Lectura 8
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil

Curso Académico 2011-2012

Para introducir los métodos de elementos finitos, el punto de partida natural es un problema unidimensional.
Consideraremos, como prototipo, el siguiente problema de contorno

$$-\frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \tag{1}$$

con $u(0) = 0$ y $u'(1) = 0$.
El **método de elementos finitos** para la ecuación (1) consta de dos etapas esenciales:

1. Considerar funciones $v(x)$ que llevarán a la **forma débil** de la ecuación.
2. Introducir funciones de prueba $\phi(x)$ que llevarán a las **ecuaciones de elementos finitos**: $KU = F$.

La ecuación (1) se denomina la **forma fuerte** de la ecuación diferencial. **Los elementos finitos se basan en la "forma débil" considerando funciones** $v(x)$:

Forma débil

$$\int_0^1 c(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \tag{2}$$

para todo $v(x)$.

Esta forma integrada se obtiene al multiplicar ambos lados de la forma fuerte por $v(x)$. Integrando el lado izquierdo por partes:

$$\int_0^1 -\frac{d}{dx}\left(c\frac{du}{dx}\right)v(x)\,dx = \int_0^1 c(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx - \left[c(x)\frac{du}{dx}v(x)\right]_{x=0}^{x=1}$$

En nuestro ejemplo, el punto final $x = 1$ tiene como condición $u'(1) = 0$. En el extremo $x = 0$ (donde tenemos una condición Dirichlet, $u(0) = 0$) exigiremos que $v(0) = 0$. Esta *condición de admisibilidad sobre* $v(x)$ nos permite eliminar el término integrado. **(Comentario: si en $x = 1$ el problema tuviera también una condición Dirichlet, las condiciones de admisibilidad serían entonces $v(0) = v(1) = 0$).** De este modo obtenemos la forma débil (2).

El método de Galerkin supone discretizar la forma débil:

Combinación de funciones de prueba

Escojamos n funciones de prueba $\phi_1(x), ..., \phi_n(x)$. Buscaremos una solución $U(x)$ expresable como combinación de estas funciones ϕ's:

$$U(x) = U_1\phi_1(x) + U_2\phi_2(x) + ... + U_n\phi_n(x). \tag{3}$$

Para discretizar $v(x)$, escogeremos n funciones admisibles $V_1(x), V_2(x), ..., V_n(x)$. **De forma habitual escogeremos éstas coincidentes con las ϕ's.**

Comentario. Démonos cuenta que la forma débil del problema supone "relajar" (de ahí la denominación de *débil*) las exigencias de derivabilidad de la función solución y, como consecuencia, ampliar el espacio funcional de búsqueda de ésta. Como vemos, en la formulación débil del problema ya no aparecen derivadas segundas. **El espacio ya no tiene por qué ser entonces, en nuestro ejemplo, de funciones $\mathcal{C}^2(0,1)$ (como en la formulación fuerte) sino que podemos considerar un espacio menos restringido: el de las funciones de cuadrado integrables, con derivada primera también de cuadrado integrable y satisfaciendo las condición Dirichlet del problema.**

Sustituyendo $U(x)$ por $u(x)$ en la forma débil (2), cada función $V_i(x)$ proporciona una ecuación involucrando $U_1, \ldots, U_n$:

Ecuación i para $U_1, \ldots, U_n$

$$\int_0^1 c(x) \left(\sum_{j=1}^{n} U_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) \frac{dV_i}{dx}\, dx = \int_0^1 f(x) V_i(x)\, dx, \tag{4}$$

Estas n ecuaciones pueden escribirse como $\sum_{j=1}^{n} K_{ij} U_j = F_i$. Las n componentes de F son las integrales del lado derecho de (4):

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{dV_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx}\, dx, \;\; F_i = \int_0^1 f(x) V_i(x)\, dx \tag{5}$$

La matriz K se denomina la matriz de rigidez y el vector F recibe el nombre de vector de carga.

Cuando las funciones V_i son las mismas que las funciones de prueba ϕ_i, la matriz de rigidez K es simétrica.

Resumen del método de elementos finitos (FEM):

1. Escoger las funciones ϕ_j y V_i; una incógnita por cada ϕ, una ecuación por cada V.
2. Calcular las integrales involucradas de forma exacta o numéricamente (5).
3. La forma débil se traduce en el sistema lineal $KU = F$. La solución que se obtiene de la aproximación de elementos finitos será: $U = \sum U_j \phi_j(x)$.

