BLOQUE 5. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

- Sucesiones de números reales.
  - Límite de una sucesión.
  - Cálculo de límites.
- Series de números reales.
- Progresiones aritméticas y geométricas. Series geométricas.

1. Sucesiones de números reales

Una sucesión de números reales es una aplicación

$$\begin{aligned} f : IN &\rightarrow R \\ n &\mapsto f(n) = a_n \end{aligned}$$

Se denota por $(a_n)_{n=1}^{\infty} \equiv \{a_n\}_{n\in IN} \equiv (a_n)$. Al número a_n se le llama el *término n-ésimo* de la sucesión.

En algunas ocasiones el valor de cada término a_n se puede expresar a partir del índice n. En ese caso, a esa expresión se le llama *término general de la sucesión*.

Límite de una sucesión

En muchas ocasiones es necesario estudiar el comportamiento de una sucesión (a_n) cuando n crece arbitrariamente, es decir, se analizará el límite de una sucesión cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_n$$

La definición formal de *límite real de una sucesión* es la que sigue. Se dice que el límite de una sucesión (a_n) es un valor $L \in IR$ y se denota por $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = L$ o por $a_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} L$ si elegido un número real positivo ε (por pequeño que sea) es posible hallar $n_0 \in IN$ tal que para todo $n > n_0$ se cumple $|a_n - L| < \varepsilon$.

Es decir, a partir de un valor de n suficientemente grande, todos los elementos de la sucesión se "acumulan" cerca de L.

También se define formalmente el caso de límite infinito. Se dice que el límite de una sucesión (a_n) es $+\infty$ y se denota por $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ si dado $M \in IR^+$ (por grande que sea) es posible hallar $n_0 \in IN$ tal que para todo $n > n_0$ se cumple $a_n > M$.
De forma análoga se dice que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si dado $M < 0$ es posible hallar $n_0 \in IN$ tal que para todo $n > n_0$ se cumple $a_n < M$.

Según el comportamiento en el infinito se hablará de sucesiones:

i) Convergentes: si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, con $L < \infty$.

ii) Divergentes: si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

iii) Oscilantes: $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe.

Teorema: Si una sucesión tiene límite, éste es único.

Cálculo de límites

Operaciones elementales

En general son válidos los resultados sobre límites vistos para funciones. Sean $\{a_n\}_{n\in N}$ y $\{b_n\}_{n\in N}$ dos sucesiones convergentes, y sean L_1 y L_2 sus límites respectivos. Se verifica:

$i)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$.

$ii)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$.

$iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$, suponiendo $b_n \neq 0\ \forall n \in IN\ y\ L_2 \neq 0$.

Logaritmos y potencias

Por otro lado, sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión convergente, con límite $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Se verifica:

$i)\ Si\ a_n > 0\ \forall n \in IN\ y\ L > 0 : \lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln(L)$.

$ii)\ Si\ a_n > 0\ \forall n \in IN\ y\ L > 0 : \lim_{n\to\infty} (a_n)^r = L^r\ \forall r \in IR$.

$iii)\ Si\ \alpha > 0 : \lim_{n\to\infty} \alpha^{a_n} = \alpha^L$.

Límites infinitos

En el caso de los límites infinitos, en general son válidas las reglas de manejo de límites infinitos vistas para funciones:

Si (a_n) es una sucesión convergente con límite finito L, y (b_n) una sucesión con límite $+\infty$, se cumple que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$, lo que se escribe de forma abreviada así:

$$L + \infty = +\infty$$

Haciendo uso de esta forma abreviada, se tienen también las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{lll}
L - \infty = -\infty & L\cdot(+\infty) = +\infty,\ L > 0 & (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \\
+\infty + \infty = +\infty & L\cdot(-\infty) = -\infty,\ L > 0 & (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty \\
-\infty - \infty = -\infty & L\cdot(+\infty) = -\infty,\ L < 0 & (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty \\
 & L\cdot(-\infty) = +\infty,\ L < 0 & (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{L}{\pm\infty} = 0 & \dfrac{L}{0^+} = +\infty,\ L > 0 \\
\dfrac{+\infty}{L} = +\infty,\ L > 0 & \dfrac{L}{0^+} = -\infty,\ L < 0 \\
\dfrac{+\infty}{L} = -\infty,\ L < 0 & \dfrac{L}{0^-} = -\infty,\ L > 0 \\
\dfrac{-\infty}{L} = -\infty,\ L > 0 & \dfrac{L}{0^-} = +\infty,\ L < 0 \\
\dfrac{-\infty}{L} = +\infty,\ L < 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\alpha^{+\infty} = +\infty,\ \alpha > 1 & (+\infty)^{+\infty} = +\infty \\
\alpha^{+\infty} = 0,\ \alpha < 1 & (+\infty)^{-\infty} = 0 \\
\alpha^{-\infty} = 0,\ \alpha > 1 & \\
\alpha^{-\infty} = +\infty,\ \alpha < 1 &
\end{array}$$

Indeterminaciones

Igual que ocurría con las funciones, en ocasiones es insuficiente el conocimiento de los límites de las sucesiones con las que se opera para conocer el límite de la sucesión resultado de la operación. A estos casos se les llama casos de indeterminación y son los siguientes:

$$\infty - \infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

Por lo tanto, cuando al intentar calcular un límite, aparece alguna de estas expresiones, se deben hacer transformaciones en el mismo para obtener el límite correspondiente.

