CAPíTULO 13

Modelos de ecuaciones simultáneas

Hasta ahora hemos estudiado el modelo lineal general uniecuacional, que relaciona una variable dependiente con una combinación lineal de varias variables independientes más una perturbación estocástica. En esta relación estadística se supone que las variables indepentes son ortogonales al término de error. Este supuesto implica una relación causa-efecto: las variables independientes causan a la variable dependiente, pero los cambios de la variable dependiente (en respuesta a los factores recogidos en el término de error) no tiene efectos sobre las variables explicativas. Sin embargo, este tipo de relaciones unidireccionales son raras en economía, porque las variables económicas están interrelacionadas. Por ejemplo, la microeconomía nos dice que los precios y las cantidades se determinan simultáneamente (conjuntamente) en los mercados. Similarmente, la macroeconomía nos dice que la renta y el nivel de precios de una economía se determinan simultáneamente por la interacción de la oferta y demandas agregadas.

En este capítulo extendemos el modelo lineal general considerando varias variables dependientes interrelaccionadas que a su vez dependen de un conjunto de variables independientes. Cada variable dependiente tiene una ecuación específica que expresa su relación con el resto de variables dependientes y con el conjunto de variables independientes. El sistema de ecuaciones se denomina modelo de ecuacioens simultáneas.

13.1. Forma estructural y forma reducida

Consideramos m variables interpedendientes o endógenas $Y_{1t},\ Y_{2t},\ \ldots,\ Y_{mt}$ que a su vez dependen de k variables independientes o exógenas $X_{1t},\ X_{2t},\ \ldots,\ X_{kt}$, en donde el índice t tiene un rango de 1 a T. Para cada variable endógena Y_{jt} $(j = 1,\ \ldots,\ m)$ podemos especificar una ecuación de regresión lineal que exprese Y_{jt} como una combinación lineal de las restantes varibles endógenas y de las variables exógenas. El sistema de ecuaciones resultante se denomina modelo de ecuaciones sismultáneas y puede escribirse de la siguiente forma

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11}Y_{1t}+\alpha_{12}Y_{2t} + \cdots + \alpha_{1m}Y_{mt} + \beta_{11}X_{1t} + \beta_{12}X_{2t} + \cdots + \beta_{1k}X_{kt} &= \epsilon_{1t} \\
\alpha_{21}Y_{1t}+\alpha_{22}Y_{2t} + \cdots + \alpha_{2m}Y_{mt} + \beta_{21}X_{1t} + \beta_{22}X_{2t} + \cdots + \beta_{2k}X_{kt} &= \epsilon_{2t} \\
&\vdots \\
\alpha_{m1}Y_{1t}+\alpha_{m2}Y_{2t} + \cdots + \alpha_{mm}Y_{mt} + \beta_{m1}X_{1t} + \beta_{m2}X_{2t} + \cdots + \beta_{mk}X_{kt} &= \epsilon_{mt}
\end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

en donde α_{ji} $(j = 1,\ \ldots,\ m;\ i = 1,\ \ldots,\ m)$ y β_{jh} $(j = 1,\ \ldots,\ m;\ h = 1,\ \ldots,\ k)$ son los coeficientes de regresión y ϵ_{jt} $(j = 1,\ \ldots,\ m;\ t = 1,\ \ldots,\ T)$ son las perturbaciones estocásticas. Por conveniencia notacional hemos situado todas las variables en el lado izquierdo de la ecuación y las perturbaciones en el lado derecho, y permitimos que X_{1t} sea una variable de unos si se desea incluir un término constante.

