Lectura 5
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil

Curso Académico 2011-2012

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Motivación: Existen infinidad de problemas en Ciencia e Ingeniería que pueden ser expresados (*modelizados*) en términos de ecuaciones diferenciales. En ocasiones (pocas, desgraciadamente) las ecuaciones diferenciales que debemos resolver son relativamente simples y podremos encontrar soluciones exactas al problema con más o menos dificultad recurriendo a métodos analíticos. En otras ocasiones, deberemos recurrir a esquemas numéricos para determinar soluciones aproximadas. En este bloque temático introduciremos métodos analíticos y numéricos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales denominadas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Pero antes, un primer ejemplo ...

Ejemplo: Un análisis de un lago contaminado revela la presencia de una bacteria que se encuentra con una concentración de A partículas/m^3. La concentración de la bacteria se reducirá conforme entre agua fresca al lago. Un estudio de ingeniería medioambiental ha determinado que, asumiendo una entrada continua de agua fresca en el lago, la concentración C de la bacteria como funcitión del tiempo (expresado en semanas), puede modelizarse del siguiente modo:

$$\frac{dC}{dt} = \lambda C, \quad C(0) = A,$$

siendo λ una constante real.

Nos podemos preguntar:

1. ¿Es razonable el modelo establecido?. ¿Sería aceptable cualquier valor de λ?.
2. Asumiendo un valor de $\lambda = -0.06$?: ¿en cuántas semanas se reducirá a la mitad la concentración de la bacteria?; ¿cuál será la concentración de la bacteria al cabo de 7 semanas?.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Empecemos ya con conceptos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias ...

Ecuación diferencial ordinaria: definición

Una ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones diferenciales) se dice que es ordinaria cuando la función (o funciones) depende de una sola variable. Es decir, que una ecuación diferencial ordinaria (abreviando: EDO) tiene la forma genérica: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Por contra, cuando las funciones incógnita dependan de varias variables y aparezcan derivadas parciales diremos que se trata de una **ecuación en derivadas parciales**.

Solución de una ecuación diferencial

Dada una ecuación diferencial, se dice que una función es solución de la ecuación si al sustituirla en la ecuación, ésta se verifica, es decir, da lugar a una identidad en la variable independiente de la ecuación.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo: $C(t) = Ae^{-\lambda t}$ siendo, A una constante, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C \ \text{(nos ha aparecido en el primer ejemplo!)}$$

pues $\frac{d}{dt}C(t) = -\lambda Ae^{-\lambda t} = -\lambda C(t)$. Es más, sea cual sea el valor de A, $C(t)$ es solución y se dice que $C(t)$ es la **solución general** de la ecuación diferencial, pues cualquier solución de la ecuación necesariamente tiene esta forma. Por contra, $\bar{C}(t) = e^{-\lambda t}$, también es solución de la ecuación diferencial, pero es una **solución particular** de la misma.

Más definiciones ...

Orden de una ecuación diferencial

Se denomina orden de una ecuación diferencial al máximo grado de derivación de la función incógnita.

Linealidad

Una ecuación diferencial se dice que es lineal cuando es lineal en las funciones incógnita y en sus derivadas (no hay productos entre derivadas ni entre derivadas y la función).

La ecuacion del ejemplo anterior es lineal. Por contra, una ecuación como $(y')^2 - 2y' + 4y = 4x - 1$, no es lineal.

Abordemos ya algunos *métodos básicos de integración* (utilizaremos, en ocasiones, esta terminología) de EDOs. Estructuraremos el estudio de estos métodos del siguiente modo:

- **Métodos analíticos y numéricos para ecuaciones de primer orden ($y' = f(x, y)$):**
  1. EDOs de variables separadas.
  2. EDOs reducibles a ecuaciones de variables separadas.
  3. EDOs exactas y transformables en exactas.
  4. EDOs lineales y reducibles a lineales.
  5. Métodos numéricos: método explícito de Euler, trapezoidal y esquemas de Runge-Kutta.
- **Métodos analíticos y numéricos para EDOs lineales de orden superior.**

Comenzaremos entonces estudiando métodos para ecuaciones de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

.

1. Ecuaciones de variables separables (o separadas)

Las ecuaciones de variables separables son las del tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \ ,$$

que también se escriben (siempre que $f_2 \neq 0$), $f_2(y)dy = f_1(x)dx$.

