, si $B=\left\{\vec{u_1},\ldots,\vec{u_m}\right\}$ es una base de un subespacio vectorial U de IR^n, todo vector $\vec{x} \in U$ se puede expresar de una única forma como combinación lineal de los vectores de la base dada.

Sea $\vec{x} \in \mathrm{IR}^n$ ($\vec{x} \in U$ subespacio vectorial de IR^n) A los coeficientes de la única combinación lineal de los vectores de una base B de IR^n (de U) que es igual a $\vec{x}$ se les denomina las *coordenadas* de $\vec{x}$ en la base B.

Cambio de base

Sean $B = \left\{\vec{u_1},\ldots,\vec{u_n}\right\}$ y $B' = \left\{\vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}\right\}$ dos bases de IR^n. Todo vector de IR^n tiene unas coordenadas respecto de la base B y otras coordenadas respecto de la base B'. Nos proponemos encontrar una relación entre unas y otras.

Para poder establecer esta relación, se necesita conocer las coordenadas de los vectores de una de las bases respecto de la otra. Supongamos conocidas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

$$\begin{array}{l}
\vec{v_1} : (a_{11} \ldots a_{1n}) \text{ respecto a } B \\
\vec{v_2} : (a_{21} \ldots a_{2n}) \text{ respecto a } B \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{v_n} : (a_{n1} \ldots a_{nn}) \text{ respecto a } B
\end{array}$$

Es decir, aplicando la definición de coordenadas respecto de una base:

$$\begin{array}{l}
\vec{v_1} = a_{11} \cdot \vec{u_1} + \cdots + a_{1n} \cdot \vec{u_n} \\
\vec{v_2} = a_{21} \cdot \vec{u_1} + \cdots + a_{2n} \cdot \vec{u_n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{v_n} = a_{n1} \cdot \vec{u_1} + \cdots + a_{nn} \cdot \vec{u_n}
\end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ \vdots \\ \vec{u_n} \end{pmatrix},$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Un vector arbitrario $\overrightarrow{x} \in$ IR^n que tiene coordenadas $(x_1 \cdots x_n)$ respecto de la base *B* y las coordenadas $(x_1' \cdots x_n')$ respecto de la base *B'*, se expresa de forma única en las dos bases así:

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{u_n} = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{u_n} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = x'_1\,\overrightarrow{v_1} + x'_2\,\overrightarrow{v_2} + \cdots + x'_n\,\overrightarrow{v_n} = (x'_1 \cdots x'_n)\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda los vectores $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ por sus expresiones en los $\overrightarrow{u_i}$, se tiene:

$$\overrightarrow{x} = x'_1\left(a_{11}\cdot\overrightarrow{u_1} + \cdots + a_{1n}\cdot\overrightarrow{u_n}\right) + x'_2\left(a_{21}\cdot\overrightarrow{u_1} + \cdots + a_{2n}\cdot\overrightarrow{u_n}\right) + \cdots + x'_n\left(a_{n1}\cdot\overrightarrow{u_1} + \cdots + a_{nn}\cdot\overrightarrow{u_n}\right)$$

Matricialmente:

$$\overrightarrow{x} = (x'_1 \cdots x'_n)\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{pmatrix} = (x'_1 \cdots x'_n)A\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{u_n} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $(x_1 \cdots x_n) = (x'_1 \cdots x'_n)A$. Es decir:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\cdot x'_1 + a_{21}\cdot x'_2 + \cdots + a_{n1}\cdot x'_n \\ x_2 &= a_{12}\cdot x'_1 + a_{22}\cdot x'_2 + \cdots + a_{n2}\cdot x'_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{1n}\cdot x'_1 + a_{2n}\cdot x'_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x'_n \end{aligned}$$

Estas son las *ecuaciones del cambio de base*, que permiten relacionar las coordenadas de un mismo vector respecto de las bases *B* y *B'*.

Las ecuaciones del cambio de base se pueden expresar por tanto, en forma matricial así:

$$(x_1 \cdots x_n) = (x'_1 \cdots x'_n)A$$

o bien, (trasponiendo las matrices):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Abreviadamente escribimos $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PX}'$. A la matriz $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^t$ se le llama *matriz del cambio de base de B' a B*. Esta matriz es regular ya que sus *n* columnas son linealmente independientes por ser las coordenadas de los vectores de una base.

Bibliografía

- Barbolla, R. y Sanz, P. (1998). *Álgebra lineal y teoría de matrices*. Ed. Prentice Hall.
- Caballero, R. E., Calderón, S. y Galache, T. P. (2000). *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa. 434 ejercicios resueltos y comentados*. Ed. Pirámide.
- Grossman, S. I. (1997). *Álgebra lineal*. Ed. McGraw-Hill.
- Hernández, E. (1999). *Álgebra y geometría*. Ed. Addison-Wesley/U.A.M.
- Kolman, B. (1999). *Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab*. Ed. Prentice Hill.
- Martínez Salas. (1992). *Elementos de matemáticas*. Ed. Lex Nova.
- Sanz, P., Vázquez, F. J. y Ortega, P. (1998). *Álgebra lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive*. Ed. Prentice Hall.