Examen con soluciones

1. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, buscando un contraejemplo en el caso de ser falsas **(2.5 puntos)**:

(a) **Si $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[a, b]$ entonces el método de bisección en ese intervalo converge necesariamente a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.**

Falso. No se dice que la función sea continua, luego podría cambiar de signo sin que exista un $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/(x-1)$ cambia de signo en $[0.5, 2]$ y el método de bisección converge a 1, que no es una solución de $f(x) = 0$.

(b) **Sea $f(x)$ infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $f(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$. Entonces, existe un entorno de α tal que el método de Newton converge para todo valor inicial x_0 en ese entorno y además lo hace necesariamente con orden de convergencia 2.**

Falso. Si la raíz fuera tal que $f'(\alpha) = 0$ entonces la convergencia sería lineal (de orden 1). El método de Newton es $x_{n+1} = g(x_n)$ con $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ y tenemos que $g'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$ y si $f'(\alpha) = 0$ no podemos decir que $g'(\alpha) = 0$. Así, si por ejemplo $f(x) = (x-\alpha)^2 h(x)$ con $h(\alpha) \neq 0$ y $h(x)$ suficientemente derivable, es fácil comprobar (ver hoja de problemas) que

$$\lim_{x \to \alpha} g'(x) = \frac{1}{2}$$

lo que demuestra la convergencia de orden 1 (ver teorema del punto fijo).

(c) **Sean (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces existen infinitos polinomios $P(x)$ de grado n tales que $P(x_i) = y_i$.**

Cierto. Sabemos que existe un único polinomio $Q(x)$ de grado menor o igual que $n-1$ cumpliendo $Q(x_i) = y_i$ (el polinomio de interpolación de Lagrange), pero polinomios de mayor grado (por ejemplo de grado n) hay infinitos. En concreto, dado el polinomio de interpolación de Lagrange $Q(x)$, el polinomio $P(x)$ de grado n

$$P(x) = Q(x) + \gamma(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

verifica $P(x_i) = y_i$ para cualquier γ.

(d) **Sean los polinomios $Q_n(x) = (x - x_1)...(x - x_n)$ donde $x_i = \cos((k - 1/2)\frac{\pi}{n})$, $k = 1, \dots n$. Entonces $\max_{x \in [-1,1]} |Q_n(x)|$ tiende a cero cuando n tiende a $+\infty$.**

Cierto. Estamos considerando los nodos de Chebyshev, luego el polinomio mónico $Q_n(x)$ es el polinomio de Chebyshev normalizado $Q_n(x) = \tilde{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$, y como sabemos que $\max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$ el resultado es evidente.

(e) **Toda regla de cuadratura $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ de grado de exactitud $m-1$ verifica que $\dfrac{b^p - a^p}{p} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^{p-1}$, para $p = 1, ...m$.**

Cierto. Por definición de grado de exactitud, si el grado de exactitud es $m-1$ quiere decir que la cuadratura es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que $m-1$, y en particular es exacta para integrar x^{p-1}, $p = 1, ...m$, luego

$$\int_a^b x^{p-1} dx = \sum_{i=1}^{n} w_i (x_i)^{p-1}$$

y la integral es, por supuesto, $(b^p - a^p)/p$.

2. Resolver los siguientes problemas **(3.5 puntos)**

   (a) **Sea la función $f(x) = x\log(x) - 2x^2 + 1$. Se pide**

   i) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

   ii) Encontrar un intervalo en el que el método de Newton converge para cualquier valor inicial x_0 en ese intervalo.

   iii) Partiendo de $x_0 = 0.6$ (que es un valor próximo a la raíz y que garantiza convergencia) calcular la raíz mediante el método de Newton con cuatro dígitos correctos.

   i) Primero observamos que f es continua en $\mathbb{R}^+$ y que $f(0^+) = 1$ mientras que $f(+\infty) = -\infty$, luego al menos tiene una raíz real. Derivando $f'(x) = 1+\log(x)-4x$ y tenemos que $f'(0^+) = -\infty$ y $f'(+\infty) = -\infty$; además, como $f''(x) = 1/x - 4$, la primera derivada $f'(x)$ tiene un único extremo relativo, donde además alcanza su máximo valor, que es $f'(1/4) = \log(1/4) < 0$. Por lo tanto $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$, es decir, que es una función estrictamente decreciente, luego sólo puede tener un cero.

   ii) De lo anterior vemos que $f''(x) < 0$ si $x > 1/4$; además $f'(x) < 0$. Por otra parte tenemos que $f(1/4) > 0$, y por lo tanto el cero está en $x > 1/4$. Es inmediato comprobar gráficamente (como vimos en teoría), que, siendo la función decreciente y convexa en $x > 1/4$, el método de Newton proporciona convergencia para cualquier x_0 en un intervalo $[a, b]$ con $1/4 \leq a < \alpha < b$ siendo α la raíz de f ($f(\alpha) = 0$). Con estos argumentos la convergencia está asegurada para cualquier x_0 en $[1/4, +\infty)$ (y no es difícil demostrar que, de hecho, converge para cualquier $x_0 > 0$).

   iii) Se trata simplemente de iterar $x_{n+1} = g(x_n)$, $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, hasta obtener dos valores cuyos cuatro primeros dígitos significativos coincidan. Tenemos $x_0 = 0.6$, e iterando $x_1 = 0.58612405$, $x_2 = 0.58601534$, $x_3 = 0.58601533$.

