EXAMEN FINAL DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

26 de ENERO de 2012

Instrucciones y comentarios:

1. La duración del examen es de 3h.
2. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes de ningún tipo.
3. No se permitirá la utilización de teléfonos móviles durante el examen.
4. **Se ha de contestar, separadamente, cada ejercicio en una hoja de respuestas (una hoja por ejercicio). Hay que indicar, por tanto, nombre, apellidos, DNI, número de orden y número de ejercicio en las 4 hojas de respuestas que se repartan y hay que entregar las cuatro, aunque no se conteste nada.**
5. La puntuación indicada está expresada sobre un valor de 10 puntos. En la calificación global de la asignatura, dicha puntuación será multiplicada por un factor 0,5.

1.- (2 ptos.) Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_{ABCA} z^2\,dx + x^2\,dy + y^2\,dz$, siendo $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ con $a>0$, $b>0$, $c>0$ y yendo de un punto al siguiente sobre la curva intersección del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

con el correspondiente plano coordenado.

2.- (2 ptos.) Obtener la solución general de las siguientes EDOs

1. **(1 pto.)**

$$\left(x\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\left(1+\cos\frac{y}{x}\right)dy=0.$$

2. **(1 pto.)**

$$y''+\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{4}{x}.$$

3.- (2 ptos.) Sea el sistema lineal de EDOs

$$\begin{cases} y_1' = & 2y_1+y_2+2e^x \\ y_2' = & -4y_1+2y_2. \end{cases}$$

1. **(1.5 ptos.)** Obtener la solución general.
2. **(0.5 ptos.)** Hallar la solución del sistema que verifique las condiciones iniciales $y_1(0)=1$ e $y_2(0)=-4$.

4.- (4 ptos.) Sea la función

$$\Psi(x)=5-\frac{1}{5}|x-25|,\ 0<x<50.$$

1. **(1 pto.)** Obtener su serie de Fourier seno.

2. **(1.5 ptos.)** Encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \leq x \leq 50$ y $t \geq 0$ que satisface el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; u(0,t) = u(50,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x).$$

3. **(1.5 ptos.)** Sea el problema

$$\begin{cases} u'' + xu = \Psi(x), \;\; x \in (0,50) \\ u(0) = 0 \\ u(50) = 0. \end{cases}$$

Encontrar una discretización de diferencias finitas de orden 2 de este problema y obtener las componentes de la matriz de diferencias finitas y el vector independiente que permiten obtener $\{u_n\}_{n=0}^{N}$ para $N = 5$. No es necesario resolver el sistema.