PRÁCTICA EJEMPLO
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil
Curso 2011-12

Diciembre 2011

Objetivo: ser capaz de resolver problemas de contorno utilizando la implementación computacional de esquemas de diferencias finitas.
Se trata de resolver el siguiente problema ayudándose de MATLAB para resolver el sistema lineal resultante:

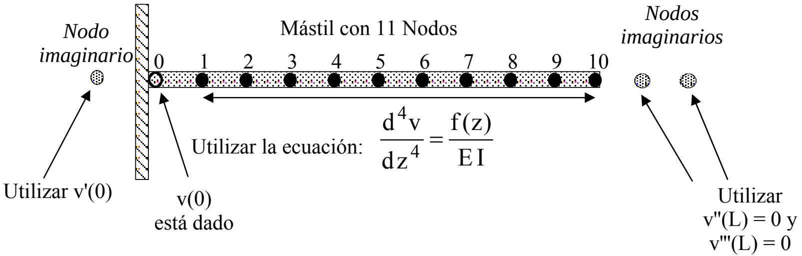
Problema de flexión de un mástil de longitud L

El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio de un mástil se puede modelizar mediante la siguiente EDO de cuarto orden:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{f(z)}{EI},$$

siendo v: desplazamiento (flecha) respecto a la posición de equilibrio, E: módulo de elasticidad, I: momento de inercia, $f(z)$: cargas (fuerzas) a lo largo del eje del mástil.
Condiciones de contorno:
Base: $v(0) = 0$; $v'(0) = 0$; **Parte superior:** $v''(L) = 0$; $v'''(L) = 0$.

Vamos a resolver este problema mediante un esquema de diferencias finitas centradas $\mathcal{O}(h^2)$:



Necesitamos, en primer lugar, discretizar las derivadas implicadas. Utilizamos para ello aproximaciones centradas que sean todas del mismo orden $\mathcal{O}(h^2)$:

$$
\begin{aligned}
v'''' &= \frac{d^4 v}{dz^4} \approx \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}}{h^4} \\
v''' &= \frac{d^3 v}{dz^3} \approx \frac{-v_{i-2} + 2v_{i-1} - 2v_{i+1} + v_{i+2}}{2h^3} \\
v'' &= \frac{d^2 v}{dz^2} \approx \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} \\
v' &= \frac{dv}{dz} \approx \frac{v_{i-1} - v_{i+1}}{2h}
\end{aligned}
$$

En la figura se supone una discretización que consta de 10 nodos, lo que corresponde a un espaciado $h = L/10$. A continuación, plantearíamos las ecuaciones de diferencias finitas para estos nodos. Fijémonos, en particular, cómo serían estas ecuaciones para los nodos $i = 1, 2, 9, 10$:

Nodo 1: $v_{-1} - 4v_0 + 6v_1 - 4v_2 + v_3 = \dfrac{h^4 f(z_1)}{EI}$;

Nodo 2: $v_0 - 4v_1 + 6v_2 - 4v_3 + v_4 = \dfrac{h^4 f(z_2)}{EI}$;

Nodo 9: $v_7 - 4v_8 + 6v_9 - 4v_{10} + v_{11} = \dfrac{h^4 f(z_9)}{EI}$;

Nodo 10: $v_8 - 4v_9 + 6v_{10} - 4v_{11} + v_{12} = \dfrac{h^4 f(z_{10})}{EI}$.

Necesitamos eliminar ahora las incógnitas asociadas a los nodos “fantasma” v_{-1}, v_0, v_{11}, v_{12} del problema. Para ello utilizamos la discretización de las condiciones de contorno:

$v(0) = 0$:		$v_0 = 0$
$v'(0) = 0$:	$\dfrac{v_{-1} - v_1}{2h} = 0$	$v_{-1} = v_1$
$v''(L) = 0$:	$\dfrac{v_9 - 2v_{10} + v_{11}}{h^2} = 0$	$v_{11} = 2v_{10} + v_9$
$v'''(L) = 0$:	$\dfrac{-v_8 + 2v_9 - 2v_{11} + v_{12}}{2h^3} = 0$	$v_{12} = v_8 - 4v_9 + 4v_{10}$

De este modo, las ecuaciones para las 4 nodos anteriores y el sistema resultante son ...

$@\ i = 1 \qquad 7v_1 - 4v_2 + v_3 = h^4 f(x_1)/EI$

$@\ i = 2 \qquad -4v_1 + 6v_2 - 4v_3 + v_4 = h^4 f(x_2)/EI$

$@\ i = 9 \qquad v_7 - 4v_8 + 5v_9 - 2v_{10} = h^4 f(x_9)/EI$

$@\ i = 10 \qquad v_8 - 4v_9 + 2v_{10} = h^4 f(x_{10})/EI$

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & & & & & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{Bmatrix} = \frac{h^4 f}{EI} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \\ f(x_6) \\ f(x_7) \\ f(x_8) \\ f(x_9) \\ f(x_{10}) \end{Bmatrix}$$