Ejercicios resueltos: ejemplos
Lectura 6

1.- Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Solución
Homogénea: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1(\text{doble}) \Rightarrow y_h = (a+bx)e^x$
Particular(Var. Para.)$\{y_1(x), y_2(x)\} = \{e^x, xe^x\}$ sistema fundamental de soluciones de la homogénea.
Sean $\{b_1(x), b_2(x)\}$ tales que $y_p = y_1(x)b_1(x) + y_2(x)b_2(x)$.
Planteamos el sistema $\left\{\begin{array}{ll} b_1'y_1 + b_2'y_2 & = 0 \\ b_1'y_1' + b_2'y_2' & = R(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b_1'e^x + b_2'xe^x & = 0 \\ b_1'e^x + b_2'(1+x)e^x & = \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{array}\right.$
simplificando las exponenciales y aplicando reducción se tiene $b_2' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $b_1' = \dfrac{-x}{1+x^2}$
Integrando $b_1 = -1/2\ln(1+x^2)$; $b_2 = \arctan x$ luego
$y_p = -1/2\ln(1+x^2)e^x + xe^x \arctan x$. Finalmente $y_g = y_h + y_p$

2.- Se considera la ecuación diferencial $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

a) Resolver la ecuación mediante el cambio de variable $z(x) = (1-x)y$.

Solución

A partir de $z = (1-x)y$, derivamos una vez:

$$z' = -y + (1-x)y', \tag{1}$$

y volvemos a derivar la expresión obtenida:

$$z'' = -2y' + (1-x)y'' \tag{2}$$

Multiplicando por x la ecuación (2), sumándola a la ecuación (1) y haciendo uso del hecho de que y satisface la EDO de partida, obtenemos:

$$xz'' + z' = 0.$$

Podemos resolver esta EDO reduciendo el orden a través del cambio $z' = v$:

$$xv' + v = 0.$$

La solución de esta EDO de primer orden es $v(x) = \dfrac{C}{x}$, de modo que $z(x) = C\log x + D$. Por tanto, la solución general de la EDO de partida es

$$y(x) = \frac{C\log x + D}{1-x},$$

siendo C y D dos constantes de integración.

b) Determinar las soluciones que pasan por el punto $(\frac{1}{2}, 2)$.

Solución

Se ha de verificar que

$$2 = \frac{C\log(1/2) + D}{1 - 1/2},$$

por lo que

$$D = 1 - C\log(1/2).$$

De modo que las soluciones que pasan por el punto $(\frac{1}{2}, 2)$ son:

$$y(x) = \frac{C\log 2x + 1}{1 - x}.$$