Interpolación

Javier Segura

Cálculo Numérico I. Tema 3.

Contenidos:

Estructura de la presentación:

Interpolación de Lagrange

Para cualquier conjunto de $n+1$ $(n \geq 0)$ números distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ y cualquier conjunto de números arbitrarios $y_0, y_1, ..., y_n$, existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n tal que $P_n(x_k) = y_k$ para $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Al este polinomio $P_n(x)$ se le llama **polinomio de interpolación** de Lagrange, y se dice que interpola los $n+1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, ..., n$.
Nuestro problema será encontrar tal polinomio, para lo cual estudiaremos dos métodos: **Fórmula de Lagrange** y **diferencias divididas de Newton**.

Forma de Lagrange

Dados $n+1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$ $(x_i \neq x_j \iff i \neq j)$, el único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual n que pasa por estos $n+1$ puntos, es decir, tal que $P_n(x_i) = y_i\,,\quad i = 0, 1, 2, ..., n.$ es

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x),$$

donde

$$L_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \equiv \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Cuando interpolamos valores de una función, el siguiente resultado puede servir para estimar o acotar el error cometido al aproximar la función por el polinomio.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable $n+1$ veces en (a,b). Si $P_n(x)$ es el polinomio de grado menor o igual que n que interpola $f(x)$ entre los $n+1$ nodos distintos $x_0 \ldots x_n \in [a,b]$ entonces $\forall x \in [a,b]\ \exists \zeta_x \in (a,b)$, dependiente de x, tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \equiv P_n(x) + R_n(x)$$

donde se dice que $R_n(x)$ es el resto y denotamos

$$\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = (x - x_0) \ldots (x - x_n).$$

Forma de Newton

Si $x_0, x_1, ..., x_n$ son puntos distintos y $f(x)$ está definida en $[a, b]$, $x_i \in [a, b]$ $i = 0, 1, ..., n$, entonces el polinomio interpolador de $f(x)$ entre estos puntos se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ... \\ &+(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n] = \\ &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0...x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) \end{aligned}$$

La interpolación con las diferencias divididas de Newton es, en general, más fácil de computar que la utilización de la fórmula de Lagrange, y puede ser evaluada de forma recursiva.
En efecto, no es difícil demostrar que

$$f[x_i \ldots x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1} ... x_{i+k}] - f[x_i ... x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - xi} \tag{1}$$

Lo que permite generar las diferencias divididas con $k+1$ argumentos a partir de las diferencias con k argumentos.

Por ejemplo, en el caso de interpolar una función $f(x)$ en tres puntos distintos $x_0, ..., x_2,$, se puede plantear la siguiente tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[]$	$f[,]$	$f[,,]$
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$		

Observemos que cada diferencia dividida se forma tomando la diferencia de las diferencias divididas vecinas (a la derecha) y dividiendo por la diferencia de abscisas; los valores de las abscisas se encuentran trazando las diagonales desde la posición que se está evaluando hasta la columna de las diferencias divididas de orden 0.

Datos igualmente espaciados: forma de Newton

Si los nodos x_i están todos separados por le misma distancia, podemos encontrar una fórmula muy simple para el polinomio interpolador:

$$
\begin{aligned}
P(x_0+sh) &= f(x_0)+s\Delta f(x_0)+s(s-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}+\ldots \\
&+s(s-1)\ldots(s-n+1)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}\,.
\end{aligned}
$$

donde

$$
\Delta^0 f_i = f_i\,,\ \Delta f_i = f_{i+1}-f_i\,,\ \Delta^n f_i = \Delta\Delta^{n-1} f_i = \Delta^{n-1}\Delta f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1}-\Delta^{n-1} f_i
$$

y utilizamos la notación $f_i = f(x_i) = f(x_0+ih)$.

Estructura de la presentación:

Podemos generalizar las diferencias divididas permitiendo que se repitan nodos. Teniendo en cuenta que podemos demostrar que:

Lema

Si f es una función n veces derivable en un intervalo (a, b) y dados $n+1$ valores distintos $x_i \in (a, b)$, $i = 0, \dots, n$ entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ tal que } f[x_0 \dots x_n] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

es lógico tomar, por definición:

Definición

Si f es n veces derivable en x_0 entonces

$$f[x_0 \dots x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

donde x_0 se repite $n+1$ veces en la diferencia dividida.

Combinando la relación

$$f[x_i \ldots x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1} \ldots x_{i+k}] - f[x_i \ldots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - xi}$$

si $x_{i+k} \neq x_i$ con la definición

$$f[[x_i]^{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}$$

podemos calcular diferencias divididas $f[x_i \ldots x_j]$ en las que puede haber repeticiones.

La mejor forma de organizar el cálculo es colocar de forma consecutiva los valores repetidos.

