

## Problemas

### Tema 1. Distribuciones de frecuencias unidimensionales

- Dados los siguientes contextos, indicar la población, la variable objeto de estudio, así como su clasificación atendiendo a la naturaleza y a la escala.
  - Nacionalidad de los estudiantes que viven en una residencia universitaria.
  - Edad de los alumnos de un curso online de mecanografía.
  - Importe de los pedidos realizados a una empresa de suministros de automoción.
  - Gravedad de las lesiones musculares sufridas por un grupo de deportistas de élite.
  - Número de ríos que pasan por las ciudades de un determinado país.
  - Valoración del último éxito de un grupo de música.
- Como consecuencia de un apagón eléctrico, no se ha grabado correctamente cierta información relativa a los días de vacaciones disfrutados por los trabajadores de una empresa, tal y como se puede observar en la siguiente tabla.

$x_i$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$
6	?	?	0,1	?
8	?	5	?	?
11	6	?	?	?
12	3	?	?	?
13	?	19	?	?
19	?	20	?	?

Obtener los elementos de la distribución de frecuencias y representarla gráficamente.

- La siguiente tabla recoge el tiempo, expresado en horas, que cada estudiante ha dedicado a preparar un examen.

3	5	1	6	4
7	12	6	11	3
7	8	4	8	9
4	3	2	5	8

- Obtener los elementos de la distribución de frecuencias agrupada en seis intervalos de igual amplitud (abiertos a la izquierda y cerrados a la derecha) tomando como extremo inferior del primer intervalo un tiempo de 0 horas. Representarla gráficamente.
- Obtener los elementos de la distribución de frecuencias agrupada en los intervalos  $[1,3)$ ,  $[3,6)$ ,  $[6,10)$  y  $[10,13)$  y representarla gráficamente.

## Tema 2. Medidas de posición y dispersión

1. Los trabajadores de una librería reciben un salario mensual fijo de 1.165 euros y una cantidad variable en función del número de libros que venden cada mes. En concreto, el dueño del negocio premia la productividad de sus empleados incrementándoles el salario mensual en 75 euros por cada libro vendido. En la siguiente tabla se recoge el número de libros vendidos el mes pasado por los trabajadores.

N.º libros	N.º trabajadores
10	1
20	4
30	5
40	2
60	8

- Calcular el número medio de libros vendidos el mes pasado por trabajador.
  - Obtener el salario medio percibido el mes pasado por trabajador.
  - Hallar la mediana del número de libros vendidos el mes pasado.
  - ¿Cuántos libros debe vender un trabajador como mínimo para encontrarse dentro del 20 por ciento de los mejores vendedores?
  - Obtener la desviación típica del salario de los trabajadores.
2. La empresa responsable del cuidado de los espacios verdes de una ciudad riega diariamente nueve jardines con un área entre 155 y 215 metros cuadrados, cinco de entre 215 y 437 metros cuadrados y tres con una superficie inferior a 155 metros cuadrados.
- Obtener la superficie media por jardín.
  - Determinar una superficie de referencia tal que la mitad de los jardines sean más grandes que ella.
  - Hallar la superficie más habitual.
  - ¿Cuál es la superficie máxima del 74 por ciento de los jardines más pequeños?
3. Un organismo público va a conceder ayudas a las empresas que más apuesten por el desarrollo de actividades de I+D+i. En la siguiente tabla se recoge la cantidad invertida el pasado año en dichas actividades, expresada en miles de euros, por las empresas.

Cantidad invertida	N.º empresas
0 – 1	11
1 – 3	25
3 – 5	7
5 – 6	12

- Si se otorgan ayudas al 26 por ciento de las empresas que más invirtieron, calcular la cantidad mínima que debe invertir una empresa para percibir la ayuda.
- Calcular la inversión máxima del 60 por ciento de las empresas que menos invirtieron.
- Obtener el porcentaje de empresas cuya inversión fue inferior a 4.000 euros.
- ¿Qué porcentaje de empresas invirtieron entre 500 y 2.000 euros?

4. Una empresa de mudanzas opera en las zonas este y oeste de la región. La siguiente tabla recoge el beneficio, expresado en miles de euros, de los traslados realizados en la zona este durante la última semana.