Las transformaciones que permiten obtener el límite son análogas a las utilizadas en el cálculo de límites de funciones.

2. Series de números reales

Una *serie de números reales* es una suma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

donde $a_n \in IR \, \forall n$.

La *suma parcial k-ésima* de la serie es

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n .$$

El *término general* de la serie es a_n.

La sucesión (S_k) de sumas parciales de una serie permite estudiar la convergencia de la misma. Así se hablará de series:

i) Convergentes: si $S_k \underset{k\to\infty}{\to} S, con\ S \in IR$. En este caso al número S se le llama la *suma de la serie*.
ii) Divergentes: si $S_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$.
iii) Oscilantes: si $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$ no existe.

La clasificación de una serie en uno de estos tipos es el *carácter* de la serie.

Propiedades

i) El carácter de una serie no cambia si en la serie se suprime un número finito de términos.

ii) El carácter de una serie no cambia si se multiplican o dividen todos los términos por un número distinto de cero. Si la serie era convergente y sumaba *S*, seguirá siendo convergente después de la multiplicación, y su suma será αS, donde α es el número por el que se multiplicaron los términos de la serie.

iii) La suma (término a término) de dos series convergentes es convergente, y su suma es igual a la suma de la primera serie más la suma de la segunda. Igualmente la serie obtenida al restar término a término dos series convergentes es convergente y su suma es la diferencia de las sumas de las dos series.

Teorema (Condición necesaria de convergencia de series). Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la sucesión (a_n) es convergente y su límite es 0.

3. Progresiones aritméticas y geométricas. Series geométricas

Progresiones aritméticas

Una *progresión aritmética* es una sucesión (de números reales) en la que la diferencia entre cada dos términos consecutivos es constante:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in IN.$$

A la constante d se le llama *diferencia de la progresión*.

Evidentemente, al sumarle a un término de una progresión aritmética la diferencia de la progresión, se obtiene el término siguiente.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Así se tiene:

$$a_2 = a_1 + d,\, a_3 = a_1 + 2d,\, a_4 = a_1 + 3d,\, \dots ,a_n = a_1 + (n-1)d$$

que nos da el término general a_n a partir de a_1, n y d.

Dada una progresión aritmética (a_n), se cumple:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Progresiones geométricas

Una *progresión geométrica* es una sucesión en la que el cociente entre cada dos términos consecutivos es constante:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

A la constante r se le llama la *razón de la progresión*.

Evidentemente, en una progresión geométrica, al multiplicar un término por la razón, se obtiene el término siguiente.

$$a_{n+1} = a_n\, r\,.$$

Se tiene por lo tanto:

$$a_1,\; a_2 = a_1 r,\; a_3 = a_1 r^2,\; a_4 = a_1 r^3,\; \ldots\; ,a_n = a_1 r^{n-1}$$

que nos da el término general a partir de a_1, n y r.

Dada una progresión geométrica (a_n), se cumple: $$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}\,.$$

Dada una progresión geométrica (a_n) de razón r, se cumple: $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}\,.$$

Series geométricas

Se llama serie geométrica a toda serie $\sum a_n$ en la que los términos a_1, a_2,… forman una *progresión geométrica*.

La expresión del término general de una serie geométrica es por tanto $a_n = a_1 r^{n-1}$.

La suma parcial n-ésima es

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 r^{n-1} r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}(1 - r^n).$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-r}(1 - r^n) = \begin{cases} \infty & si \quad |r| > 1 \\ \dfrac{a_1}{1-r} & si \quad |r| < 1 \end{cases}$$

Para el caso en que $|r| = 1$ tenemos las dos situaciones siguientes:

- si $r = 1$, la serie es divergente, pues $(S_n) = (na_1)$ es una sucesión divergente para $n \to \infty$ y $a_1 \neq 0$.
- Si $r = -1$ la serie es oscilante.

En conclusión se tiene:

$\boxed{\text{La serie geométrica } \sum a_1 r^{n-1} \text{ es convergente si y sólo si } |r|<1.}$

Bibliografía

- Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable, I*. Ed. Prentice Hall.
- Hoffmann, L. D. y Bradley, G.L. (1998). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. Ed. McGraw-Hill.
- Martínez Salas. (1992). *Elementos de matemáticas*. Ed. Lex Nova.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice Hall.