Ejemplo: para calcular $f[x_0x_0x_0x_1]$ hacemos:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0x_0]=f'(x_0) & & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0x_0x_0]=f''(x_0)/2 & & \\
 & & f[x_0x_0]=f'(x_0) & & f[x_0x_0x_0x_1]=\dfrac{f[x_0x_0x_1]-f[x_0x_0x_0]}{x_1-x_0} & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0x_0x_1]=\dfrac{f[x_0x_1]-f[x_0x_0]}{x_1-x_0} & & \\
 & & f[x_0x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & & & \\
x_1 & f[x_1] & & & &
\end{array}
$$

Repetir nodos nos permite la interpolación de Hermite, en la que imponemos condiciones no sólo sobre el valor del polinomio en los nodos, sino también sobre las derivadas.

Teorema (Interpolación de Hermite)

El problema de interpolación

$$\begin{array}{lll} P_n(x_0) = f(x_0), & \dots & P_n^{(n_0)}(x_0) = f^{(n_0)}(x_0) \\ & \dots & \\ P_n(x_k) = f(x_k), & \dots & P_n^{(n_k)}(x_k) = f^{(n_k)}(x_k) \end{array}$$

mediante un polinomio de grado $\leq n = n_0 + .. + n_k + k$, *siendo* $f(x)$ $n+1$ *veces derivable en* $[a, b]$, *tiene solución única, que se puede construir mediante el esquema de diferencias divididas. Denotando* $(\tilde{x}_0 \tilde{x}_1 ... \tilde{x}_n) = ([x_0]^{n_0+1}, ..., [x_k]^{n_k+1})$, *tenemos:*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[\tilde{x}_0 ... \tilde{x}_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - \tilde{x}_j) \, .$$

Además $f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - \tilde{x}_j)$ *para algún* $\zeta_x \in (a, b)$.

Estructura de la presentación:

1. **Interpolación de Lagrange**
   - Forma de Lagrange
   - Teorema del resto
   - Diferencias divididas de Newton
2. **Interpolación de Hermite**
3. **Interpolación de Chebyshev**
   - Comportamiento del error en la interpolación de Lagrange
   - Interpolación de Chebyshev
4. **Interpolación mediante funciones tipo “spline”**

Comportamiento del error

Volvamos a la interpolación de Lagrange (todos los nodos distintos). Definamos

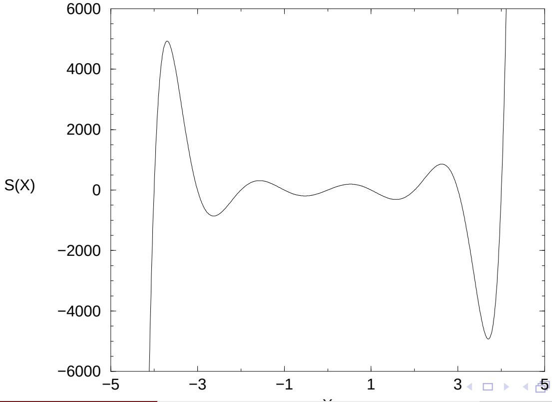
$$S(x) \equiv \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

y, por comodidad, consideraremos $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$.

Para x_i igualmente espaciados, **los mayores valores de $|S(x)|$ se encuentran para los mayores o menores valores de x en el intervalo** $[x_0, x_n]$ (sin coincidir con los x_i) mientras que $|S(x)|$ alcanza menores valores para valores intermedios de x.

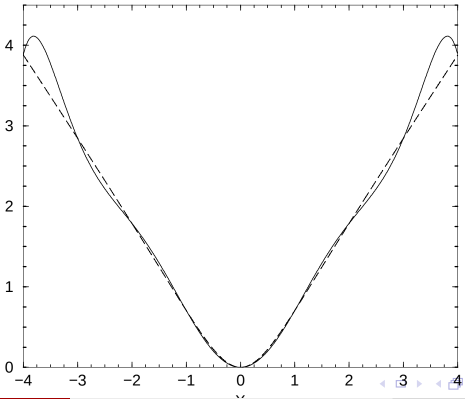
Comportamiento del error

Ejemplo: interpolación de una función para los valores de $x_i = i - 4$, $i = 0.,8$.
$S(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$:



Comportamiento del error

Ejemplo: comparación la interpolación en 9 puntos $x_i = 4 - i$, $i = 0, .., 8$ de la función $f(x) = x^2/\sqrt{x^2+1}$ (línea continua) con la propia función (línea discontinua).