Integrando:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C$$

y la solución general es entonces:

$$F_2(y) = F_1(x) + C \ ,$$

siendo F_1 y F_2 primitivas de f_1 y f_2 respectivamente.
También son ecuaciones de variables separables las ecuaciones del tipo

$$\phi_1(x)\psi_1(y)dx = \phi_2(x)\psi_2(y)dy$$

pues, dividiendo por $\psi_1(y)\phi_2(x)$ tenemos

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy \ ,$$

aunque la división podría eliminar soluciones que hacen que $\psi_1(y)\phi_2(x) = 0$; por otra parte, si ψ_1 o ϕ_2 son discontinuas pueden aparecer soluciones supérfluas que hagan que

$$\frac{1}{\psi_1(y)\phi_2(x)} = 0$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y' = y/x$.
Solución:
Reescribimos la ecuación como $dy = \frac{y}{x}dx$. *Si* $y \neq 0$ *(que es una solución!) podemos escribir:*

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

e integrando

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$$

donde $C > 0$ *(hemos excluido la solución* $y = 0$*). De manera que*

$$|y| = C|x| \ , C > 0.$$

Y como $y = 0$ *también es solución podemos tomar* $C \geq 0$. *Si buscamos soluciones suaves, podemos escribir:* $y = Cx \ , \ C \in \mathbb{R}$. *Siendo estrictos, esta solución es la de la ecuación diferencial de partida para* $x \neq 0$, *puesto que para* $x = 0$ *la ecuación no tiene sentido.*

2. Ecuaciones reducibles a ecuaciones de variables separadas

Estudiaremos **ecuaciones que son reducibles a ecuaciones en variables separadas mediante un cambio de variable.** En particular, consideraremos:

- 2.a) **Ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by)$.**
- 2.b) **Ecuaciones homogéneas.**

2.a) Las ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by)$ **se convierten en ecuaciones de variable separadas mediante el cambio de función** $z = ax + by$. Tenemos que

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

y cuando $a + bf(z) \neq 0$ podemos escribir:

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx \rightarrow x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la solución general de la ecuación diferencial.

Ejercicio: Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$.

2.b) La resolución de EDOs homogéneas precisa, en primer lugar, de una definición:

Función homogénea de grado n

Se dice que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n en sus argumentos si se cumple la identidad

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para cualesquiera t, x, y.

Por ejemplo: $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy^2$, es una función homogénea de grado 3; $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ es una función homogénea de grado 0.

De manera que definimos:

EDO homogénea

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ se dice que es homogénea si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero.

Para este tipo de EDOs se puede demostrar que $f(x, y)$ se puede escribir como función de y/x, con lo cual:

$$y' = \phi(y/x)$$

Haciendo el cambio $y/x = u$, tenemos que $y' = u + xu'$, con lo que

$$x\frac{du}{dx} = \phi(u) - u$$

que es una **ecuación de variables separadas**.

Si la EDO viene expresada en la forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ ,$$

la ecuación será homogénea cuando P y Q sean funciones homogéneas del mismo grado.
Ejemplo: Resolver la ecuación

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

Solución:
Podemos ver que $x = 0$ no puede ser solución, de manera que podemos escribir

$$y' = \sqrt{1 - (y/x)^2} + y/x \ ,$$

que es una ecuación homogénea. Consideramos el cambio $u = y/x$ con lo cual:

$$x\frac{du}{dx} + u = \sqrt{1-u^2} + u \rightarrow x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}$$

Vemos que $u^2 = 1$*, es solución de la ecuación diferencial. Estas soluciones se pierden al dividir por la raíz, lo cual debemos tener en cuenta. Escribimos:*

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x} \ ,$$

e integrando

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln|C| \ , C \neq 0 \ \to u = \sin\left(\ln|Cx|\right).$$

Es decir que **las soluciones de la ecuación diferencial son:**

$$y = x \sin\left(\ln(Cx)\right) \quad Cx > 0$$

junto con las dos soluciones singulares $y = \pm x$.

3. Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas

Considerando una familia de curvas $\phi(x, y) = C = \phi(x_0, y_0)$ podemos encontrar una ecuación diferencial que dé como solución general esta familia de curvas. Para ello diferenciamos, de modo que:

$$0 = D\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

Consideremos la situación inversa: partimos de una ecuación diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x.y)dy = 0$$

y **queremos ver si existe alguna función** $\phi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y) \ , \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

en cuyo caso la ecuación diferencial se podría escribir

$$D\phi = 0$$

con solución $\phi(x, y) = C$.

Cuando esto sea así se dirá que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ **es una diferencial exacta y se dirá que la ecuación diferencial es exacta.**

EDO exacta: Condición necesaria y suficiente

Sea $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$ (en un dominio simplemente conexo), entonces $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si y sólo si $P_y = Q_x$.

