PRÁCTICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO I

PRÁCTICA 4: Reglas de cuadratura compuestas

El objetivo de esta práctica es la implementación las siguientes reglas de cuadratura compuestas: sumas de Riemann por la derecha y la izquierda, regla trapezoidal y regla de Simpson.

1 Primera parte: sumas de Riemann

Dada la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, consideremos una partición del intervalo $[a,b]$: $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, ..., N$ ($x_0 = a$, $x_N = b$). Las sumas de Riemann por la izquierda (SRI) y por la derecha (SRD) vienen dadas por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(x_0 + kh) \ \ \text{(SRI)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{N} f(x_0 + kh) \ \ \text{(SRD)}$$

Se pide:

1. Escribir dos programas **sumasRI** y **sumasRD** que implementen las sumas de Riemann por la izquierda y por la derecha, respectivamente. La sintaxis de las rutinas será

   ```
   SRI=sumasRI(funci,a,b,N)
   ```

   ```
   SRD=sumasRD(funci,a,b,N)
   ```

   donde el significado de los *inputs* de las rutinas es evidente.

2. Comprobar el funcionamiento de las rutinas con las siguientes integrales:

   $$(a) \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)\,dx; \ \ (b) \int_0^1 (x^3 + 2x)\,dx; \ \ (c) \int_0^3 (x^2 + x^3)\,dx;$$

   tomando $N = 2^k$, $k = 5, 6, 7$.

2 Segunda parte: reglas trapezoidal y de Simpson

Regla trapezoidal compuesta:

Dada la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, consideremos una partición del intervalo $[a,b]$: $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, ..., N$ ($x_0 = a$, $x_N = b$). Sea $f_i \equiv f(x_i)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + h \sum_{i=1}^{N-1} f_i\,.$$

Regla de Simpson compuesta:

Dada la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, consideremos una partición del intervalo $[a,b]$ con $2m+1$ puntos: $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = x_{2m} = b$. Sea $f_i \equiv f(x_i)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}(f_{2i-2}+4f_{2i-1}+f_{2i}) =$$

$$= \frac{h}{3}(f_0+f_{2m}) + \frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i}$$

Se pide:

1. Escribir dos programas **simpson** y **trapezoid** que implementen la regla de Simpson y la regla trapezoidal, respectivamente. Las rutinas serán

   `simpson(funci,a,b,N)`

   `trapezoid(funci,a,b,N)`

   donde el significado de los *inputs* es evidente.

2. Comprobar el funcionamiento de las rutinas con las siguientes integrales:

   (a) $\int_0^1 (x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 1)\,dx$

   (b) $\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx$

   (c) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$

   (d) $\int_{-10}^{10} e^{-x^2}\,dx \simeq \sqrt{\pi}$

   Realizar las integraciones numéricas (utilizando ambos métodos) para $N = 2^k$, $k = 1, 2, ..., 10$. Para cada valor de k calcular el error cometido (comparado con la solución exacta) con la regla trapezoidal y la regla de Simpson, respectivamente. Considerad también la suma de Riemann por la derecha y comparar los errores de cada uno de estos tres métodos. Para ello, se pide dibujar en una misma gráfica los errores absolutos de cada método como función de k; conviene utilizar logarítmica en el eje Y (utilizando la instrucción semilogy).