Elementos Finitos Lineales:
Consideremos una partición del intervalo $[0, l]$ dada por

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = l,$$

En general, escogeremos las funciones base ϕ_i definidas como:

$$\phi_0 = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\ , \ x_0 \leq x \leq x_1$$

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ & \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{cases} \qquad j = 1, ..., n-1 \tag{6}$$

$$\phi_n = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\ , \ x_{n-1} \leq x \leq x_n\ ,$$

Estas funciones reciben el nombre de *funciones sombrero* (por motivos obvios).

Para nuestros ejemplos escojamos 4 nodos ($x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, $x_3 = 1$) y las funciones

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\[2ex] \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{cases} \qquad j = 1, 2$$

y

$$\phi_3 = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\,,\;\; x_{n-1} \leq x \leq x_n\,,$$

Elegiremos éstas también como las funciones V_1, V_2 y V_3. Démonos cuenta que estas funciones son *locales*. No hay solapamiento entre las funciones ϕ_1 y la (medio sombrero) ϕ_3, lo que hace que la integral: $K_{13} = K_{31} = 0$. Nuestra matriz de rigidez K será entonces *tridiagonal* (lo que está muy bien desde una perspectiva computacional).

Aplicaremos estos elementos lineales a dos ejemplos:

1. $-u'' = 1$; en este caso $c(x) = 1$ y $f(x) = 1$.
2. Cualesquiera funciones (aceptables) $c(x)$ y $f(x)$, utilizando integración numérica para K y F.

EJEMPLO 1. La solución general de $-u'' = 1$ es $u(x) = A + Bx - \frac{1}{2}x^2$. Los valores de A y B quedan determinadas por las condiciones de contorno $u(0) = 0$ ($A = 0$) y $u'(1) = 0$ ($B = 1$). Entonces $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$. La solución de elementos finitos $U(x)$ (lineal a trozos) aproximará entonces a esta parábola.
Para calcular U_1, U_2, U_3 necesitamos el vector F y la matriz K con $f(x) = c(x) = 1$. Recordemos que estamos tomando las funciones V_1, V_2, V_3 como las mismas que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y $h = 1/3$.

EJEMPLO 1 (cont).

$$F_1 = \int_0^1 V_1\,dx = \frac{1}{3},\ F_2 = \int_0^1 V_2\,dx = \frac{1}{3},\ F_3 = \int_0^1 V_3\,dx = \frac{1}{6},\ \textbf{(la mitad)}.$$

Con $c(x) = 1$, la matriz de rigidez es $K_{ij} = \displaystyle\int_0^1 V_i'\phi_j'\,dx$. Las derivadas que aparecen involucradas son constantes:

$$K_{11} = \int_0^1 \left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2 dx = \int_0^{2/3} 9\,dx = 6,\ K_{22} = 6,\ K_{33} = 3$$

$$K_{12} = \int_{1/3}^{2/3} (3)(-3)\,dx = -3,\ K_{23} = -3,\ K_{13} = 0\ \textbf{(no hay solapamiento)}.$$

EJEMPLO 1 (cont).
Ahora el problema de elementos finitos $KU = F$ se resuelve para la discretización escogida de tres términos para U:

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 2h\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

proporciona

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 \\ 4/9 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Los valores U_1, U_2, U_3 concuerdan exactamente con $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ en los puntos de la partición.
La solución de elementos finitos $U(x)$, que aproxima la parábola solución $u(x)$, será entonces

$$U(x) = \frac{5}{18}\phi_1(x) + \frac{4}{9}\phi_2(x) + \frac{1}{2}\phi_3(x).$$

EJERCICIO. Utilizar el método de elementos finitos para resolver el problema

$$\begin{cases} -u'' = 2, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Utilizar 3 funciones "sombrero" completas $\phi_i,\ i = 1, 2, 3$, con $h = 1/4$.

