Lectura 4
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil

Curso Académico 2011-2012

Motivación: las series de Fourier constituyen una importante herramienta para la obtención de soluciones de ecuaciones diferenciales. Su teoría básica concierne a la expresión de una función como una superposición de senos y cosenos.

Comencemos con una definición que ya conocemos ...

Función periódica: definición

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *periódica* de periodo T si satisface la relación

$$f(t+T) = f(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: *la función $f(t) = \sin(t)$ es (trivialmente) periódica de periodo 2π. A partir de esto es fácil comprobar que la función $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ es periódica de periodo T puesto que:*

$$\sin\left(\frac{2\pi(t+T)}{T}\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Más generalmente, si k es cualquier entero positivo, las funciones

$$\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \text{ y } \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

son también periódicas de periodo T.

Necesitamos también otra definición ..

Función *suave a trozos*: definición

Una función $f(t)$ periódica de periodo T se dice que es *suave a trozos* si es continua y tiene derivada continua $f'(t)$ excepto a lo sumo en un número finito de puntos de discontinuidad de tipo "salto finito".

Series de Fourier

Con estas definiciones previas, ya estamos en condiciones de establecer el siguiente resultado:

Serie de Fourier de una función $f(t)$

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T *suave a trozos*, se verifica que $f(t)$ puede expresarse como una combinación de senos y cosenos,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \ldots \\ &\quad + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

donde los coeficientes a_k's y b_k's son constantes. En esta expresión la igualdad quiere decir que la suma infinita del lado derecho converge a $f(t)$ en los puntos de continuidad de la función. Si la función es discontinua en t_0, su serie de Fourier convergerá al promedio de los límites laterales de $f(t)$ cuando $t \to t_0$.

Veamos cómo se calculan los coeficientes de la serie de Fourier:
Por simplicidad, restringiremos nuestra atención al caso en el que el periodo T es 2π, de modo que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + ... + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + ... \qquad (2)$$

Las fórmulas que se obtienen para un periodo T general son śolo ligeramente más complicadas y se basan exactamente en las mismas ideas.
El coeficiente a_0 es particularmente sencillo de evaluar. Integrando simplemente ambos lados de (2) de $-\pi$ a π:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos t\,dt + ... \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin t\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \sin 2t\,dt + ... \end{aligned}$$

Series de Fourier

Puesto que la integral de $\cos kt$ o $\sin kt$ en el intervalo $-\pi$ a π se anula, concluimos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Para obtener el resto de coeficientes de Fourier, necesitamos utilizar otras fórmulas integrales:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt = \begin{cases} \pi, & \text{para } m = n, \\ 0, & \text{para } m \neq n, \end{cases} \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\,dt = \begin{cases} \pi, & \text{para } m = n, \\ 0, & \text{para } m \neq n, \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt = 0. \tag{5}$$

Series de Fourier

Para obtener ahora las expresiones para los coeficientes de Fourier a_k, $k > 0$, multiplicamos ambos lados de (2) por $\cos kt$ e integramos desde $-\pi$ a π. De acuerdo con las anteriores expresiones integrales, sólo hay un término que sobrevive:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kt \cos kt \, dt = \pi a_k .$$

De este modo, obtenemos la siguiente expresión para a_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt.$$

y un argumento muy similar nos lleva a:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt.$$

Ejemplo: Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & \textbf{para } -\pi < t < 0, \\ \pi, & \textbf{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \textbf{para } t = 0, \pi, \end{cases}$$

para un periodo $T = 2\pi$.

Solución:

Trivialmente, $a_0 = 0$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos mt\,dt\right] + \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\cos mt\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{-\pi}{m}\sin mt\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{m}\sin mt\Big|_{0}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin mt\,dt\right] + \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\sin mt\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{m}\cos mt|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{-\pi}{m}\cos mt|_{0}^{\pi} = \frac{2}{m} - \frac{2}{m}\cos m\pi = \\
&= \frac{2}{m}\left(1-(-1)^m\right) = \begin{cases} \frac{4}{m}, & \textit{si m es impar,} \\ 0, & \textit{si m es par.} \end{cases}
\end{aligned}$$

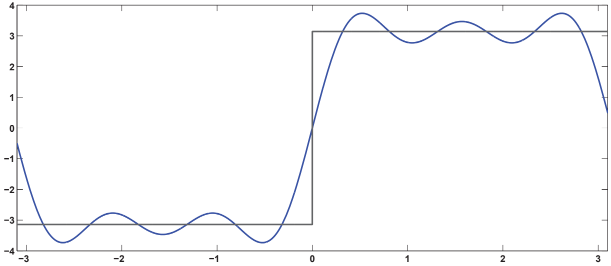
De modo que la serie de Fourier de f(t) es:

$$f(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t + \frac{4}{5}\sin 5t + ...$$

Los polinomios trigonométricos

$$\phi_1(t) = 4\sin t,\ \ \phi_2(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t,\ \ \phi_3(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t + \frac{4}{5}\sin 5t$$

son aproximaciones a $f(t)$ que son progresivamente mejores según va creciendo el número de términos.
En la figura se muestra la aproximación de $\phi_3(t)$ a $f(t)$.