Beneficio	N.º traslados
0,0 – 0,5	9
0,5 – 1,7	16
1,7 – 2,3	2

- Hallar el beneficio medio por traslado de la empresa de mudanzas en la zona este.
  - ¿Cuál es el beneficio mínimo del 23 por ciento de los traslados más rentables en la zona este?
  - Si en la zona oeste la empresa ha realizado 32 traslados y ha obtenido un beneficio medio de 1.200 euros por traslado, con una desviación típica de 600 euros, determinar el beneficio medio por traslado que ha obtenido esta empresa en la región.
  - ¿En qué zona es más representativo el beneficio medio por traslado de la empresa?
5. La siguiente tabla recoge el importe, expresado en euros, de las facturas telefónicas recibidas en dos organismos públicos durante el último año.

Importe	N.º facturas organismo 1	N.º facturas organismo 2
0 – 50	3	1
50 – 90	5	4
90 – 120	8	9
120 – 165	7	8
165 – 198	6	2

- ¿En qué organismo el importe medio por factura es más representativo?
  - ¿Entre qué dos valores oscila el 50 por ciento central de los importes de las facturas recibidas en el organismo 1?
  - Si se consideran conjuntamente ambos organismos, ¿cuál es el importe mínimo del 42 por ciento de las facturas de mayor cuantía?
6. Los estudiantes de sexto curso de un centro de educación primaria están distribuidos en tres grupos: A, B y C. La siguiente tabla recoge el número de estudiantes en cada grupo, la nota media por estudiante obtenida en el examen global de Matemáticas, así como su desviación típica.

Grupo	N.º estudiantes	Nota media	Desviación típica de la nota
A	23	6,2	0,99
B	36	8,0	1,33
C	21	5,3	0,62

- Si el mejor estudiante del grupo A ha obtenido un 9,5, la nota más alta en el grupo B ha sido un 8,75 y el mejor del grupo C ha sacado un 9,25, ¿a qué grupo pertenece el mejor estudiante en términos relativos?
- De los resultados obtenidos se concluye que la nota media del curso es de 6,5, ¿qué opinión estadística te merece esta afirmación?

### Tema 3. Medidas de forma y concentración

1. En la siguiente tabla se recoge información sobre el número de kilómetros que un modelo de neumático para bicicletas es capaz de recorrer sin sufrir ningún pinchazo.

N.º kilómetros	N.º neumáticos
22	6
43	2
76	5
112	7

- a) Calcular los coeficientes de asimetría de Fisher y Yule-Bowley del número de kilómetros recorridos.  
b) Hallar el coeficiente de curtosis del número de kilómetros recorridos.
2. En la siguiente tabla se muestra el número de respuestas correctas que un grupo de estudiantes obtuvo en una prueba de rendimiento académico.

N.º respuestas correctas	N.º estudiantes
26	4
43	6
61	1
79	8
94	5

Calcular el índice de Gini y representar la curva de Lorenz del número de respuestas correctas.

3. Un grupo de expertos en turismo desea estudiar la capacidad hotelera de la ciudad. Sabiendo que los 7 hoteles de la ciudad cuentan con 42, 35, 56, 105, 72, 23 y 109 habitaciones, respectivamente.
- a) Hallar el índice de Gini y representar la curva de Lorenz del número de habitaciones.  
b) Si todos los hoteles duplicaran la oferta de habitaciones, ¿cuál sería el índice de Gini de la nueva distribución?

## Tema 4. Distribuciones de frecuencias bidimensionales

1. La siguiente tabla refleja las notas que 9 estudiantes han obtenido en el primer y segundo examen que han realizado en la carrera.

Nota 1 <sup>er</sup> examen (X)	Nota 2 <sup>o</sup> examen (Y)
6	8
2	5
5	5
7	6
6	7
7	7
5	5
9	10
3	6

- Representar la información anterior en una tabla de correlación.
  - Obtener la distribución marginal de la nota obtenida en el primer examen.
  - Obtener la distribución de la nota obtenida en el primer examen por aquellos alumnos que obtuvieron un 5 en el segundo examen.
  - ¿Son estadísticamente independientes las notas del primer y segundo examen?
2. Se considera la siguiente distribución de frecuencias bidimensional.

$x_i \setminus y_j$	6	7
3	3	$k$
5	2	6

Obtener el valor de  $k$  que haga que las variables  $X$  e  $Y$  sean independientes.

3. La cantidad de merluza, expresada en toneladas, que 21 cofradías de pescadores capturaron en la primera salida de la temporada, así como el precio de subasta en lonja, expresado en euros por kilo, se muestran a continuación.