   (b) **Dada** $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ **se pide:**

   i) Obtener mediante el esquema de diferencias divididas el polinomio de menor grado $P(x)$ tal que $f(-1) = P(-1)$, $f(0) = P(0)$, $f(1) = P(1)$.
   Obtener además una cota para $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)|$.

   ii) Sea ahora el polinomio de menor grado $Q(x)$ que verifica las condiciones de interpolación de $P(x)$ y, además, las condiciones adicionales $Q'(-1) = f'(-1)$ y $Q'(1) = f'(1)$. Obtener este polinomio y acotar $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - Q(x)|$

   i) Calculamos las diferencias divididas, basándonos en la propiedad

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

   Lo hacemos utilizando la tabla habitual:

$$\begin{array}{cccc}
x_i & f[] & f[,] & f[,,] \\
 & & & \\
x_0 = -1 & 1 & & \\
 & & -\frac{1}{2} & \\
x_1 = 0 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} \\
 & & -\frac{1}{6} & \\
x_2 = 1 & \frac{1}{3} & &
\end{array}$$

El polinomio de interpolación lo podemos escribir

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

y las diferencias dividas son los primeros elementos de cada columna, de izquierda a derecha, es decir que

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{6}(x + 1)x.$$

En cuanto al error, por la fórmula del resto tenemos:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

para cierto $c \in (x_0, x_2) = (-1, 1)$. Entonces, como $f^{(3)}(x) = -6/(2 + x)^4$ tenemos que

$$|R(x)| = |f(x) - P(x)| = \frac{1}{(2 + c)^4}|(x + 1)x(x - 1)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |x(x^2 - 1)|.$$

Nos falta encontrar los extremos de $p(x) = x(x^2 - 1)$. Hacemos $p'(x) = 3x^2 - 1 = 0$, luego los extremos relativos están en $x = \pm 1/\sqrt{3}$, donde $p(\pm 1/\sqrt{3}) = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Por lo tanto

$$\max_{x \in [-1,1]} |R(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ii) Tenemos ahora que considerar una interpolación de Hermite en la que el nodo $x_0 = -1$ aparece dos veces, al igual que el nodo $x_2 = 1$. La tabla de diferencias divididas se puede completar a partir de la anterior aumentando por arriba (repitiendo x_0) y por abajo (repitiendo x_2). Cuando se repiten nodos, hemos de utilizar la propiedad

$$f[[x_i]^{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Los valores calculados con esta propiedad son $f[x_0, x_0] = f'(x_0) = -1$ y $f[x_2, x_2] = f'(x_2) = -1/9$. La tabla queda:

$$\begin{array}{rcccccc}
x_i & f[] & f[,] & f[,,] & f[,,,] & f[,,,,] \\
 & & & & & \\
x_0 = -1 & 1 & & & & \\
 & & f'(x_0) = -1 & & & \\
x_0 = -1 & 1 & & \frac{1}{2} & & \\
 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{6} & \\
x_1 = 0 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{18} \\
 & & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{18} & \\
x_2 = 1 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{18} & & \\
 & & f'(x_2) = -\frac{1}{9} & & & \\
x_2 = 1 & \frac{1}{3} & & & &
\end{array}$$

Entonces el polinomio es

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0x_0](x - x_0) + f[x_0x_0x_1](x - x_0)^2 + f[x_0x_0x_1x_2](x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_2)$$

donde las diferencias divididas son, de nuevo, las primeras de cada columna y de izquierda a derecha, es decir:

$$P(x) = 1 - (x + 1) + \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{1}{6}(x + 1)^2 x + \frac{1}{18}(x + 1)^2 x(x - 1)$$

El error se puede escribir

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)^2 = -\frac{1}{(2+c)^6}x(x^2-1)^2$$

Para acotar el valor absoluto de $p(x) = x(x^2-1)^2$ en $[-1,1]$ derivamos $p'(x) = (x^2-1)^2 + 4x^2(x^2-1) = (x^2-1)(5x^2-1)$. Tenemos extremos relativos en $x = \pm 1$ y $x = \pm 1/\sqrt{5}$ y como $p(\pm 1) = 0$ y $p(\pm 1/\sqrt{5}) = \mp\frac{16}{25\sqrt{5}}$:

$$\max_{x\in[-1,1]} |R(x)| \leq \frac{16}{25\sqrt{5}}$$

(c) Dada la integral

$$\boldsymbol{I(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx}$$

se pide

i) Obtener un espaciado entre nodos, h, que garantice que la regla de Simpson compuesta permite aproximar la integral con un error absoluto menor que 0.0005.

ii) Aproximar numéricamente la integral mediante la regla de Simpson compuesta para ese valor de h.