Definición 93. *El sistema de cuaciones 13.1 se dice que está* <u>*normalizado*</u> *cuando en cada ecuación aparece una variable endógena con un coeficiente unitiario.*

Para la observación t-ésima, el sistema de ecuaciones (13.1) puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{B}\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{13.2}$$

en donde

$$\mathbf{y}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{mt} \end{pmatrix}}_{m\times 1}, \quad \mathbf{x}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix}}_{k\times 1}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \vdots \\ \epsilon_{mt} \end{pmatrix}}_{m\times 1},$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mk} \end{pmatrix}}_{m\times m}, \quad \mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mk} \end{pmatrix}}_{m\times k}.$$

Los supuestos básicos para el modelo (13.2) son:

1. $\mathbf{A}$ es una matriz no singular,
2. las variables exógenas $\mathbf{x}_t$ son no estocásticas, linealmente independientes y con momentos muestrales finitos, esto es,
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{x}_t\mathbf{x}_t' = \mathbf{Q}$$
es una matriz finita no singular de orden $k \times k$,
3. los vectores $\boldsymbol{\epsilon}_t$ se distribuyen independiente e indenticamente con una distribución normal multivariante con vector de medias nulo y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}_t \sim iidN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. También se dice que $\boldsymbol{\epsilon}_t$ es un proceso de ruido blanco vectorial porque cumple los supuestos
   a) estacionariad en media, $E(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$,
   b) estacionariedad en varianza (homocedasticidad)
$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}_t') = E\left[\begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \vdots \\ \epsilon_{mt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} & \epsilon_{2t} & \ldots & \epsilon_{mt} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \ldots & \sigma_{mk} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma},$$
   c) y ausencia de autocorrelación, $E(\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}_s') = \mathbf{0}\ \forall t \neq s$.

Observación 78. *Para las perturbaciones estocásticas de cada ecuación j-ésima, $\epsilon_{jt}\,(t = 1, \ldots, T)$, suponemos que se mantienen los supuestos del modelo clásico de regresión: (1) media nula, $E(\epsilon_{jt}) = 0$, (2) varianza constante (independiente de t), $E(\epsilon_{jt}^2) = \sigma_{jj}$, y (3) ausencia de correlación serial, $E(\epsilon_{jt}\epsilon_{jt-k}) = 0\ \forall k \neq 0$. Además,* *permitimos que las perturbaciones de cada par de ecuaciones simultáneas estén "contemporáneamenteçorrelacionadas, $E(\epsilon_{it}\epsilon_{jt}) = \sigma_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, pero eliminamos la posibilidad de correlación "dinámica", $E(\epsilon_{it}\epsilon_{jt-k}) = 0 \; \forall k \neq 0$.*

Las T observaciones del modelo (13.2) pueden escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \ldots & \mathbf{y}_T\end{pmatrix} + \mathbf{B}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_1 & \boldsymbol{\epsilon}_2 & \ldots & \boldsymbol{\epsilon}_T\end{pmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{AY} + \mathbf{BX} = \mathbf{E} \tag{13.3}$$

siendo

$$\mathbf{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1T} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & \ldots & Y_{mT} \end{pmatrix}}_{m \times T}, \; \mathbf{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1T} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \ldots & X_{mT} \end{pmatrix}}_{k \times T}, \; \mathbf{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \ldots & \epsilon_{1T} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \ldots & \epsilon_{2T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{m1} & \epsilon_{m2} & \ldots & \epsilon_{mT} \end{pmatrix}}_{m \times T}.$$

Observación 79. *En (13.3) hemos ordenado los datos de las variables endógenas en las filas de* $\mathbf{Y}$*. Alternativamente podríamos haber dispuesto estos datos en las columnas de una matriz* $\mathbf{Y}$ *de orden* $T \times m$*. En este caso obtendríamos una forma matricial que sería la traspuesta de (13.3),* $\mathbf{Y}'\mathbf{A}' + \mathbf{X}'\mathbf{B} = \mathbf{E}'$.

Definición 94. *Las ecuaciones (13.1), (13.2) y (13.3), que explicitamente expresan relaciones de simultaneidad entre las variables endógenas, consituyen la forma estructural del modelo de ecuaciones simultáneas.*

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas (13.1) para las m variables endógenas, podemos expresar cada variable endógena únicamente en términos de variables exógenas

$$\left.\begin{aligned} Y_{1t} &= \pi_{11}X_{1t} + \pi_{12}X_{2t} + \cdots + \pi_{1k}X_{kt} + u_{1t} \\ Y_{2t} &= \pi_{21}X_{1t} + \pi_{22}X_{2t} + \cdots + \pi_{2k}X_{kt} + u_{2t} \\ &\vdots \\ Y_{mt} &= \pi_{m1}X_{1t} + \pi_{m2}X_{2t} + \cdots + \pi_{mk}X_{kt} + u_{mt} \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

