ECONOMETRÍA I

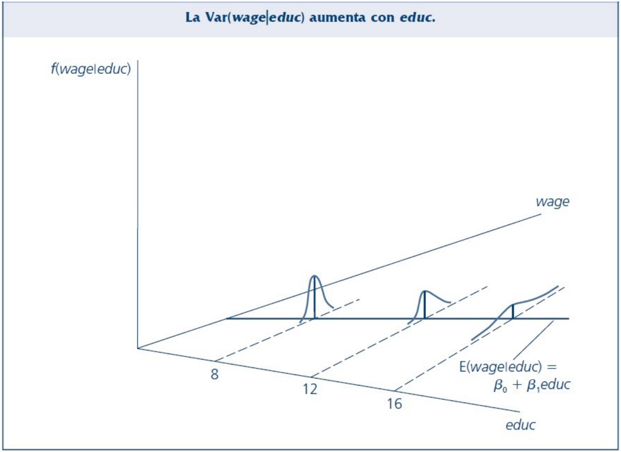
Tema 6: Heterocedasticidad

Patricia Moreno
Juan Manuel Rodriguez Poo
Alexandra Soberon
Departamento de Economía

Heterocedasticidad

- El supuesto de **homocedasticidad** implica que, condicionando en las variables explicativas, la varianza del término de error no observado es constante.
- Sin embargo, en diversos análisis económicos este supuesto no es cierto y es necesario relajarlo. Por ejemplo, cuando estimamos la relación entre la educación y la habilidad (no observable) suponer que la habilidad es constante para cualquier nivel educativo es demasiado estricto.
- **Heterocedasticidad**: la varianza del error es diferente para cada valor de x. Los errores son heterocedásticos.

Ejemplo de heterocedasticidad



Fuente: Wooldridge (2005)

Heterocedasticidad: consecuencias

- Los estimadores MCO siguen siguendo insesgados y consistentes.
- Bajo heterocedasticidad, los errores estándar de los estimadores están sesgados.
- **Problema**: en presencia de heterocedasticidad los estadísticos habituales empleados en las pruebas de hipótesis bajo los supuestos de Gauss-Markov ya no son válidos.
- Como $Var(u|X)$ ya no es constante, el estimador MCO ya no es MELI y el estimador MCO ya no es asintóticamente eficiente.
- En presencia de heterocedasticidad es posible hallar estimadores que sean más eficientes que el estimador MCO, aunque es necesario conocer la forma de la heterocedasticidad.

Varianza del estimador MCO con heterocedasticidad

- Para un modelo de regresión simple en el que se cumplen **RLM.1-RLM.4**, el estimador MCO es

$$\widehat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$$

- Asumiendo $Var(u_i|X_i) = \sigma_i^2$, la varianza del estimador es

$$Var(\widehat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\sigma_i^2}{SST_x^2}.$$

Varianza del estimador MCO con heterocedasticidad

- Cuando $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$, un estimador válido de $Var(\widehat{\beta}_1)$ es

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \widehat{u}_i^2}{SSC_x^2},$$

donde $\widehat{u}_i$ son los residuos MCO.

- De manera general, un estimador válido de $Var(\widehat{\beta}_j)$ con heterocedasticidad para un modelo de regresión múltiple es

$$\widehat{Var(\widehat{\beta}_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{r}_{ij} \widehat{u}_i^2}{SST_j^2},$$

donde $\widehat{r}_{ij}$ es el residuo *ith* de la regresión de X_j sobre el resto de variables independientes y SST_j es la suma de los residuos al cuadrado de esta regresión.

- Dados los supuestos de Gauss-Markov obtenemos

$$Var(\widehat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)},$$

donde

  - $SST_j = \sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_j)^2$.
  - R_j^2 es el R^2 resultante de regresar X_j sobre el resto de explicativas.

PRUEBA:

$$\begin{aligned} Y &= X_j\beta_j + X_s\beta_s + u, \\ \widehat{\beta}_j &= (X_j' M_s X_j)^{-1} X_j' M_s Y. \end{aligned}$$

$$Var(\widehat{\beta}_j) = \sigma_u^2 (X_j' M_s X_j)^{-1}$$

$$\begin{aligned} Var(\widehat{\beta}_j) = \sigma_u^2 (X_j' M_s X_j)^{-1} &= \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \overline{X}_j)^2 (1 - R_j^2)} \\ &= Var(\widehat{\beta}_j) \frac{1}{1 - R_j^2}. \end{aligned}$$

Errores estándar robustos

- **Error estándar robusto**: raíz cuadrada del estimador consistente de la varianza.
- Una vez obtenidos los errores estándar robustos a heterocedasticidad es posible construir un estadístico t robusto a heterocedasticidad.
- Normalmente la varianza estimada suele ser corregida por los grados de libertad. Para ello, la multiplicamos por $n/(n-k-1)$.

