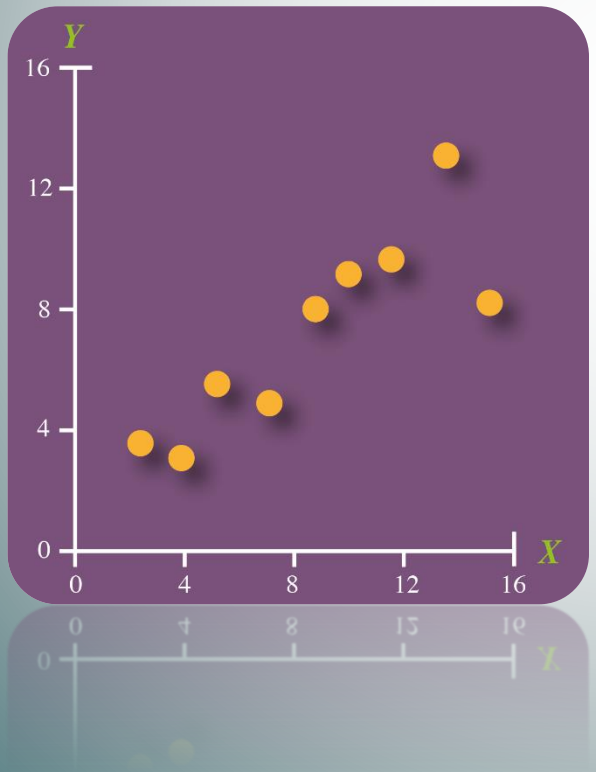
# Resumen de los contenidos básicos

## Tema 6. Dependencia entre atributos




**Lorena Remuzgo Pérez**
**Carmen Trueba Salas**
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Este tema se publica bajo Licencia:
Creative Commons BY-NC-SA 4.0

# Contenidos

6.1 Tabla de contingencia

6.2 Atributos en escala nominal

6.3 Atributos en escala ordinal

Sean $A$ y $B$ dos atributos cuyas modalidades son $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k$ y $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_h$, respectivamente. La observación conjunta de ambas atributos proporciona pares de modalidades $(a_i, b_j)$.

## 6.1 Tabla de contingencia

Permite presentar la información relativa a los atributos $A$ y $B$ de manera ordenada.

| $a_i \setminus b_j$ | $b_1$ | ... | $b_j$ | ... | $b_h$ | $n_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $n_{11}$ | ... | $n_{1j}$ | ... | $n_{1h}$ | $n_{1.} = n_{11} + \ldots + n_{1h}$ |
| $a_2$ | $n_{21}$ | ... | $n_{2j}$ | ... | $n_{2h}$ | $n_{2.} = n_{21} + \ldots + n_{2h}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_i$ | $n_{i1}$ | ... | $n_{ij}$ | ... | $n_{ih}$ | $n_{i.} = n_{i1} + \ldots + n_{ih}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_k$ | $n_{k1}$ | ... | $n_{kj}$ | ... | $n_{kh}$ | $n_{k.} = n_{k1} + \ldots + n_{kh}$ |
| $n_{.j}$ | $n_{.1} = n_{11} + \ldots + n_{k1}$ | ... | $n_{.j} = n_{1j} + \ldots + n_{kj}$ | ... | $n_{.h} = n_{1h} + \ldots + n_{kh}$ | $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} n_{ij} = N$ |

La distribución de frecuencias bidimensional de $(A, B)$ viene dada por el conjunto de pares de modalidades junto con sus correspondientes frecuencias absolutas conjuntas $(a_i, b_j; n_{ij})$ o frecuencias relativas conjuntas $(a_i, b_j; f_{ij})$.

## 6.2 Atributos en escala nominal

Sea la distribución de frecuencias $(a_i, b_j; n_{ij})$.

La dimensión de la tabla de contingencia determina las medidas que se pueden utilizar para estudiar la dependencia entre atributos.

### Atributos con dos modalidades cada uno (tablas 2 x 2)

- Coeficiente básico de dependencia
- Coeficiente de asociación $Q$ de Yule

### Atributos con $k$ y $h$ modalidades (tablas $k$ x $h$)

- Estadístico chi-cuadrado
- Coeficiente de contingencia
- Coeficiente $V$ de Cramer
- Coeficiente $T$ de Tschuprow

# 6.2 Atributos en escala nominal

## Coeficiente básico de dependencia

$$D = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{N} = n_{11} - \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{N}$$

### Interpretación

Si $D = 0$, los atributos $A$ y $B$ son independientes.

