

Hoja 2 de Problemas

1. Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$. Si aproximamos la función en el intervalo $[0, 1.58]$ mediante la línea quebrada que une los puntos $(x_i, f(x_i))$ con $x_{i+1} - x_i = 0.01$ ($x_0 = 0$, $x_{158} = 1.58$), ¿cuál es el máximo error cometido?. ¿Y si aproximamos la función por parábolas que unen los puntos x_{2i} , x_{2i+1} y x_{2i+2} , $i = 0, \dots, 78$?
2. Si interpolamos $f(x) = e^x$ utilizando cuatro nodos igualmente espaciados en el intervalo $[0, 1]$, ¿cuál es el máximo error que se comente?
3. Dados los siguientes datos:

x	0	0.1	0.3	0.6
$f(x)$	-2	-1	0	2

construir el polinomio de grado tres que interpola estos datos.

Si a la anterior tabla añadimos el punto $(x_4, f(x_4)) = (0.4, 3)$, se pide obtener el polinomio interpolador que pasa por los 5 puntos.

4. Sea $P_n(x)$ el polinomio de grado a lo sumo n tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$ ($x_i \neq x_j \iff i \neq j$) siendo f una función definida en $[a, b]$. Demostrar que

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0 \dots x_n x] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

5. Dado un conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ denotamos por $P_{n,m}(x)$ el polinomio de grado a lo sumo m que interpola los puntos $\{(x_i, y_i)\}$, $i = n, \dots, n + m$ (con $x_i \neq x_j \iff i \neq j$). Demostrar que

$$P_{l,k}(x) = \frac{x - x_l}{x_{l+k} - x_l} P_{l+1,k-1}(x) + \frac{x_{l+k} - x}{x_{l+k} - x_l} P_{l,k-1}(x)$$

6. Se tienen los siguientes datos para un polinomio $P(x)$

x	0	2	4
$P(x)$	3	2	-3

Determinar el polinomio sabiendo que todas las diferencias progresivas de tercer orden son igual a 1.

7. Sea $p_n(x)$ un polinomio de grado n , $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$. Demostrar que

$$\Delta^n p_n(x_0) = a_n n! h^n$$

para cualquier x_0 . h es el espaciado entre datos.

8. Demostrar que si $f[x_0 \dots x_n x]$ es derivable respecto a x entonces

$$\frac{d}{dx} f[x_0 \dots x_n x] = f[x_0 \dots x_n x x]$$

9. Dada $f(x) = \ln(1+x)$, encontrar el polinomio de grado tres $P_3(x)$ tal que:

$$\begin{aligned}f(0) &= P_3(0), & f'(0) &= P_3'(0), \\f(1) &= P_3(1), & f'(1) &= P_3'(1)\end{aligned}$$

Repetir el cálculo para que, además de las condiciones anteriores, se cumpla que:

(a) $f''(0) = P_4''(0)$, en cuyo caso el polinomio de interpolación es de grado 4.

(b) Todas las condiciones anteriores y además $f''(1) = P_5''(1)$ (en este caso el polinomio interpolador es de grado 5)

Acotar en cada uno de los casos el máximo error cometido al aproximar la función por el polinomio interpolador en $[0, 1]$.

10. Encontrar el polinomio de interpolación de Chebyshev para la función $f(x) = \sinh(4x)$ por un polinomio de tercer grado en $[-1, 1]$.