Lectura 2
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil

Curso Académico 2011-2012

Idea básica: en ocasiones, la utilización de variables apropiadas en lugar de las originales, nos ayuda a simplificar la región de integración y/o el integrando (como ocurre con la integración en una variable).

Teorema del cambio de variable (Integrales Dobles)

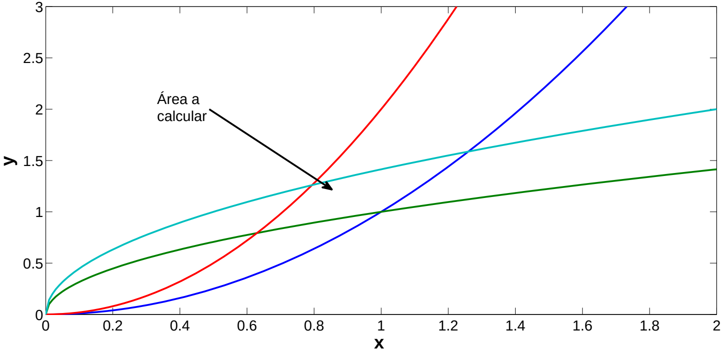
Sean $D, E \subset \mathbb{R}^2$, y sea $T : E \longrightarrow D$ una aplicación biyectiva dada por $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Sea J el jacobiano de este cambio de variable; es decir,

$$J = det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

Supongamos, además, que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable. Entonces,

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_E f(x(u,v), y(u,v))\cdot \mid J \mid du\, dv\,.$$

Ejemplo 1: **Calcular** $\int\int_D dxdy$ **siendo** D **la región del plano limitada por las cuatro curvas;** $y = x^2$, $x = y^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2/2$.



Este problema se puede resolver: **a)** con técnicas de integración en una variable (hacer!); **b)** aplicando técnicas de dos variables en las variables originales (hacer!); **c)** considerando un cambio de variables. Por ejemplo:

$$u = x^2/y \ , \ v = y^2/x$$

Si nos restrigimos al primer cuadrante, donde se encuentra D, **estas ecuaciones efectivamente definen un cambio de variables** (aplicación biyectiva).

Los límites de la región D (cada una de las curvas), se corresponden con $u = 1$ ($y = x^2$), $u = 1/2$ ($y = 2x^2$), $v = 1$ ($x = y^2$) y $v = 2$ ($x = 2y^2$).

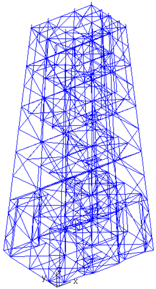
Es decir, conseguimos transformar el dominio original en un rectángulo.

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

siendo $D' = \{(u,v)\,|\,1/2 \leq u \leq 1\,, 1 \leq v \leq 2\}$.
Dado que $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 3$ (hacer!), tenemos que $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1/3$ y de esta forma

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2} = 1/6\,.$$

Un comentario: Este tipo de transformaciones son de gran utilidad en, por poner un ejemplo, **Métodos de Elementos Finitos** en más de una dimensión (técnicas numéricas para resolver, normalmente, problemas vinculados a EDPs), de gran utilidad en geometrías variadas ...



Un ejemplo de cálculo de estructuras: triangularización para el diseño de una plataforma que ha de someterse a vibraciones de diverso tipo.

En este tipo de cálculos interesa transformar triángulos y cuadriláteros con vértices de coordenadas cualesquiera a triángulos y cuadriláteros "de referencia" ...

Ejemplo-Ejercicio 2:

Calcular $\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$ donde D es el triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x+y=1$.

En este caso, el dominio D es muy sencillo y la dificultad se plantea con el integrando. Un cambio de variables que resulta útil es $u = y - x$, $v = y + x$.

Por ejemplo:

1. Cálculo de áreas de superficies en $\mathbb{R}^2$: como ya comentamos, la superficie de la región $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitada por una curva cerrada es: $\mu(D) = \int\int_D dxdy$.

2. Cálculo de volúmenes: $\int\int_D f(x,y)dxdy$ es el volumen comprendido entre la gráfica de $f(x,y)$ (supuesta positiva en D), el plano XY y la superficie lateral (perpendicular al plano XY) de base D.

3. Cálculo de áreas de superficies en $\mathbb{R}^3$ dadas por $z = f(x,y)$ con x e y en una región D;

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy\,.$$

Generalización del concepto de integral de Riemann a tres variables: muy sencillo conceptualmente!. **Las correspondientes particiones definirían ahora cubos en $\mathbb{R}^3$** (recordemos que eran segmentos en una dimensión y rectángulos en dos dimensiones). De este modo,

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

se obtendrá sumando los valores ínfimos u supremos de la función pesados en los "cubos elementales" de la partición.

Importante: los teoremas de Fubini y del cambio de variable son aplicables, con la correspondiente extensión. Así, por ejemplo, para integrales en volumen, cuando se aplica cambio de variables hay que obtener la matriz Jacobiana, que en este caso será una matriz tres por tres.

Es habitual escribir las integrales en dos variables de la forma:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D f(x,y)dS\,,$$

y, de esta forma, escribir el teorema de cambio de variables como sigue:

$$\int\int_D f(x,y)dS = \int\int_{D'} f(u,v)dS\,,$$

donde D' es la región D escrita en las variables u, v, $f(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ y donde tenemos la regla de cálculo:

$$dS = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv\ .$$

Llamaremos a *dS* Elemento de Superficie, que se "escribe de distinto modo según las coordenadas que se elijan".

De igual forma, escribiremos:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int f(x,y,x)dV \ ,$$

de modo que si se realiza un cambio de variables, escribiríamos:

$$dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \ .$$

Llamaremos a dV Elemento de Volumen.

Ejercicio 1: Deducir los elementos de volumen es coordenadas cilíndricas y esféricas.

Solución:

1. Cilíndricas: $dV = rdrdzd\phi$.
2. Esféricas: $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$.

Ejercicio 2: Calcular, mediante integrales triples, el volumen de una esfera de radio R. Comentario: lógicamente, si D es la esfera, su volumen será $\int\int\int_D dV$.