Si $D > 0$, existe asociación positiva entre las modalidades $a_1$ y $b_1$.

Si $D < 0$, existe asociación negativa entre las modalidades $a_1$ y $b_1$.

# 6.2 Atributos en escala nominal

## Coeficiente de asociación $Q$ de Yule

$$Q = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21}} = \frac{N \cdot D}{n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21}} \qquad -1 \leq Q \leq 1$$

### Interpretación

Si $Q = 0$, los atributos $A$ y $B$ son independientes.

Si $Q = 1$, existe asociación positiva completa entre las modalidades $a_1$ y $b_1$.

Si $Q = -1$, existe asociación negativa completa entre las modalidades $a_1$ y $b_1$.

Si $0 < Q < 1$, existe asociación positiva entre las modalidades $a_1$ y $b_1$.

Si $-1 < Q < 0$, existe asociación negativa entre las modalidades $a_1$ y $b_1$.

# 6.2 Atributos en escala nominal

## Estadístico chi-cuadrado

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}\frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \qquad \chi^2 \geq 0$$

donde $e_{ij} = \dfrac{n_{i.} \cdot n_{.j}}{N}$ es la frecuencia absoluta esperada.

### Interpretación

Si $\chi^2 = 0$, los atributos $A$ y $B$ son independientes.

Si $\chi^2 > 0$, los atributos $A$ y $B$ no son independientes.

# 6.2 Atributos en escala nominal

## Coeficiente de contingencia

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \qquad 0 \leq C \leq 1$$

**Interpretación:**

Si $C = 0$, los atributos $A$ y $B$ son independientes.

Si $C = 1$, existe asociación completa entre los atributos $A$ y $B$.

Si $0 < C < 1$, existe asociación entre los atributos $A$ y $B$.

# 6.2 Atributos en escala nominal

## Coeficiente *V* de Cramer

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N[mín(k,h)-1]}} \qquad 0 \le V \le 1$$

### Interpretación

Si $V = 0$, los atributos $A$ y $B$ son independientes.

Si $V = 1$, existe asociación completa entre los atributos $A$ y $B$.

Si $0 < V < 1$, existe asociación entre los atributos $A$ y $B$.

# 6.2 Atributos en escala nominal

## Coeficiente *T* de Tschuprow

$$T = \frac{\chi^2}{N\sqrt{(k-1)(h-1)}} \qquad 0 \le T \le 1$$

### Interpretación

Si $T = 0$, los atributos $A$ y $B$ son independientes.

Si $T = 1$, existe asociación completa entre los atributos $A$ y $B$.

Si $0 < T < 1$, existe asociación entre los atributos $A$ y $B$.

# 6.3 Atributos en escala ordinal

Sea la distribución de frecuencias $(a_i, b_j; n_{ij})$.

Es posible estudiar la concordancia o discordancia entre las ordenaciones de los individuos de la población atendiendo a los atributos $A$ y $B$ .

## Coeficientes de correlación por rangos

- Coeficiente de correlación de Spearman
- Coeficiente de correlación $\tau$ de Kendall

# 6.3 Atributos en escala ordinal

## Coeficiente de correlación de Spearman

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{N(N^2-1)} \qquad -1 \le \rho \le 1$$

donde $d_i = r_i^1 - r_i^2$.

### Interpretación

Si $\rho = 0$, los criterios de ordenación son independientes.

Si $\rho = 1$, existe concordancia perfecta entre las ordenaciones.

Si $\rho = -1$, existe discordancia perfecta entre las ordenaciones.

Si $0 < \rho < 1$, existe concordancia entre las ordenaciones.

Si $-1 < \rho < 0$, existe discordancia entre las ordenaciones.

# 6.3 Atributos en escala ordinal

## Coeficiente de correlación $\tau$ de Kendall

$$\tau = \frac{C - D}{N\,(N-1)/2} \qquad -1 \le \tau \le 1$$

donde $C$ es el número de concordancias y $D$ es el número de discordancias.

### Interpretación

Si $\tau = 0$, los criterios de ordenación son independientes.

Si $\tau = 1$, existe concordancia perfecta entre las ordenaciones.

Si $\tau = -1$, existe discordancia perfecta entre las ordenaciones.

Si $0 < \tau < 1$, existe concordancia entre las ordenaciones.

Si $-1 < \tau < 0$, existe discordancia entre las ordenaciones.