Para la observación t-ésima, podemos escribir (13.4) como

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t, \quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{13.5}$$

que puede también obtenerse premultiplicando (13.2) por $\mathbf{A}^{-1}$, de manera que

$$\underbrace{\mathbf{\Pi}}_{(m\times k)} = -\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}_{(m\times m)(m\times k)} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_t$$

Ahora es claro que el vector de perturbaciones $\mathbf{u}_t = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_t$ tiene las propiedades

1. $E(\mathbf{u}_t) = E(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$,
2. $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = E(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}_t'\mathbf{A}'^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{\Omega}$,
3. $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_s') = E(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}_s'\mathbf{A}'^{-1}) = \mathbf{0}$,
4. $\mathbf{u}_t \sim iidN(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$.

Las T observaciones en (13.5) pueden escribirse de forma matricial como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi X} + \mathbf{U} \tag{13.6}$$

que puede también obtenerse premultiplicando (13.3) por $\mathbf{A}^{-1}$, siendo $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}$.

Definición 95. *Las ecuaciones (13.4), (13.5) y (13.6), que esconden las relaciones de simultaneidad en la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones, son tres representaciones alternativas de la forma reducida del modelo de ecuaciones simúltáneas.*

Las ecuaciones (13.4), (13.5) y (13.6) son la extensión multivariante del modelo lineal general. El estudio del modelo lineal general multiecuacional va más allá del alcance de este curso. Sin embargo, muchos de los resultados establecidos para el modelo uniecuacional se extienden fácilmente al modelo multiecuacional.

Proposición 115. *El estimador de mínimos cuadrados de la matriz de coeficientes* $\mathbf{\Pi}$ *y de la matriz de coraviazas* Ω *de la forma reducidad son*

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{YX}'(\mathbf{XX}')^{-1} = \left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{y}_t\mathbf{x}_t'\right)\left(\sum_{t=1}^{T} \mathbf{x}_t\mathbf{x}_t'\right)^{-1} \quad y \quad \hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T} \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{t}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{t}'$$

Ejemplo 24. *Consideremos el modelo de oferta y demanda*

$$\begin{aligned} q_t^d =& a_1 + a_2p_t + a_3r_t + \epsilon_{1t} \\ q_t^s =& b_1 + b_2p_t + \epsilon_{2t} \\ q_t^d =& q_t^s \end{aligned}$$

en donde q_t^d *es la cantidad de un bien que desan comprar los consumidores,* q_t^s *es la cantidad de ese mismo bien que desean vender los productores,* p_t *es el precio del bien,* r_t *es la renta de los consumidores,* ϵ_{1t} *y* ϵ_{2t} *son las perturbaciones estocásticas que transforman el modelo microeconómico de oferta y demanda en un modelo econométrico. Esperamos que* $a_2 < 0$ *y* $b_2 > 0$*. La condición de equilibrio* $q_t^d = q_t^s$ *determina la cantidad vendida y comprada en el mercado y el precio de mercado. De aquí, las variables* q_t *y* p_t *se determian conjuntamente (variables endógeneas) en el modelo, mientras que la variable* r_t *se determina fuera del modelo (variable exógenas). Utilizando la notación dada para la forma estructural, podemos escribir el modelo de oferta y demanda como*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

Resolviendo el sistema para q_t *y* p_t*, obtenemos la forma reducida*

$$\begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

en donde

$$\begin{aligned} \pi_{11} =& \frac{\beta_{11} - \alpha_{12}\beta_{22}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad \pi_{12} = \frac{\beta_{12}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad u_{1t} = \frac{\epsilon_{1t} - \alpha_{12}\epsilon_{2t}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \\ \pi_{21} =& \frac{\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad \pi_{22} = \frac{-\alpha_{21}\beta_{12}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad u_{2t} = \frac{\epsilon_{2t} - \alpha_{21}\epsilon_{1t}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}. \end{aligned}$$