La solución de la ecuación diferencial sería $\phi(x,y) = C$, pues ϕ **es la función potencial del campo vectorial** $\boldsymbol{F} = (P,Q)$. Entonces, identificando $F^x = P$, $F^y = Q$ (ver Lectura 3!), tenemos que:

$$\phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\bar{x},y)d\bar{x} + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\bar{y})d\bar{y} + \phi(x_0,y_0).$$

Ejercicio: **Integrar la ecuación**
$(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} - \sin y)dy = 0.$

3.a Búsqueda de factor integrante

Si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ no es una ecuación exacta hay ocasiones en las que se puede encontrar un factor $\mu(x,y)$ de manera que

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta. $\mu(x,y)$ recibe el nombre de *factor integrante de la EDO*.

De hecho, **cuando la ecuación diferencial tiene una solución general $\phi(x,y) = C$ es seguro que existe factor integrante (una cosa bien distinta es saber obtenerlo!)**:

Sea $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, $P, Q \in \mathcal{C}^1$ una ecuación con solución general $\phi(x,y) = C$. Entonces, la ecuación diferencial admite factor integrante.

No existen métodos generales de búsqueda de factor integrante. En algunos casos, se puede encontrar por inspección. En otros seremos capaces de encontrar el factor integrante suponiendo una determinada dependencia funcional de éste. En cualquier caso, **no hay garantía de encontrar el factor integrante mediante ningún método concreto.**

Veamos las **condiciones que debe cumplir el factor integrante**: si $Pdx + Qdy = 0$ admite como factor integrante $\mu(x, y)$, querrá decir que $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ es exacta, con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \rightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

es decir, que

$$Q\mu_x - P\mu_y = \mu(P_y - Q_x) \ .$$

De manera que tenemos una ecuación en derivadas parciales para μ y todo se complica: **necesitamos resolver una ecuación en derivadas parciales para resolver una EDO!**.

Restrinjamos nuestra búsqueda a factores μ con una dependencia conocida respecto a una variable $s = g(x, y)$, con g de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces

$$\mu_x = \dot{\mu} s_x \ , \ \mu_y = \dot{\mu} s_y$$

donde el punto denota derivada respecto a s. Tenemos entonces que $\dot{\mu}(s_x Q - s_y P) = \mu(P_y - Q_x)$, es decir, que:

$$h(s) = \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{P_y - Q_x}{s_y P - s_x Q}$$

En resumen, **para que la ecuación diferencial $Pdx + Qdy = 0$ admita un factor integrante en función de s, se deberá cumplir que**

$$h(s) = -\frac{P_y - Q_x}{s_y P - s_x Q}$$

es decir, **que se puede escribir este cociente como función de s exclusivamente**. En ese caso, el factor integrante se puede tomar

$$\mu = \exp\left(-\int h(s)ds\right) .$$

Ejercicio: Resolver la EDO $(4x + 3y^3)dx + 3xy^2dy = 0$ **asumiendo la existencia de un factor integrante** $s = x$**.**

4. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0,$$

donde supondremos que los coeficientes son continuos. Si $a(x) \neq 0$ podremos escribir:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Veamos cómo se puede dar una expresión explícita general, en términos de integrales, de una ecuación de este tipo:

Para empezar, busquemos la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

llamada **ecuación homogénea**. **Esta ecuación es de variables separadas**, que podemos integrar fácilmente. Llegamos así a la solución general

$$y = C \exp\left(-\int P(x)dx\right).$$

Para hallar **una solución general de la ecuación completa (llamada inhomogénea si $Q(x) \neq 0$)**, aplicamos el **método de variación de constantes** (que explicaremos en la siguiente lectura), haciendo que la constante C pase a ser una función de x. Buscamos entonces una solución de la forma

$$y(x) = v(x) \exp\left(-\int P(x)dx\right) \equiv v(x)u(x)$$

siendo u, como sabemos, solución de la ecuación homogénea.

Llevando $y = vu$ a la ecuación diferencial llegamos a:

$$v(u' + Pu) + v'u = Q$$

y como u es solución de la homogénea el primer término se cancela, con lo cual

$$v' = \frac{1}{u} Q = Q \exp\left(\int P dx \right)$$

e integrando: $v = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} + C$.
Y como $y = uv$, tenemos que la solución general buscada es:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} \right].$$

Lógicamente **el punto crucial para poder determinar una solución analítica de la EDO lineal de primer orden será poder integrar de manera exacta las funciones implicadas ...**
Ejercicio: Resolver la EDO $xy' - 3y = x^4$.