EJEMPLO 2. Cualesquiera $c(x)$ y $f(x)$ aceptables, utilizando integración numérica para K y F

Para las integrales $F_i = \displaystyle\int f(x)V_i(x)\,dx$ y $K_{ij} = \displaystyle\int c(x)\phi_i' V_j'\,dx$ consideramos ahora **integración numérica**. En particular, podríamos utilizar los puntos medios $\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}$ (donde $V_i = \frac{1}{2}$ en todos los casos) para aproximar las integrales sobre los tres subintervalos implicados:

$$\int_0^{1/3} f(x)V_1(x)\,dx \approx \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2}, \quad \int_{1/3}^{2/3} f(x)V_1(x)\,dx \approx \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{6}\right)\frac{1}{2},$$
$$\int_{1/3}^{2/3} f(x)V_2(x)\,dx \approx \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{6}\right)\frac{1}{2}, \quad \int_{2/3}^{1} f(x)V_2(x)\,dx \approx \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{2},$$
$$\int_{2/3}^{1} f(x)V_3(x)\,dx \approx \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{2}.$$

Las integrales de V_1 se suman para F_1. Las dos siguientes se suman para F_2. La última es F_3.

EJEMPLO 2 (cont). De forma similar, K_{11} es la suma de dos contribuciones (de dos intervalos):

$$\int_0^{1/3} c(x)\phi_1'(x)V_1'(x)\,dx \approx \frac{1}{3}c\left(\frac{1}{6}\right)9$$

más

$$\int_{1/3}^{2/3} c(x)\phi_1' V_1'(x)dx \approx \frac{1}{3}c\left(\frac{3}{6}\right)9.$$

Pasemos ahora a estudiar problemas donde la complejidad del análisis aumenta considerablemente: los problemas descritos mediante *Ecuaciones en Derivadas Parciales* **...**

Una **ecuación en derivadas parciales** (EDP) es, como su nombre indica, una ecuación diferencial donde aparecen derivadas parciales. Por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Muchas de las leyes fundamentales en Física e Ingeniería se expresan a través de EDPs: las *ecuaciones de Navier-Stokes* (en Mecánica de Fluidos) o las *ecuaciones de Maxwell* (en Electromagnetismo), son sólo un par de ejemplos.
En nuestro análisis nos restringiremos a **EDPs de segundo orden**, dado que éstas son las que aparecen en la gran mayoría de problemas.

Las **ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden con 2 variables independientes**, que escribimos como

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

se clasifican de manera estándar (atendiendo al signo del discriminante $b^2 - 4ac$) como:

$$\begin{cases} < 0 & \Rightarrow \quad \textbf{Elípticas} \\ = 0 & \Rightarrow \quad \textbf{Parabólicas} \\ > 0 & \Rightarrow \quad \textbf{Hiperbólicas} \end{cases}$$

Los ejemplos canónicos son:

EDPs de segundo orden: ejemplos prototipo

- **Ecuación del calor** $u_t = c^2 u_{xx}$ (problema **parabólico**).
- **Ecuación de ondas** $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (problema **hiperbólico**).
- **Ecuación de Poisson** $u_{xx} + u_{yy} = g$ (problema **elíptico**).

En los casos parabólico e hiperbólico utilizamos t en lugar de y puesto que estos casos describen, típicamente, problemas dependientes del tiempo. Estas ecuaciones pueden extenderse a más dimensiones espaciales.

Analicemos, en primer lugar, el uso de series de Fourier para determinar la solución del *problema de valor inicial* para la **ecuación del calor en una dimensión espacial** bajo determinadas condiciones de contorno y veremos cómo proceder de forma análoga para la **ecuación de ondas también en una dimensión espacial** ...

Buscamos la solución $u(x,t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

siendo c una constante. $u(x,t)$ satisface **la condición inicial** $u(x,0) = h(x)$ y está sometida a **las condiciones de contorno:** $u(0,t) = u(L,t) = 0$; es decir, la "temperatura" es cero en los extremos del sistema (una varilla, por ejemplo).

En cursos más avanzados se demuestra que este problema tiene solución única (no lo demostraremos aquí). Lo que vamos a ver es cómo obtener esta solución.

Antes de esto, conviene darse cuenta de que la ecuación del calor y las condiciones de contorno son *homogéneas* y *lineales*: es decir, si u_1 y u_2 satisfacen estas condiciones, también lo hará $c_1 u_1 + c_2 u_2$ para cualquier elección de c_1 y c_2. De modo que condiciones lineales homogéneas satisfacen el principio de superposición.

Vamos a considerar nuestra esquema de obtención de la solución $u(x,t)$ en dos fases:

1. Determinación de todas las soluciones que satisfacen las condiciones lineales homogéneas del problema. Buscaremos y obtendremos estas soluciones en la forma:

$$u(x,t) = f(x)g(t).$$

2. Determinación de la solución particular que satisface la condición no homogénea (vinculada a la función $h(x)$) utilizando **análisis de Fourier**.