Interpolación de Chebyshev

Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, la mejor aproximación polinómica de grado n será aquella que minimice

$$E[q(x)] \equiv \max_{x \in [a,b]} |f(x) - q(x)|,$$

Si un determinado polinomio $Q_n(X)$ hace que $E[Q_n(x)]$ sea el de valor mínimo entre todos los polinomios de grado n entonces se dice $Q_n(x)$ **es la aproximación** *minimax* **de grado** n **de la función** $f(x)$ **en** $[a, b]$ **.**

Nosotros no consideraremos esta aproximación, sino que buscaremos nodos $x_0 \dots x_n$ tales que el polinomio nodal

$$Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

sea el de mínimo máximo valor absoluto en el intervalo $[a, b]$.

Interpolación Chebyshev

Polinomios de Chebyshev: definición

El polinomio de Chebyshev de orden n-ésimo se define como

$$T_n(x) = \cos\left[n\cos^{-1}(x)\right], \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Polinomios de Chebyshev: propiedades

1. Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Chebyshev:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   siendo los valores iniciales de la recurrencia $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

2. El coeficiente del término x^n en $T_n(x)$ es 2^{n-1} y se cumple que $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

3. Los n ceros de $T_n(x)$ están en el intervalo $[-1, 1]$ y están dados por

$$x_k = \cos\left[\frac{2k+1}{2n}\pi\right]\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

   $T_n(x)$ tiene $n+1$ extremos en el intervalo $[-1, 1]$ que vienen dados por $x'_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, donde los polinomios valen:

$$T(x'_k) = (-1)^k$$

Interpolación de Chebyshev

Teorema

Para cualquier $n \geq 1$, entre todos los polinomios mónicos (es decir, con coeficiente 1 en el término de mayor grado) el polinomio de Chebyshev modificado $\tilde{T}_n(x) \equiv \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ es el de mínimo máximo valor absoluto en [-1,1], siendo este valor $1/2^{n-1}$. Es decir, que

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)|$$

para cualquier polinomio $P_n(x)$ de tipo mónico:

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \,,$$

Interpolación de Chebyshev

Teorema

Sea $f(x)$ $n+1$ veces diferenciable con continuidad en $[a,b]$ Sea $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de Lagrange grado n basado en los $n+1$ nodos (de Chebyshev)

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \ , \ k = 0, ..., n$$

entonces el error viene acotado por:

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!2^n} \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$$

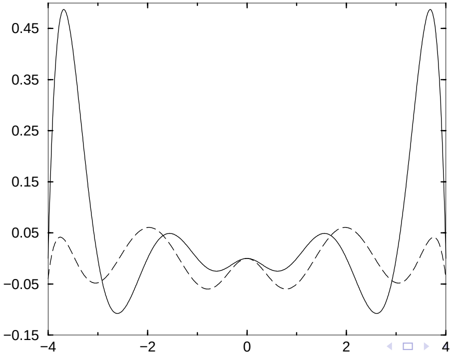
donde hemos considerado el cambio de variable

$$x(t) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

que transforma el intervalo $[-1, 1]$ en $[a, b]$.

Interpolación de Chebyshev

Ejemplo: $f(x) = x^2/\sqrt{x^2+1}$. Se representa $f(x) - P(x)$ con $P(x)$ el polinomio de interpolación que interpola en 9 nodos distintos. La línea continua corresponde a los nodos equiespaciados y la línea discontinua corresponde a la aproximación cuasi-minimax para 9 nodos en el intervalo $[-4, 4]$



Interpolación de Chebyshev

Propiedad de ortogonalidad discreta

$$\sum_{k=0}^{n} T_i(x_k)T_j(x_k) = \left(\frac{n+1}{2}(1+\delta_{i0})\right)\delta_{ij},$$ siendo $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i=j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases}$ la delta de Kronecker. Las x_k son los $n+1$ ceros del polinomio $T_{n+1}(x)$.

Interpolación de Chebyshev

Evaluación de la interpolación Chebyshev

El polinomio interpolador de grado n basado en los nodos de Chebyshev (ceros de $T_{n+1}(x)$), que interpola $f(x)$ en estos $n+1$ puntos de $[-1,1]$, se puede escribir como:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x)$$

donde

$$c_j = \frac{2-\delta_{j0}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_j(x_k)$$

y $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, $k = 0, \ldots, n$.

Estructura de la presentación:

Construcción de splines

Sean $n+1$ puntos (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$ verificando

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\,,$$

una spline cúbica de estos puntos es una función $s(x)$ en $[a, b]$ que satisface:

1. **Polinomio de tercer grado.** $s(x)$ es un polinomio , $P_i(x)$, de grado tres sobre cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, ..., n$.
2. **Condiciones de interpolación.** $s(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, ..., n$.
3. **Suavidad.** $s''(x)$ es continua en $[a, b]$ $(\equiv [x_0, x_n])$, luego también lo son $s(x)$ y $s'(x)$.