Conviene notar que en la forma estructural propuesta hemos fijado la cantidad demandada como la variable dependiente en la ecuación de demanda y el precio como la variable *dependiente en la ecuación de oferta. Esta elección es arbitraria y podemos alternativamente considerar que el precio es la variable dependiente en la ecuación de demanda y la cantidad vendida es la variable dependiente en la ecuación de oferta*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ q_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} \\ \beta'_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon'_{1t} \\ \epsilon'_{2t} \end{pmatrix}$$

que equivale a multiplicar las ecuaciones de demanda y oferta en (13.7) por $1/\alpha_{12}$ *y* $1/\alpha_{21}$*, respectivamente.*

13.2. El problema de la identificación

Definición 96. *Un parámetro de un modelo está identificado si su valor puede deducirse del conocimiento de la función de verosimilitud.*

Proposición 116. *Los parámetros de la forma reducida están identificados.*

Demostración. La distribución normal multivariante está completamente caracterizada por los dos primeros momentos (vector de medias y matriz de varianzas y covarianzas). De aquí, la forma reducida (13.6) caracteriza completamente la distribución de $\mathbf{Y}$, cuyos dos primeros momentos son

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Pi X} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{\Omega}$$

y su función de densidad conjuta es

$$p(\mathbf{Y}) = (2\pi)^{-mT/2}|\mathbf{\Omega}|^{-T/2} exp(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{y}_t - \mathbf{\Pi x}_t)'\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{\Pi x}_t))$$

que nos permite encontrar los estimadores de máxima verosimilitud

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = \left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{y}_t\mathbf{x}'_t\right)\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_t\right)^{-1} = \mathbf{YX}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{t}\hat{\mathbf{u}}'_\mathbf{t}$$

□

Corolario 12. *Un parámetro de la forma estructural está identificado si su valor puede deducirse de los parámetros de la forma reducida.*

Definición 97. *La tripleta* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$ *se denomina estructura del modelo (13.3).*

Definición 98. *Dos estructuras* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$ *y* $(\mathbf{A}_*, \mathbf{B}_*, \mathbf{\Sigma}_*)$ *son observacionalmente equivalentes o indistinguibles si conducen a la misma forma reducida.*

Definición 99. *Una estructura* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$ *es identificable si no existe otra estructura* $(\mathbf{A}_*, \mathbf{B}_*, \mathbf{\Sigma}_*)$ *indistinguible de* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$*.*

Proposición 117. *Si no se imponen restricciones sobre la estructura* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$*, ninguno de los parámetros estructurales está identificado.*

Demostración. Premultiplicando (13.3) por una matriz no singular $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$, obtenemos la forma estructural

$$\mathbf{PAY} + \mathbf{PBX} = \mathbf{PE}$$

cuya forma reducida es

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PBX} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{PE} = \mathbf{\Pi X} + \mathbf{U}$$

De aquí, las estructuras $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$ y $(\mathbf{PA}, \mathbf{PB}, \mathbf{P\Sigma})$ son indistinguibles. □

La demostración anterior nos sugiere un interpretación intuitiva del problema de identificación. Una ecuación estructural es identificable si no existe ninguna combinación lineal de ecuaciones estructurales que sea indistinguible de ella. Ahora bien, en (13.1) todas las ecuaciones incluyen las mismas variables endógenas y exógenas, por tanto, no podemos distinguir ninguna ecuación de las otras ni de cualquier combinación lineal de todas ellas. De aquí, al estimar una ecuación estructural no sabemos si realmente estamos estimando los parámetros de interés $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma})$ o, por el contrario, una combiación lineal de parámetros estructurales $(\mathbf{PA}, \mathbf{PB}, \mathbf{P\Sigma})$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 25. *En el modelo de oferta y demanda (24), la combinanción lineal* $\omega_1 q_t^q + \omega_2 q_t^d$ $(\omega_1 + \omega_2 = 1)$ *junto con la ecuación de equilibrio* $q_t^q = q_t^s$*, proporciona una ecuación*

$$q_t = (\omega_1 a_1 + \omega_2 b_1) + (\omega_1 a_2 + \omega_2 b_2)p_t + (\omega_1 a_3 + \omega_2 b_3)r_t + (\omega_1 \epsilon_{1t} + \omega_2 \epsilon_{2t})$$