Cantidad \ Precio	1,5 – 2,5	2,5 – 6
9 – 11	5	4
11 – 18	1	6
18 – 25	3	2

- Considerando un precio de subasta en lonja entre 1,5 y 2,5 euros por kilo, determinar la cantidad más habitual de merluza capturada.
- Calcular la cantidad media de merluza capturada y el precio medio de la merluza subastada en lonja por cofradía.
- Hallar la varianza de la cantidad de merluza capturada y del precio de subasta en lonja.
- ¿Existe relación lineal entre la cantidad de merluza capturada y el precio de subasta en lonja?
- En caso afirmativo, determinar una medida del grado de relación lineal entre la cantidad de merluza capturada y el precio de subasta en lonja.

- f) En la última salida de las cofradías de pescadores se ha observado que, mientras que la cantidad de merluza capturada se ha reducido un 3 por ciento, el precio de subasta en lonja se ha incrementado un 2 por ciento. Determinar la cantidad media de merluza capturada y el precio medio de la merluza subastada en lonja por cofradía. ¿Se ha visto afectada la relación lineal entre la cantidad de merluza capturada y el precio de subasta en lonja en esta última salida? Argumentar la respuesta en base a los resultados obtenidos en los apartados anteriores.
4. La siguiente tabla recoge el peso, expresado en kilos, y la altura, expresada en centímetros, de 5 deportistas de alto rendimiento.

Peso ( $X$ )	Altura ( $Y$ )
65	172
82	184
78	176
91	195
53	152

- a) Hallar el peso y la altura media por deportista.
- b) ¿Se puede afirmar que el peso y la altura están relacionados linealmente?
- c) Calcular el coeficiente de correlación lineal entre el peso y la altura.

## Tema 5. Teoría de la regresión

1. Se ha realizado un estudio entre las familias de una comunidad de vecinos para conocer la relación que existe entre los ingresos ( $X$ ) y el gasto en lectura ( $Y$ ) mensuales. Se sabe que la distribución de ingresos tiene una media de 1.250 euros, siendo ésta de 165 euros para la distribución del gasto en lectura. Además, las desviaciones típicas de ambas distribuciones coinciden y el coeficiente de correlación lineal entre  $X$  e  $Y$  es de 0,8.

- Obtener la ecuación lineal que exprese la dependencia estadística del gasto en lectura en función de los ingresos.
- ¿Qué gasto tendrá una familia con unos ingresos de 1.125 euros?

2. La Dirección General de Tráfico dispone de información sobre el número de infracciones cometidas por 15 conductores, así como de la antigüedad del permiso de conducción, expresada en años.

Antigüedad \ N.º infracciones	1 – 3	3 – 5	5 – 9
0 – 8	1	0	2
8 – 10	0	3	1
10 – 15	6	2	0

- Obtener la recta de regresión del número de infracciones cometidas sobre la antigüedad del permiso de conducción.
- Estimar el número de infracciones que cometería un conductor que sacó el permiso de conducción hace 24 meses.
- ¿Es fiable la estimación del apartado anterior?

3. Una asociación cultural desea conocer si el éxito de una galería de arte está relacionado con la rotación de las exposiciones que albergan. Tras efectuar diversos estudios, ha llegado a la conclusión de que sería conveniente renovar una exposición si proporciona unos ingresos inferiores a 4.000 euros. La siguiente tabla recoge información sobre los ingresos, expresados en miles de euros, así como la antigüedad, expresada en días, de las exposiciones acogidas en el último año por las principales galerías de arte de la región.

Exposiciones	Ingresos ( $Y$ )	Antigüedad ( $X$ )
2	2,0	112
15	1,2	256
10	2,6	198
5	4,5	112
5	4,5	256

- Suponiendo una relación lineal entre los ingresos y la antigüedad, ¿sería rentable mantener una exposición durante 125 días?
- ¿Es fiable la conclusión obtenida en el apartado anterior?

4. La siguiente tabla muestra el número de coches vendidos por los comerciales de un concesionario el pasado año y su antigüedad en la empresa, expresada en años.