¿Por qué calculamos los errores estándar habituales?

- Bajo homocedasticidad, los errores se distribuyen normalmente y los estadísticos t tienen distribuciones t exactas, sin importar el tamaño muestral.
- Los errores estándar robustos y los estadísticos t robustos sólo se justifican si el tamaño de la muestra es grande.
- Con tamaño muestral pequeño el t robusto puede tener distribuciones alejadas de la distribución t invalidando la inferencia.

LM robusto a heterocedasticidad

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + u$$

- Hipótesis nula: $H_0 : \beta_3 = 0, \beta_4 = 0$. LM es aproximadamente χ^2_q.
- Obtenemos los residuos del modelo restringido ($\widetilde{u}$).
- Regresamos cada una de las variables independientes excluidas bajo la H_0 sobre todas las variables incluidas (q regresiones distintas). Guardamos los residuos $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2, \cdots, \widetilde{r}_q$.
- Regresamos variable unitaria sobre $\widetilde{r}_1\widetilde{u}, \widetilde{r}_2\widetilde{u}, \cdots, \widetilde{r}_q\widetilde{u}$ sin intercepto.
- **Estadístico LM**: $LM = n - SSR_1$, donde SSR_1 es la suma de cuadrados de los residuos de la última regresión.

Contrastando heterocedasticidad

- **Objetivo**: contrastar el supuesto de homocedasticidad,

$$H_0 : Var(u|X_1, X_2, \cdots, X_k) = \sigma^2,$$

que es equivalente a $H_0 : E(u^2|X_1, X_2, \cdots, X_k) = E(u^2) = \sigma^2$.

- Si rechazamos H_0 el valor esperado de u^2, dadas las variables independientes, puede ser prácticamente cualquier función de X_j.
- ¿Por qué contrastar heterocedasticidad? Bajo los supuestos del modelo lineal clásico,
  - los estadísticos t usuales tienen distribuciones t exactas.
  - los estimadores MCO ya no son MELI en presencia de heterocedasticidad.
- **Tipos de contrastes**: Breusch-Pagan y White.

Test de Breusch-Pagan

- Si asumimos que existe una relación entre u^2 y X_j que puede ser lineal, es posible contrastar una restricción del tipo

$$u^2 = \delta_0 + \delta_1 X_1 + \cdots + \delta_k X_k + v.$$

- **Contraste**: $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_k = 0$.
- Problema: el término de error no es observable, pero podemos utilizar los residuos MCO para esta regresión.
- Después de regresar $\widehat{u}^2$ sobre todas las X podemos usar el R^2 para contruir el estadístico.
- El estadístico F es igual que el estadístico que contrasta la significatividad global de la regresión, $F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_{k,n-k-1}$.
- El estadístico LM es $LM = nR^2 \sim \chi^2_k$.

Test de White

- Problema: el test de Breusch-Pagan sólo detecta formas lineales de heterocedasticidad.
- Para resolverlo, el test de White permite contrastar no linealidades utilizando los cuadrados y los productos cruzados de todos los regresores. Si $k = 3$,

$$\begin{aligned}\widehat{u}^2 &= \delta_0 + \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \delta_4 X_1^2 + \delta_5 X_2^2 + \delta_6 X_3^2 \\ &+ \delta_7 X_1 X_2 + \delta_8 X_1 X_3 + \delta_9 X_2 X_3 + v\end{aligned}$$

- **Contraste**: $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_9 = 0$.
- El estadístico F y el LM nos permiten contrastar si todas las X_j, X_j^2 y $X_j X_h$ son conjuntamente significativas.

Test de White modificado

- La abundancia de regresores es una debilidad del test de White. Sin embargo, es posible obtener una prueba que preserva mejor los grados de libertad.
- Para ello obtenemos los residuos MCO y los valores ajustados y estimamos

$$\widehat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 \widehat{y} + \delta_2 \widehat{y}^2 + \epsilon,$$

donde $\widehat{y}$ y $\widehat{y}^2$ pueden aproximar X_j, X_j^2 y $X_j X_h$.
- Destacar que gracias a este procedimiento sólo contrastamos 2 restricciones.
- Utilizamos el R^2 resultante para calcular el estadístico F o el LM.