que es indistinguible de la ecuación de demanda. De aquí, en la regresión q_t *sobre* 1, p_t *y* r_t *no sabemos si estamos estimando la ecuación de demanda*

$$q_t = a_1 + a_2 p_t + a_3 r_t + \epsilon_{1t}$$

o una combinación lineal de las ecuaciones de demanda y oferta. En cambio, no existe una combinación lineal de las ecuaciones de oferta y demanda que sea indistinguible de la ecuación de oferta. Esto sucede porque hemos impuesto una restricción: la variable r_t *no aparece en la ecuación de oferta. Si incluimos* r_t *en la ecuación de oferta, entonces está ecuación tampoco es identificable.*

13.3. Condiciones de orden y rango

Si el problema de identificación surge porque todas las ecuaciones estructurales incluyen las mismas variables, entonces una forma de resolver el problema es omitir algunas variables en (13.1) fijando algunos de los parámetros estructurales α_{ji} y β_{ji} en cero. Este tipo de restricciones se denominan **restricciones de exclusión**.

Proposición 118. **Condición de orden.** *Una condición necesaria para que una ecuación estructural sea identificable es que el número de varibles exógenas exluidas sea mayor o igual al número de endógenas incluidas menos uno.*

Proposición 119. **Condición de rango.** *Una condición necesaria y suficiente para que una ecuación sea identificable es que el rango de la matriz* $\mathbf{G}$ *sea igual a* $m - 1$*, en donde la matriz* $\mathbf{G}$ *está formada por los parámetros que las variables excluidas en dicha ecuación tienen asociados en las restantes ecuaciones.*

Sin perdida de generalidad nos centramos en la identificación de la primera ecuación estructural y ordenamos las variables endógenas y exógenas de tal modo que podemos particionar (13.2) como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ \mathbf{y}_{1t} \\ \mathbf{y}_{2t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1t} \\ \mathbf{x}_{2t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{2t} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}_t}$$

en donde hemos particionado el vector $\mathbf{Y}_t$ para resaltar que, en la primera ecuación, Y_{1t} es la variable a explicar, $a_{11} = 1$, la cual depende de m_2 variables endógenas $\mathbf{y}_{2t}$, pero no depende de las m_3 variables endógenas $\mathbf{y}_{3t}$, $\mathbf{a}_{13} = \mathbf{0}_{1\times m_3}$. Análogamente, hemos particionado el vector $\mathbf{X}_t$ para indicar que Y_{1t} depende de k_1 variables exógenas $\mathbf{x}_{1t}$, pero no depende de las k_2 variables exógenas $\mathbf{x}_{2t}$, $\mathbf{b}_{12} = \mathbf{0}_{1\times k_2}$. Obviamente, se cumple que $1+m_2+m_3 = m$ y $k_1+k_2 = k$. De aquí, particionamos la relación $\mathbf{A\Pi} = -\mathbf{B}$ como

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_{11} & \boldsymbol{\pi}_{12} \\ \mathbf{\Pi}_{21} & \mathbf{\Pi}_{22} \\ \mathbf{\Pi}_{31} & \mathbf{\Pi}_{32} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos las relaciones que podemos usar para determinar la identicafibilidad de la primera ecuación estructural

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_{11} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{\Pi}_{21} =& \mathbf{b}_{11} \\ \boldsymbol{\pi}_{11} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{\Pi}_{22} =& \mathbf{0} \end{aligned}\right\}$$

Las k_1 primeras ecuaciones $\mathbf{a}_{11}\mathbf{\Pi}_{11} = \mathbf{b}_{11}$ nos permiten obtener $\mathbf{b}_{11}$ a partir de $\mathbf{a}_{12}$. De las k_2 últimas ecuaciones $\mathbf{a}_{12}\mathbf{\Pi}_{22} = -\boldsymbol{\pi}_{11}$ podremos obtener los m_2 coeficientes $\mathbf{a}_{12}$ de las endógenas si $k_2 > m_2$. Esta es precisamente la condición de orden, que asegura que tenemos al menos tantas ecuaciones como incognitas. Ahora bien, esta condición no es suficiente para que exista solución, necesitamos m_2 ecuaciones linealmente independientes para determinar m_2 incognitas. De aquí, el rango de la submatriz $\mathbf{\Pi}_{22}$ tiene que ser igual a m_2, $\rho(\mathbf{\Pi}_{22}) = m_2$.