N.º coches vendidos \ Antigüedad	0 – 2	2 – 4	4 – 6
0 – 4	23	1	0
4 – 8	2	2	0
8 – 12	1	8	7

- a) Suponiendo una relación lineal entre las variables, estimar el número de coches que vendería un comercial que llevara 3 años y medio en la empresa.
- b) ¿Es fiable la estimación realizada en el apartado anterior?
5. Comprobar si las siguientes rectas son pares de rectas de regresión. En caso afirmativo, identificar cada una de ellas y obtener el coeficiente de correlación lineal.
- a)  $\{x = 5; y = -3\}$
- b)  $\{x - y = 2; x + y = 3\}$
- c)  $\{4y + x = 5; x + 2y = -3\}$
- d)  $\{6y = x + 1; 2x + y = 3\}$
6. Las rectas de regresión que mejor recogen la relación entre la antigüedad ( $X$ ), expresada en años, y el salario mensual ( $Y$ ), expresado en miles de euros, de los trabajadores de una empresa son  $y = -0,5 + 1,5x$  e  $y = 0,88 + 0,45x$ .
- a) Obtener el salario medio por trabajador.
- b) ¿Cuál es la recta de regresión de  $Y$  sobre  $X$ ?
- c) Determinar si existe relación lineal entre la antigüedad y el salario mensual.

## Tema 6. Dependencia entre atributos

1. Un grupo de orientadores desea conocer si existe relación entre la práctica de deporte y el rendimiento escolar de los niños a los 10 años. Para ello, dispone de la información para 250 niños que se muestra en la siguiente tabla.

Práctica de deporte \ Rendimiento escolar	Alto	Bajo
Sí	?	12
No	23	?

- a) Completar la tabla de contingencia sabiendo que el 40 por ciento de los niños practica deporte.
- b) Estudiar la dependencia entre la práctica de deporte y el rendimiento escolar mediante el coeficiente básico de dependencia y el coeficiente de asociación  $Q$  de Yule.
2. Una encuesta realizada a 504 estudiantes acerca de sus preferencias artísticas y escénicas ha arrojado los siguientes resultados:

Preferencias artísticas \ Preferencias escénicas	Teatro	Danza
Pintura	125	98
Escultura	13	268

Estudiar la dependencia entre las preferencias mediante el coeficiente básico de dependencia y el coeficiente de asociación  $Q$  de Yule.

3. El departamento de marketing de una empresa está compuesto por 180 trabajadores, de los cuales 100 son hombres y el resto mujeres. Entre los hombres, el 55 por ciento obtiene un salario igual o inferior a 1.105 euros y el 40 por ciento un salario entre 1.105 y 1.406 euros. Entre las mujeres, el 40 por ciento percibe un salario igual o inferior a 1.105 euros y el 30 por ciento un salario superior a 1.406 euros. Estudiar el grado de dependencia entre el sexo y el salario.
4. El Servicio Cántabro de Empleo ha realizado una encuesta sobre la situación laboral de 15 titulados universitarios y 25 titulados en formación profesional. Los resultados muestran que el 30 por ciento del total de individuos está en paro y que el 80 por ciento de los titulados en formación profesional se encuentra ocupado.
- a) Estudiar el grado de dependencia entre la titulación y la situación laboral.
- b) Este organismo ha decidido añadir al estudio 10 individuos sin ninguna titulación, encontrándose 6 de ellos en situación de paro. Estudiar el grado de dependencia entre la titulación y la situación laboral teniendo en cuenta estos nuevos datos.

5. Un ejército de las Fuerzas Armadas desea saber si existe alguna relación entre el rango militar de sus siete miembros y el número de misiones a las que han sido destinados en los últimos dos años.

Rango militar*	N.º misiones
Coronel	1
Teniente Coronel	3
Capitán	2
Brigada	5
Sargento	4
Cabo	8
Soldado	10

(\*) La variable "Rango militar" está ordenada de mayor a menor rango.

¿Existe concordancia entre las ordenaciones de los miembros del ejército atendiendo a la información proporcionada en la tabla anterior?

6. Un docente está convencido de que los estudiantes que mejor nota obtienen en sus exámenes son aquellos que más asisten a clase. Sin embargo, en una encuesta realizada al finalizar el curso, los estudiantes han manifestado que la asistencia a clase no es importante para obtener un buen resultado.

Nota	N.º faltas de asistencia
8	4
3,5	7
4	6
6	2
7	3
10	0
9	1
5	5

Considerando la información de la tabla anterior, determinar si la afirmación del docente está fundamentada estadísticamente en base al coeficiente de correlación de Spearman.

7. Una empresa dedicada al diseño de aplicaciones software considera que no sólo es importante la formación de sus trabajadores, sino que resulta fundamental que el trato con los clientes sea adecuado. En la siguiente tabla se recoge información sobre la cualificación técnica de sus seis trabajadores y el grado de satisfacción que el cliente más importante de la empresa ha manifestado en relación a la atención recibida por cada uno de ellos.