Empecemos con la **primera fase**:
Asumiendo que la solución puede expresarse como $u(x,t) = f(x)g(t)$, sustituimos en la ecuación del calor:

$$f(x)g'(t) = c^2 f''(x)g(t),$$

y procediendo ahora a separar las variables, obtenemos:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Como el lado izquierdo de la ecuación anterior no depende de x y el lado derecho no depende de t, llegamos a la conclusión de que ambos términos deben ser iguales a una constante λ, que recibe el nombre de *constante de separación*. Nuestra ecuación queda entonces:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda.$$

Esta ecuación conduce a dos EDOs:

$$\frac{g'(t)}{c^2 g(t)} = \lambda, \ \text{ o } g'(t) = \lambda c^2 g(t), \tag{7}$$

y

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda, \ \text{ o } f''(x) = \lambda f(x). \tag{8}$$

Las condiciones de contorno homogéneas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ se traducen en:

$$f(0)g(t) = f(L)g(t) = 0,$$

de modo que si $g(t)$ es distinta de cero, se verifica que $f(0) = f(L) = 0$.
Comentario: si $g(t)$ es idénticamente igual a cero, entonces $u(x,t) = 0$ que es la solución trivial.

Para encontrar las soluciones no triviales de la parte lineal homogénea del problema, debemos determinar entonces las soluciones no triviales de un *problema de contorno de la EDO*:

$$f''(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = \lambda f(x), \ \ f(0) = 0 = f(L). \tag{9}$$

Diremos que esta ecuación es el **problema de valores propios** del operador diferencial

$$\mathrm{L} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$$

actuando sobre el espacio de funciones con "buen comportamiento" $f \ : \ [0, \, L] \to R$ y que se anulan en 0 y L. Vamos a resolver (9) distinguiendo 3 casos:

Caso 1: $\lambda = 0$. En este caso, el problema de valores propios dado por la ecuación (9) queda reducido a:

$$f''(x) = 0, \quad f(0) = 0 = f(L).$$

La solución general de la EDO es $f(x) = ax + b$ y la única solución particular que satisface las condiciones de contorno es $f = 0$, la solución trivial.

Caso 2: $\lambda > 0$. En este caso, la EDO

$$f''(x) = \lambda f(x), \;\text{ o } f''(x) - \lambda f(x) = 0,$$

tiene por solución general

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Para simplificar ligeramente el análisis, conviene cambiar la base del espacio de soluciones utilizando funciones hiperbólicas en lugar de exponenciales:

$$\cosh(\sqrt{\lambda}x) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \quad \sinh(\sqrt{\lambda}x) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right).$$

Haciendo esto, tenemos

$$f(x) = a\cosh(\sqrt{\lambda x}) + b\sinh(\sqrt{\lambda}x),$$

con nuevas constantes de integración a y b. Imponiendo ahora la condición de contorno en $x = 0$:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = b\sinh(\sqrt{\lambda x}),$$

y ahora en $x = L$:

$$f(L) = 0 \Rightarrow b\sinh(\sqrt{\lambda L}) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Es decir, en este segundo caso la solución que se obtiene es, de nuevo, la solución trivial $f = 0$.

Caso 3: $\lambda < 0$. En este caso, consideramos $\omega = \sqrt{-\lambda}$, y reescribimos el problema de valores propios como:

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0, \quad f(0) = 0 = f(L).$$

Esta EDO es fácilmente reconocible: es la **ecuación diferencial asociada a un oscilador armónico simple** y su solución es:

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x).$$

Impongamos de nuevo las condiciones de contorno en $x = 0$:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = b \sin(\omega x),$$

y ahora en $x = L$:

$$f(L) = 0 \Rightarrow b \sin(\omega L) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ó } \sin(\omega L) = 0.$$

Es decir, **si $b = 0$ obtenemos de nuevo la solución trivial, pero también existe la posibilidad de satisfacer esa condición de contorno si** $\sin(\omega L) = 0$. Esto último implica que $\omega L = n\pi$, siendo n un entero. En este caso, obtenemos

$$f(x) = b \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Por tanto, concluimos que **las únicas soluciones no triviales del problema (9) son múltiplos constantes de**

$$f(x) = \sin(n\pi x/L)\,, \quad \textbf{con } \lambda = -(n\pi/L)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para cada una de estas soluciones necesitamos encontrar la correspondiente $g(t)$ que sea solución de la ecuación (7):

$$g'(t) = \lambda c^2 g(t),$$

donde $\lambda = -(n\pi/L)^2$. La solución de esta EDO es, como sabemos, una exponencial decreciente

$$g(t) = be^{-(nc\pi/L)^2 t},$$

siendo b una constante de integración.