Para evitar el cálculo de la matriz $\mathbf{\Pi}_{22}$, es conveniente notar la siguiente relación

$$\rho(\mathbf{\Pi}_{22}) = \rho(\mathbf{G}) - m_3$$

en donde la matriz $\mathbf{G} = (\mathbf{A}_{23}\ \mathbf{B}_{22})$ se obtiene de un modo inmediato a partir de la forma estructural.

Definición 100. *De las condiciones de orden y rango extraemos las siguientes conclusiones:*

1. *si* $k_2 > m_2$ *y* $\rho(\mathbf{A}_{22}\ \mathbf{B}_{22}) = m - 1$, *la ecuación está sobreidentificada.*
2. *si* $k_2 = m_2$ *y* $\rho(\mathbf{A}_{22}\ \mathbf{B}_{22}) = m - 1$, *la ecuación está exáctamente identificada.*
3. *si* $k_2 < m_2$, *la ecuación está subidentificada.*

Ejemplo 26. *Consideremos el modelo de oferta y demanda*

$$\begin{aligned} q_t =& a_1 + a_2 p_t + a_3 r_t + \epsilon_{1t} \quad \textit{demanda} \\ q_t =& b_1 + b_2 p_t + \epsilon_{2t} \quad \textit{oferta} \end{aligned}$$

Las variables endógenas y exógenas del modelo son $(q_t,\ p_t)$ *y* $(1,\ r_t)$*. En la primera ecuación, no se excluye ningua variable; por tanto, no se cumple la condición de orden y la ecuación está subidentificada. En la segunda ecuación se excluye la variable exógena*

r_t; por tanto, se cumple la condición de orden $k_2 = m_1 2 = 1$. En cuanto a la condición de orden, la matriz $\mathbf{G} = (a_3)$, cumpliéndose que $\rho(\mathbf{G}) = m - 1 = 1$. Concluimos que la ecuación de demanda está exáctamente identificada.

Si modificamos el modelo incluyendo una variable en la ecuación de oferta

$$\begin{aligned} q_t =& a_1 + a_2 p_t + a_3 r_t + \epsilon_{1t} \quad \textit{demanda} \\ q_t =& b_1 + b_2 p_t + b_3 p_{t-1} \epsilon_{2t} \quad \textit{oferta} \end{aligned}$$

entonces ambas ecuaciones están exactamente identificadas.

Ejemplo 27. *Consideremos el siguiente modelo macroeconómico*

$$\begin{aligned} C_t =& \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \\ I_t =& \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 G_{t-1} + \epsilon_{2t} \\ Y_t =& C_t + I_t + G_t \end{aligned}$$

en donde $(C_t,\ I_t,\ Y_t)$ son las variables endógenas y $(G_t,\ G_{t-1})$ son las variables exógenas. Sustituendo la identidad en las ecuaciones de C_t e I_t tenemos

$$\begin{aligned} C_t =& a_0 + a_1 I_t + a_2 G_t + \epsilon_{1t} \\ I_t =& b_0 + b_1 C_t + b_2 G_t + b_3 G_{t-1} + \epsilon_{2t} \end{aligned}$$

en donde, siguiendo un razonamiento similar al del modelo de oferta y demanda, concluimos que la ecuación de consumo está exactamente identificada, mientras que la de inversión está subidentificada.

13.4. Métodos de estimación

En la estimación de un modelo de ecuaciones simultáneas podemos seguir dos estrategias: (1) estimar separadamente cada ecuación del sistema y (2) estimar conjuntamente todas las ecuaciones del sistema.