Cualificación	Grado de satisfacción del cliente
A	Muy alto
A	Muy alto
B	Medio
A	Muy bajo
C	Bajo
C	Alto

¿Existe dependencia entre las dos características que más valora esta empresa? Justificar estadísticamente la respuesta a partir del coeficiente de correlación de Spearman.

## Tema 7. Números índices y tasas de variación

1. La nota media de los estudiantes de una facultad durante el periodo 2016-2020 ha sido la siguiente.

Años	Notas medias
2016	4,5
2017	5,5
2018	6,1
2019	6,5
2020	7,2

- Hallar los índices simples de la nota media para cada año tomando 2016 como año base.
  - Obtener los índices en cadena de la nota media para cada año.
  - Calcular las tasas de variación relativa de la nota media para cada año.
  - Determinar la tasa media acumulativa de la nota media del periodo 2016-2020.
2. La evolución del precio de unas zapatillas deportivas, expresado en términos nominales, durante el periodo 2015-2020, así como los correspondientes índices de precios del mercado para cada año se muestran en la siguiente tabla.

Años	Precios	Índices de precios
2015	54	100
2016	57	112
2017	66	115
2018	75	122
2019	90	134
2020	126	146

- ¿Cuál es el año base de los índices de precios considerados?
  - ¿Cómo ha evolucionado el precio de las zapatillas en términos reales?
  - Analizar la evolución del precio de las zapatillas a precios constantes del año 2017.
3. El salario mensual de los trabajadores de una fábrica aumentó un 25 por ciento entre 2017 y 2018, subió un 30 por ciento entre 2018 y 2019, y disminuyó un 10 por ciento entre 2019 y 2020.
- Hallar los índices simples del salario para cada año tomando 2017 como año base.
  - Obtener las tasas de variación relativa del salario para cada año.
  - Determinar la tasa media acumulativa de los índices calculados en el apartado a).
  - Sabiendo que el salario medio de los trabajadores fue de 1.800 euros en 2019 y que el índice de precios al consumo del país para el año 2020 tomando 2019 como base fue de 115, ¿cuál debería ser el salario medio de los trabajadores en 2020 para que no pierdan poder adquisitivo?

4. Un estudiante firmó un contrato de alquiler para alojarse los cuatro años de carrera universitaria. Si formalizó el contrato en 2017, fijando un alquiler mensual de 626 euros, y éste se actualiza año a año en función del Índice de Precios al Consumo (IPC) recogido en la siguiente tabla.

Años	IPC
2017	96
2018	100
2019	105
2020	107

¿Cuál fue la cuota mensual de alquiler en 2020?

## Tema 8. Introducción a la probabilidad

1. Durante el pasado curso académico el 67 por ciento de los estudiantes de primer año de carrera aprobaron inglés, el 55 por ciento aprobaron estadística y el 46 por ciento aprobaron las dos asignaturas. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado ninguna de las dos asignaturas?
2. En una empresa de 30 trabajadores, 12 de ellos tienen los ojos marrones.
  - a) Si se elige un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos marrones?
  - b) Sabiendo que actualmente hay cinco personas de vacaciones que tienen los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que un trabajador elegido al azar tenga los ojos marrones?
3. Una tienda de antigüedades dispone de 105 relojes de hace tres siglos, de los cuales 9 presentan un defecto. Si un cliente adquiere cinco ejemplares sin darse cuenta de si están defectuosos o no, ¿cuál es la probabilidad de que compre algún reloj defectuoso?
4. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres sucesos mutuamente independientes con probabilidades:

$$\Pr(A) = 0,3; \Pr(B) = 0,2; \Pr(C) = 0,4.$$

Calcular las siguientes probabilidades.

- a)  $\Pr(A \cap B \cap C)$ .
  - b)  $\Pr(A^c \cap B \cap C)$ .
  - c)  $\Pr(A^c \cap B^c \cap C^c)$ .
5. Un equipo médico dispone de tres aparatos electrónicos para realizar una prueba diagnóstica a sus pacientes. En el 20 por ciento de las consultas el equipo utiliza el primer aparato, en el 45 por ciento el segundo y en el 35 por ciento el tercero. Además, se sabe que los aparatos no funcionan correctamente el 2, el 3 y el 5 por ciento de las veces que se utilizan, respectivamente. Si un paciente acude a la consulta de este equipo médico.
    - a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario repetir la prueba?
    - b) Si la prueba no es válida, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo médico haya empleado el segundo aparato?