# BLOQUE 6. CÁLCULO INTEGRAL

- La integral de Riemann.
- Propiedades.
- Primitiva de una función. Integral indefinida.
- Integrales inmediatas.
- Relación entre las integrales indefinidas y las definidas

## 1. La integral de Riemann

El Cálculo Integral, que se introducirá en este tema, se basa en el concepto de la integral, cuyo origen surge de la necesidad de calcular el área de una región comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$, como la que se muestra en la Figura 1.

Para calcular dicho área, al estar delimitada por una curva, se divide la región en franjas verticales, y se obtienen aproximaciones por defecto, al considerar dichas franjas como rectángulos con la altura mínima de dichas franjas, y aproximaciones por exceso considerándolas como rectángulos con la altura máxima. Tendiendo el ancho de las franjas a 0, (y en consecuencia su número tiende a infinito), las aproximaciones por defecto aumentan y las aproximaciones por exceso disminuyen, es decir, ambas aproximaciones mejoran, (se aproximan al área de la región considerada).

Si al tomar límites cuando dicho número de divisiones tiende a infinito, ambas aproximaciones convergen al mismo número, se dice que *f es integrable en el intervalo* $[a\,,b]$ , y a ese número se llama *integral definida de f entre a y b*, o *integral definida según Riemann*, y se denota por:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

### *Interpretación geométrica*

Si $y = f(x)$ es integrable y de signo constante en $[a, b]$, el valor $\int_a^b |f(x)|\,dx$ es el área $A$ de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a, x = b$.

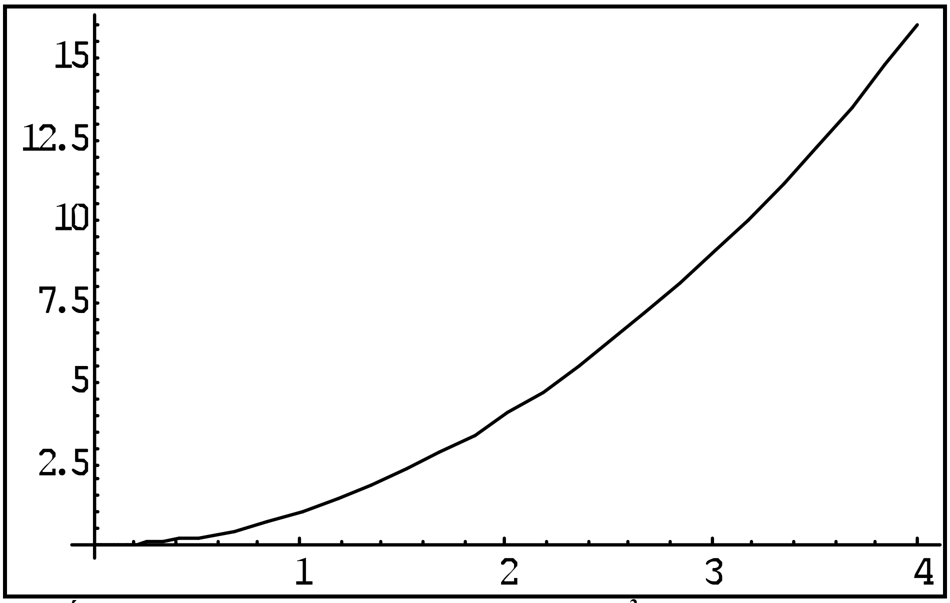

**Figura 1: Área de la región comprendida entre la curva $y=x^2$, el eje OX y las rectas $x=0$, $x=4$.**

## 2. Propiedades

*i)* $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

*ii)* Si $f$ es una función definida en $a$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

*iii)* Sea $f$ una función integrable en $[a, b]$ y sea $a < c < b$, entonces $f$ es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, y se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*iv)* Si $f$ y $g$ son dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces la función $f + g$ es integrable en $[a, b]$, y se tiene

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

*v)* Si $f$ es una función integrable en $[a, b]$, entonces $\alpha f$ es también integrable en $[a, b]$ para cualquier $\alpha \in IR$, y se tiene:

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

*vi)* Si $f$ es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

*vii)* Si $f$ y $g$ son integrables en $[a, b]$, y $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

*viii)* Si $f(x)=1$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = b - a$$

*ix)* Si $f(x)=0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

# 3. Primitiva de una función. Integral indefinida

Una función $H(x)$ definida en un intervalo $I$, se dice que es primitiva de otra $f(x)$ en $I$, si $H'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una función $f(x)$ en $I$, se diferencian tan solo en una constante, pues tienen la misma derivada en el intervalo $I$.

El conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ se conoce como *integral indefinida* de dicha función y se representa por

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

donde $C$ es una constante arbitraria, llamada *constante de integración* y se cumple que $F'(x)=f(x)$. El proceso de hallar las integrales indefinidas se llama *integración indefinida*.

Si $f(x)$ y $g(x)$ admiten primitivas en un cierto intervalo $I$ y $\alpha \in IR$, $\alpha \neq 0$, se cumple:

*i)* $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.

*ii)* $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

## Integrales inmediatas

De la tabla de derivadas de las funciones elementales, se puede obtener una tabla de primitivas y por lo tanto de integrales, a las cuales llamamos *integrales inmediatas*. Son las siguientes:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1 \qquad \int f(x)^n f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad \int f'(x) e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + C$$

# 4. Relación entre las integrales indefinidas y las definidas

**Teorema (La regla de Barrow).** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y $G$ es una primitiva cualquiera de $f$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

## Bibliografía


Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable, I*. Ed. Prentice Hall.

Caballero, R. E., Calderón, S. y Galache, T. P. (2000). *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa. 434 ejercicios resueltos y comentados*. Ed. Pirámide.

Hoffmann, L. D. y Bradley, G.L. (1998). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. Ed. McGraw-Hill.

Martínez Salas. (1992). *Elementos de matemáticas*. Ed. Lex Nova.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice Hall.