4.a) EDOs reducibles a EDOs lineales

Vamos a considerar **dos tipos de ecuaciones que son reducibles a ecuaciones lineales** de primer orden y que aparecen vinculadas a determinados problemas en Física e Ingeniería:

- **Ecuación de Bernouilli.**
- **Ecuación de Ricatti.**

Las **ecuaciones de Bernouilli** son aquellas de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0.$$

Los casos $n = 0$, 1 corresponden a ecuaciones lineales de primer orden. Ambos casos sabemos resolverlos. Supongamos pues que $n \neq 0, 1$. Dividiendo por y^n (perdiendo la solución trivial $y = 0$), tenemos que:

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0,$$

y haciendo el cambio $u = 1/y^{n-1}$, tenemos:

$$\frac{1}{1-n}u' + a(x)u + b(x) = 0.$$

De manera que con este cambio llegamos a una ecuación lineal de primer orden:

$$u' + (1-n)a(x)u = -(1-n)b(x).$$

Ejercicio: Integrar la ecuación $xy' + y + x^2y^3 = 0$.

Las **ecuaciones de Ricatti** son aquellas de la forma

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$$

No existen métodos generales para este tipo de ecuaciones. Sin embargo, cuando se conoce una solución particular, la ecuación se puede reducir a una de Bernouilli, que si sabemos integrar.

Supongamos pues que conocemos una solución particular de la ecuación, y_1. Escribiendo $y = y_1 + u$ y llevándolo a la ecuación diferencial:

$$y_1' + u' + a(x)(y_1^2 + 2y_1 u + u^2) + b(x)(y_1 + u) + c(x) = 0$$

y teniendo en cuenta que

$$y_1' + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) = 0$$

llegamos a

$$u' + a(x)u^2 + (2a(x)y_1 + b(x))u = 0$$

que, efectivamente, es una ecuación de Bernoulli, que **será reducible a una EDO lineal de primer orden en la variable $z = 1/u$.**

Podríamos pues reducir directamente la ecuación de Ricatti a una lineal mediante el cambio de función $y = y_1 + \frac{1}{z}$, quedándonos una EDO lineal de primer orden en z.

Ejercicio: Integrar la ecuación $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$ sabiendo que una solución particular es $y_1(x) = x$.

Los métodos considerados anteriormente nos permiten obtener soluciones exactas de EDOs de primer orden en determinados casos. **Sin embargo, en muchas ocasiones nos encontraremos con ecuaciones (incluso sin ir más allá de primer orden) que no podremos resolver analíticamente.** Tendremos entonces que recurrir a **métodos numéricos** para obtener **soluciones aproximadas de la ecuación diferencial**.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Métodos numéricos

Vamos a ocuparnos ahora, por tanto, de la resolución numérica del *problema de valores iniciales* (volveremos a esta denominación en la siguiente lectura) vinculado a una EDO de primer orden:

$$\left.\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)), \;\; a \leq t \leq b \\ y(a) & = & \eta. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Comentarios:

1. **Cuando trabajamos con esquemas numéricos, buscamos una solución particular de la ecuación**, no la general.
2. Lógicamente **nos ocuparemos sólo de aquellos problemas con solución única.**

Un concepto esencial previo al estudio de los métodos numéricos espec’ıficos es el de **discretización**:

Partición

Consideremos el intervalo continuo $[a, b]$. Diremos que un conjunto discreto de $N + 1$ puntos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$$

constituye una partición de $N + 1$ puntos del intervalo continuo $[a, b]$.

Los parámetros

$$h_n = t_{n+1} - t_n\,, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \tag{2}$$

reciben el nombre de **tamaños de paso**. A menudo nos interesará utilizar **particiones igualmente espaciadas** donde

$$h_n = h = \frac{(b - a)}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Vamos a denotar por y_n la aproximación numérica de la solución exacta $y(t_n)$.

Una *solución numérica* de la EDO problema consiste en un conjunto discreto de aproximaciones $\{y_n\}_{n=0}^{N}$. Un *método numérico* es una ecuación de diferencias que involucra un determinado numéro de aproximaciones consecutivas

$$y_j, \quad j = 0, 1, ..., k$$

a partir de las cuales se calcula la secuencia de valores aproximados

$$y_{k+n}, \quad n = 1, 2, ..., N$$

Método de Euler explícito

La obtención de una serie determinada de métodos numéricos comienza con la integración de la ODE dada en la ecuación (1) entre t_n y t_{n+1}. Si hacemos esto obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt}\, dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)\, dt \\ \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)\, dt. \end{aligned}$$

Si consideramos ahora la aproximación

$$f(t,y) \approx f(t_n, y(t_n)), \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

entonces

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_n, y(t_n))\, dt = (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n)).$$

De modo que $y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n))$.