Mínimos Cuadrados Ponderados

- En presencia de heterocedasticidad, MCO ya no es el mejor estimador lineal insesgado.
- Si se conoce la forma de la heterocedasticidad puede usarse la estimación por Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) para obtener estimadores más eficientes que los de MCO.
- Los estimadores MCP nos conducen a nuevos estadísticos t y F que tienen distribuciones t y F, respectivamente.
- La idea básica del procedimiento de Mínimos Cuadrados Ponderados se basa en transformar el modelo cierto para que el término de error sea homocedástico.

- Siendo el modelo a estimar

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i.$$

- Suponemos que la varianza se puede modelizar como

$$Var(u|X) = \sigma^2 h(X),$$

donde $h(X) = h_i$ determina la heterocedasticidad.

MCP: heterocedasticidad conocida salvo una cte

- Si dividimos el modelo por $\sqrt{h_i}$ obtenemos un modelo transformado de la forma

$$Y_1^* = \beta_0 + \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + u_i^*,$$

donde $Y_i^* = Y_i/\sqrt{h_i}$ y $X_{ji}^* = X_{ji}/\sqrt{h_i}$, para $j = 2, \cdots, k$.

- Los errores de este modelo son homocedásticos dado que
  - $E(u_i^*|X) = E\left(\frac{u_i}{\sqrt{h_i}}|X\right) = \frac{E(u_i|X)}{\sqrt{h_i}} = 0.$
  - $Var(u_i^*) = E\left(\frac{E(u_i^2|X)}{h_i}\right) = \frac{\sigma^2 h_i}{h_i} = \sigma^2.$

Recuerda $Var(u|X) = \sigma^2 h_i$.

Mínimos Cuadrados Generalizados

- Estimar el modelo transformado por MCO es un ejemplo del método de Mínimos Cuadrados Generalizados (GLS).
- Dado que la ecuación transformada satisface los supuestos del modelo lineal clásico, RLM.1-RLM.6, a excepción del supuesto de homocedasticidad el estimador GLS es MELI.
- El procedimiento GLS es un método de MCP donde cada residuo al cuadrado es ponderado por la inversa de $Var(u_i|X_i)$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \cdots - \beta_k X_{ki} \right)^2 / h_i .$$

Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles

- GLS es muy útil cuando conocemos la forma de $Var(u_i|X_i)$. Sin embargo, en los estudios empíricos esto no es muy habitual.
- Para resolver esta situación se desarrolla un procedimiento basado en la estimación de $h(X_i)$ conocido como Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles (FGLS).
- Partimos del supuesto de que la heterocedasticidad se puede modelizar como

$$Var(u|X) = \sigma^2 \exp(\delta_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \cdots + \delta_k X_k)$$

donde los parámetros δ deben ser estimados

Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles

- Para estimar el modelo transformamos la ecuación en una forma lineal que puede ser estimada por MCO,

$$u^2 = \sigma^2 \exp(\delta_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \cdots + \delta_k X_k) v,$$

donde $E(v|X) = 1$ si $E(v) = 1$.

- Como v es independiente de X,

$$log(u^2) = \alpha_1 + \delta_2 X_2 + \cdots + \delta_k X_k + e,$$

donde $E(e) = 1$ y es independiente de X.

Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles

Para obtener el estimador FGLS:

- Regresamos Y sobre todos los X y obtenemos los residuos $\widehat{u}$. Calculamos $log(\widehat{u}^2)$.
- Regresamos $log(\widehat{u}^2)$ sobre todos los residuos X obteniendo los valores ajustados: $\widehat{g}_i = \widehat{log(\widehat{u}^2)}$.
- Estimamos el modelo cierto por GLS utilizando $1/exp(\widehat{g})$ como ponderación.

Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles

- El estimador FGLS ya no es insesgado, pero sigue siendo consistente y asintóticamente eficiente.
- Los estadísticos usuales, t y F, de la regresión MCP son asintóticamente válidos.
- Recuerda que usamos MCP por motivos de eficiencia. Los estimadores MCO siguen siendo insesgados y consistentes.
- Los estimadores aún serán diferentes debido a un error muestral. Si son muy diferentes es probable que algún supuesto más de Gauss-Markov es falso.