Comentario: *Cerca de los puntos de discontinuidad de la función se hace evidente el denominado fenómeno de Gibbs.*

Series de Fourier seno y coseno

Veamos ahora que, bajo ciertas condiciones, una función $f(t)$ puede expresarse como superposición únicamente de funciones seno (coseno), lo que da origen a las denominadas series de Fourier seno (coseno).

Sea $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave a trozos **que se anula en** 0 **y en** L. Se verifica entonces que f puede expresarse como una superposición de funciones seno:

Serie de Fourier seno de $f(t)$

$$f(t) = b_1 \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \ldots + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \ldots$$

Los coeficientes b_n vendrán dados por:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right), dt.$$

La justificación de esta propiedad es sencilla haciendo uso de las correspondientes propiedades de las funciones pares e impares: evidentemente $f(t)$ puede "extenderse" a una función impar $\tilde{f} : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiendo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in [0, L], \\ -f(-t), & \text{si } t \in [-L, 0], \end{cases}$$

y a partir de aquí puede ampliarse esta extensión a una función periódica de periodo $2L$ exigiendo que:

$$\tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esta función periódica **pertenece al subespacio lineal de las funciones impares**. Por lo visto en la sección anterior, $\tilde{f}$ posee una expansión en series de Fourier y dado que $\tilde{f}$ es impar, **todos los coeficientes a_n de su expansión (los que van con las funciones coseno) son cero**.

Series de Fourier seno y coseno

En el intervalo $[0, L]$, $\tilde{f}(t)$ se restringe a la función $f(t)$ y la expansión en series de Fourier de $\tilde{f}$ se restringe a una expansión de f en términos exclusivamente de funciones seno. Llamaremos entonces a esta expansión la **serie de Fourier seno de** $f(t)$.

Un argumento similar (pero ahora relacionado con las funciones pares!) puede utilizarse para expresar una función suave a trozos $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ como una **superposición de funciones coseno**,

Serie de Fourier coseno de $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + ... + a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + ...$$

Los coeficientes a_n vendrán dados por:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), dt.$$

Series de Fourier seno y coseno

Ejercicio: **Determinar las series de Fourier seno y coseno de la función**

$$f(t) = \begin{cases} t, & \textbf{para } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ \pi - t, & \textbf{para } \pi/2 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Series de Fourier: versión compleja

La expresión que hemos visto anteriormente de la serie de Fourier de una función, se dice que es la *forma real* **de la serie. Sin embargo, a veces resulta bastante más cómodo trabajar con la** *forma compleja* **de la serie. La obtención de esta forma supone, esencialmente, hacer uso de la** *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Series de Fourier: versión compleja

La fórmula de Euler nos permite obtener las siguientes relaciones:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

de modo que la expansión en series de Fourier de una función $f(t)$ periódica, de periodo 2π, puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} f(t) \quad = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1 \frac{(e^{it} + e^{-it})}{2} + a_2 \frac{(e^{i2t} + e^{-i2t})}{2} + \ldots + \\ & + b_1 \frac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} + b_2 \frac{(e^{i2t} - e^{-i2t})}{2i} + \ldots \end{aligned}$$

Agrupando términos, llegamos a:

Series de Fourier: versión compleja

Forma compleja de la serie de Fourier

$$f(t) = \ldots + c_{-2}e^{-2it} + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \ldots$$

La relación de los coeficientes a_k y b_k ($k \neq 0$) con los coeficientes c_k que aparecen en esta expresión es

$$a_k = c_k + c_{-k}, \; b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Y el cálculo directo de estos coeficientes se hace a través de:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Ejemplo: Obtener los coeficientes complejos de la serie de Fourier de

$$f(t) = t, \;\; -\pi < t \leq \pi,$$

extendida para ser periódica de periodo 2π. A partir de los coeficientes complejos, obtener los coeficientes de la forma real de la serie de Fourier.

Tendremos que

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\, dt.$$

Haciendo uso de integración por partes,

Series de Fourier: versión compleja

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\left[(it/k)e^{-ikt}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(i/k)e^{-ikt}\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi i}{k}e^{-i\pi k} - \frac{-\pi i}{k}e^{i\pi k}\right] = \\ &= i\frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \;\; b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Comentario: Este ejemplo ilustra como en un buen número de ocasiones trabajar con la forma compleja de la serie de Fourier es bastante menos “complejo” que trabajar con la forma real (valga la paradoja).