Lo que sugiere el siguiente método numérico

Método de Euler explícito

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

Démonos cuenta de que a partir de la condición inicial $y_0 = \eta$ podemos calcular explícitamente y_1 aplicando la ecuación anterior. Esto a su vez nos permite obtener y_2 y así sucesivamente.
Desde un punto de vista geométrico, **el método de Euler se obtiene reemplazando la solución exacta que pasa por (t_n, y_n) por la recta que pasa por este punto y es tangente a la curva solución**. Es decir, que **la trayectoria integral se aproxima por una quebrada**.
Esto es lo mismo que decir que se aproxima la derivada mediante $y'(t_n) \approx \dfrac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$ (esto es una diferencia finita *forward*!).

No todos los métodos numéricos convergerán a la solución buscada ni serán igualmente *eficientes* para resolver un determinado problema. Para que el método numérico se útil, le exigiremos que sea **convergente**. Por otra parte, una medida de la eficiencia de un método numérico la proporciona el **Orden de convergencia del método**:

Se dice que **un método numérico es convergente** si para todo problema (1) con solución suficientemente regular se cumple que

$$\lim_{h\to 0}\left(\max_{1\leq n\leq N}||y_n - y(t_n)||\right) = 0.$$

siendo $y_0 = y(t_0)$.
Se dice que el orden de convergencia es p, siendo $y_0 = y(t_0)$, si al hacerse h pequeño (es decir, N suficientemente grande), si

$$\left(\max_{1\leq n\leq N}||y_n - y(t_n)||\right) = \mathcal{O}(h^p)\,,\;\; Nh = \text{constante}$$

Se verifica que ...

El método de Euler explícito es **convergente** y su **orden de convergencia es 1**.

Método trapezoidal

Recordando que el método de Euler supone reemplazar $f(t, y(t))$ en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ por la tangente a la "trayectoria" en $f(t_n, y_n)$, o, lo que es lo mismo, aproximar $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \approx (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y(t_n))$, parece lógico que podamos obtener una aproximación mejorada si en su lugar aplicamos la regla trapezoidal para evaluar esta integral. De esta forma:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx (t_{n+1} - t_n)\frac{1}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right) .$$

lo que sugiere el siguiente método numérico:

Método trapezoidal

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(t_{n+1} - t_n)}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) .$$

Se verifica que ...

El método trapezoidal es **convergente** y su **orden de convergencia es 2**.

Entonces, dado que converge más rápido que éste, ¿por qué no utilizar siempre el método trapezoidal en lugar del método de Euler?: **porque el método trapezoidal es** ***implícito*****, es decir, tenemos que resolver una ecuación no lineal (en general) en cada paso del método!.** En la práctica, deberemos meditar si tener un mejor orden de convergencia compensa el *coste computacional* de resolver una ecuación no lineal ...

Métodos de Runge-Kutta

Este tipo de métodos (también de *un paso*, como los dos anteriores) son muy populares y de los más utilizados en la práctica.

La forma general de los métodos de Runge Kutta es:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \,,$$

donde

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \,, \quad i = 1, 2, ..., s.$$

siendo s el *número de etapas del método* y b_i, c_i y a_{ij} coeficientes específicos de cada método. Los **métodos explícitos** verifican que $a_{ij} = 0$ si $j \geq i$.

La idea básica de los métodos de Runge-Kutta es aumentar el orden de convergencia de los métodos evaluando la función $f(t, y)$ (la que aparece vinculada a la EDO problema: $y' = f(t, y)$) en varios puntos por cada paso de integración.

Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right) \\
y_{n+1} &= y_n + h k_2
\end{aligned}
$$

es el *método del punto medio explícito* o *método de Euler mejorado*. **Su orden de convergencia es 2** (démonos cuenta de que iguala al método trapezoidal aunque con la ventaja sobre éste último de ser un método explícito).

Los métodos de Runge-Kutta más utilizados en la práctica son los métodos explícitos de cuarto orden, por la existencia de una especie de *condición de optimalidad* entre el número de etapas y el orden de convergencia de los métodos.
De hecho, el método de Runge-Kutta más popular es el siguiente método de 4 etapas, que en cierta forma es análogo a la regla de Simposon en cuadratura numérica:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right), \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2\right), \\
k_4 &= f\left(t_{n+1}, y_n + k_3\right), \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).
\end{aligned}$$

Comentario: La eficacia de los métodos de Runge-Kutta mejora cuando se combinan **pares de métodos de Runge-Kutta** (denominados *pares encajados*) para poder estimar la precisión del método y, de este modo, poder adaptar el paso de integración. Un ejemplo es la rutina **ode45** de MATLAB.