Por tanto, las soluciones no triviales de la ecuación del calor que satisfacen las condiciones de contorno homogéneas $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ son de la forma

$$u_n(x, t) = \sin(n\pi x/L)e^{-(nc\pi/L)^2 t},$$

de modo que, de acuerdo con el principio de superposición, tendremos

$$u(x, t) = b_1 \sin(\pi x/L)e^{-(c\pi/L)^2 t} + b_2 \sin(2\pi x/L)e^{-(2c\pi/L)^2 t} + \ldots \tag{10}$$

La **segunda fase** del cálculo consiste en determinar las constantes b_n de modo que se satisfaga $u(x,0) = h(x)$. Si hacemos $t = 0$ en (10), tenemos que

$$h(x) = u(x,0) = b_1 \sin(\pi x/L) + b_2 \sin(2\pi x/L) + \ldots$$

Si recordamos lo visto sobre series de Fourier en la Lectura 4, vemos que la expresión anterior correspondería a la serie de Fourier seno de la función $h(x)$**.** Es decir, las constantes b_i corresponderán a los coeficientes de esta serie:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin(n\pi x/L)\, dx$$

Ejemplo: **Supongamos que queremos encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \le x \le \pi$ y $t \ge 0$ que satisface el problema de valores iniciales:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = h(x),$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} x, & \textbf{para } 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \textbf{para } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Sol: Ya obtuvimos la serie de Fourier seno de $h(x)$ en uno de los ejercicios de la Hoja 1:

$$h(x) = \frac{4}{\pi}\sin x - \frac{4}{9\pi}\sin 3x + \frac{4}{25\pi}\sin 5x - \frac{4}{49\pi}\sin 7x + \ldots$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial vendrá dada entonces por

$$u(x,t) = e^{-t}\frac{4}{\pi}\sin x - e^{-9t}\frac{4}{9\pi}\sin 3x + e^{-25t}\frac{4}{25\pi}\sin 5x + \ldots$$

Comentario I

El método descrito puede ser utilizado también para resolver un problema de valor inicial de la ecuación del calor en el cual las condiciones de contorno Dirichlet $u(0,t) = u(L,t) = 0$ son sustituidas por *condiciones Neumann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Físicamente correspondería a una varilla con extremos aislados. En este caso la separación de variables conduce a un problema de valores propios ligeramente diferente, que consiste en determinar las soluciones no triviales de

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = \lambda f(x), \;\; f'(0) = 0 = f'(L).$$

Es fácil comprobar (hacer!) que la solución involucrará ahora a **funciones coseno**, en lugar de seno.

Comentario II

De modo análogo, el método descrito puede ser utilizado también para resolver un problema de valor inicial de la ecuación del calor en el cual las condiciones de contorno son mixtas:

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

En este caso la separación de variables conduce a un problema de valores propios ligeramente diferente, que consiste en determinar las soluciones no triviales de

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = \lambda f(x), \quad f(0) = 0 = f'(L).$$

Es fácil comprobar (hacer!) que la solución involucrará ahora a **funciones seno y coseno**.

De forma similar a como hicimos para la ecuación del calor, también es posible obtener las soluciones de la **ecuación de ondas**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

siendo c una constante. $u(x, t)$ satisface **las condiciones de contorno:** $u(0, t) = u(L, t) = 0$; es decir, **si esta ecuación representa los desplazamientos de una cuerda vibrante, lo que estamos diciendo es que el desplazamiento de la cuerda es cero en los extremos.**
Por otra parte, $u(x, t)$ satisface las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = h_1(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h_2(x),$$

es decir, $h_1(x)$ **y** $h_2(x)$ **representarían la posición y velocidad inicial de la cuerda.**

Utilizando el método de separación de variables, buscamos al igual que antes soluciones de la forma $u(x,t) = f(x)g(t)$**.** Sustituyendo en la EDP de partida, es fácil comprobar que las EDOs que satisfacen $f(x)$ y $g(t)$ son en este caso:

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \lambda, \text{ o } g''(t) = \lambda c^2 g(t), \tag{11}$$

y

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda, \text{ o } f''(x) = \lambda f(x). \tag{12}$$

Como en el caso de la ecuación del calor, las condiciones de contorno homogéneas nos llevan a

$$f(0)g(t) = f(L)g(t) = 0,$$

y asumiendo que $g(t) \neq 0$, obtenemos $f(0) = f(L) = 0$.