Tenemos que utilizar que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + f_n) + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + \frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\tau)$$

para cierto $\tau \in [a,b]$; $h = (b-a)/n$, $n = 2m$; $x_j = a + jh$, $j = 0, ..., n$; $f_j = f(x_j)$.
Lo primero es acotar el error para determinar h. Tenemos que exigir que

$$\left| -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\tau) \right| \leq 0.0005$$

Tras un cálculo sencillo llegamos a que $f(x) = e^{-x^2}$ tiene las siguientes derivadas cuarta y quinta: $f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$ y $f^{(5)}(x) = -8xe^{-x^2}(4x^4 - 20x^2 + 15)$. Los extremos relativos de $f^{(4)}(x)$ están entonces en $x = 0$ y en las soluciones de $4x^4 - 20x^2 + 15 = 0$, que resultan estar fuera del intervalo de integración $[-0.5, 0.5]$. Por lo tanto los máximos valores de $|f^{(4)}(x)|$ en este intervalo pueden estar en $x = 0$ o en los extremos del intervalo. Es fácil ver que este máximo valor está en $x = 0$, donde $|f^{(4)}(0)| = 12$.
Por lo tanto

$$\left| -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\tau) \right| \leq h^4 \frac{12}{180} = \frac{h^4}{15}.$$

Tomamos entonces $h^4/15 < 0.0005$, es decir, $h < 0.2942$ o, lo que es lo mismo $n > (b-a)/h = 3.398$.
Entonces, consideramos $n = 4$ (luego $h = 0.25$) que además es par (como debe ser para el método de Simpson pues $n = 2m$).
Tenemos que aplicar ahora la regla de Simpson para los nodos $x_j = a + jh$, $j = 0, ..., 4$, $h = 0.25$, es decir $x_0 = -0.5$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.25$, $x_4 = 0.5$. Tenemos, para $f(x) = e^{-x^2}$,

$$\begin{aligned} \int_{-0.5}^{0.5} e^{-x^2} dx &\approx \frac{0.25}{3}(f(-0.5) + f(0.5)) + \frac{2 \times 0.25}{3} f(0) + \\ &+ \frac{4 \times 0.25}{3}(f(-0.25) + f(0.25)) = 0.92274... \end{aligned}$$

3. Resolver los dos siguientes ejercicios prácticos **(cuatro puntos)**

(a) **Escribir un programa, secant.m que, dada una función f (que escribiríamos en un fichero), aplique el método de la secante para calcular una raíz de f con una precisión relativa ϵ. Las primeras lineas del programa deberán ser:**

```
function it=secant(x0,x,eps)
% Entradas: (x0,x,eps)
%         x0,x: valores iniciales
%         eps: tolerancia absoluta
% Salidas:
%         it: vector de longitud n con las sucesivas aprox a la raiz
```

Solución: para este ejercicio no se da solución explícita pues no hay una única forma de programar el algoritmo.

(b) **Completar las líneas 4, 9 y 10**

```
1   function c=difdiv(x,y)
2   n=length(x);
3   i=0;
4   c=  ;
5   while i<n
6      j=n+1;
7      i=i+1;
8      while j>i+1
9         j=   ;
10        c(   )=(c(   )-c(   ))/(x(   )-x(   ));
11     end
12  end
```

Solución: este es el algoritmo de diferencias divididas (ver correspondiente práctica). Línea 4: c=y; Línea 9: j=j-1; Línea 10: c(j)=(c(j)-c(j-1))/(x(j)-x(j-i)).

(c) **Dada**

$$\int_a^b f(x)dx,$$

se pide escribir un programa que calcule sucesivas estimaciones de la integral mediante la regla trapezoidal compuesta

$$T_n(f) = \frac{h}{2}(f_0 + f_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} f_i,$$

para valores $n = 2^k$, $k = 0, 1, ..., N$ (tomando, por ejemplo, $N = 16$) y que, simultáneamente, evalúe la regla de Simpson utilizando la relación

$$S_{2n}(f) = \frac{4T_{2n}(f) - T_n(f)}{3},$$

siendo S_m la regla de Simpson compuesta con $m + 1$ nodos.
El algoritmo deberá parar si la diferencia en valor absoluto entre dos estimaciones sucesivas de la regla de Simpson es menor que la tolerancia de error ϵ.

Solución: para este ejercicio no se da solución explícita pues no hay una única forma de programar el algoritmo.