Es decir, al igual que antes necesitamos determinar en primer lugar las soluciones no triviales del problema

$$f''(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = \lambda f(x), \quad f(0) = 0 = f(L), \tag{13}$$

que ya sabemos que son de la forma

$$f(x) = \sin(n\pi x/L), \text{ con } \lambda = -(n\pi/L)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para cada una de estas soluciones, necesitamos determinar la correspondiente $g(t)$ solución de

$$g''(t) = -(n\pi/L)^2 c^2 g(t). \tag{14}$$

La solución general de esta ecuación sabemos que es:

$$g(t) = a\cos(nc\pi t/L) + b\sin(nc\pi t/L),$$

siendo a y b constantes de integración.

De este modo, obtenemos que las soluciones no triviales de la ecuación de ondas que satisfacen las condiciones de contorno $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ serán de la forma:

$$u_n(x,t) = (a_n \cos(nc\pi t/L) + b_n \sin(nc\pi t/L)) \sin(n\pi x/L).$$

Por tanto, **la solución general de la ecuación de ondas se obtendrá como superposición de estas soluciones**:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (a_1 \cos(c\pi t/L) + b_1 \sin(c\pi t/L)) \sin(\pi x/L) + \\ &\quad + (a_2 \cos(c2\pi t/L) + b_2 \sin(c2\pi t/L)) \sin(2\pi x/L) + \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Es decir, **desde el punto de vista mecánico se obtiene que la vibración de la cuerda es una superposición de un** *modo fundamental* **de frecuencia**

$$\frac{c\pi}{L}\frac{1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$$

y modos superiores que son múltiplos de esta frecuencia fundamental.

Lo único que nos falta es determinar las constantes a_n y b_n de forma que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = h_1(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h_2(x).$$

Si hacemos $t = 0$ en (15), se obtiene que:

$$h_1(x) = u(x,0) = a_1 \sin(\pi x/L) + a_2 \sin(2\pi x/L) + ...$$

Es decir, **los coeficientes a_n son los correspondientes a la serie de Fourier seno de** $h_1(x)$.

Por otra parte, derivando parcialmente respecto a t la expresión (15), obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad = \quad & \left(-a_1 \frac{c\pi}{L}\sin(c\pi t/L) + b_1 \frac{c\pi}{L}\cos(c\pi t/L)\right)\sin(\pi x/L) + \\ & + \left(-a_2 \frac{2c\pi}{L}\sin(c2\pi t/L) + b_2 \frac{2c\pi}{L}\cos(c2\pi t/L)\right) \\ & \sin(2\pi x/L) + \ldots\end{aligned}$$

y haciendo $t = 0$

$$h_2(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = b_1 \frac{c\pi}{L}\sin(\pi x/L) + b_2 \frac{2c\pi}{L}\sin(2\pi x/L) + \ldots$$

Es decir, $\frac{nc\pi}{L} b_n$ es el $n-$**ésimo coeficiente de la serie de Fourier seno de** $h_2(x)$**.**

Ejemplo: **Supongamos que queremos encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \leq x \leq \pi$ y $t \geq 0$ que satisface el problema de valores iniciales:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 5\sin x + 12\sin 2x + 6\sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Sol: En este caso, los tres primeros coeficientes de la serie de Fourier seno de $h_1(x)$ son, trivialmente,

$$a_1 = 5, \ a_2 = 12, \ a_3 = 6,$$

y el resto son todos cero. De este modo:

$$u(x,t) = 5\sin x\cos t + 12\sin 2x\cos 2t + 6\sin 3x\cos 3t.$$

Un último comentario: los esquemas numéricos habituales para resolver EDPs, al igual que para problemas de contorno vinculados a ODEs, también suponen el uso de diferencias finitas o elementos finitos. Por ejemplo, para resolver el último de los problemas prototipo considerados (de tipo elíptico en dos dimensiones):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = g(x, y)$$

una **posible discretización de diferencias finitas que aproxima el Laplaciano basado en 5 puntos** sería

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

La implementación computacional de este esquema no entraña dificultad y su coste computacional dependerá fundamentalmente del método de resolución del sistema lineal resultante.