13.4.1. Estimación individual de ecuaciones. Cada variable endógena $\mathbf{y}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ puede expresarse como una combinación lineal de las restantes variables endógenas y de las variables exógenas más una perturbación estocástica estocástica

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j' \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}' \boldsymbol{\delta}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j \tag{13.8}$$

en donde $\mathbf{y}_j'$ es la j-ésima fila de $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}_j$ es la submatriz resultante de eliminar la j-ésima fila de $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ es la matriz $k \times T$ de variables exógenas, y $\boldsymbol{\epsilon}_j$ es j-ésima fila de $\mathbf{E}$.

Proposición 120. *El modelo lineal general (13.8) presenta endogeneidad*

$$\text{plim} \frac{1}{T} \mathbf{Y}_j \boldsymbol{\epsilon}_j = \mathbf{A}_j^{-1} \boldsymbol{\sigma}_j \neq 0$$

en donde $\mathbf{A}_j^{-1}$ es la submatriz resultante de eliminar la fila j-ésima de $\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{E}$ y $\boldsymbol{\sigma}_j$ es la j-ésima columna de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Demostración. Eliminando la fila j-ésima de la forma reducida

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}$$

obtenemos

$$\mathbf{Y}_j = -\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{E}$$

Vemos que $\mathbf{Y}_j$ es una transformación lineal de todas las perturbaciones de la forma estructural. De aquí,

$$\begin{aligned}
\text{plim}\,\frac{1}{T}\mathbf{Y}_j\boldsymbol{\epsilon}_j &= -\,\text{plim}\,\frac{1}{T}\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}\boldsymbol{\epsilon}_j + \text{plim}\,\frac{1}{T}\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}_j \\
&= -\,\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B}\,\text{plim}\,\frac{\mathbf{X}\boldsymbol{\epsilon}_j}{T} + \mathbf{A}_j^{-1}\,\text{plim}\,\frac{\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}_j}{T} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{A}_j^{-1}\begin{pmatrix} \text{plim}\,\frac{\sum_{t=1}^{T}\epsilon_{1t}\epsilon_{jt}}{T} \\ \text{plim}\,\frac{\sum_{t=1}^{T}\epsilon_{2t}\epsilon_{jt}}{T} \\ \vdots \\ \text{plim}\,\frac{\sum_{t=1}^{T}\epsilon_{mt}\epsilon_{jt}}{T} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_j^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \\ \vdots \\ \sigma_{mj} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

13.4.1.1. Mínimos cuadrados ordinarios. Dada la sencillez y amplia disponibilidad en paquetes estadísticos de este método de estimación, es siempre una tentación el estimar las ecuaciones por mínimos cuadrados ordinarios. Sin embargo, este estimador no tiene propiedades deseables en este contexto.

Proposición 121. *Los estimadores de mínimos cuadrados*

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j = (\mathbf{Y}_j\mathbf{M}_\mathbf{X}\mathbf{Y}_j')^{-1}\mathbf{Y}_j\mathbf{M}_\mathbf{X}\mathbf{y}_j \quad y \quad \hat{\boldsymbol{\delta}}_j = (\mathbf{X}\mathbf{M}_j\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\mathbf{M}_j\mathbf{y}_j$$

son inconsistentes, en donde $\mathbf{M}_\mathbf{X} = \mathbf{I}_T - \mathbf{X}'(\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{M}_j = \mathbf{I}_T - \mathbf{Y}_j'(\mathbf{Y}_j\mathbf{Y}_j')^{-1}\mathbf{Y}_j$.

Demostración. Notando que

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j &= \boldsymbol{\gamma}_j + (\mathbf{Y}_j\mathbf{M}_\mathbf{X}\mathbf{Y}_j')^{-1}\mathbf{Y}_j\mathbf{M}_\mathbf{X}\boldsymbol{\epsilon}_j \\
\hat{\boldsymbol{\delta}}_j &= \boldsymbol{\delta}_j + (\mathbf{X}\mathbf{M}_j\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\mathbf{M}_j\boldsymbol{\epsilon}_j
\end{aligned}$$

es fácil comprobar que

$$\text{plim}\,\frac{\mathbf{Y}_j\mathbf{M}_\mathbf{X}\boldsymbol{\epsilon}_j}{T} = \mathbf{A}_j^{-1}\boldsymbol{\sigma}_j \neq 0 \quad \text{y} \quad \text{plim}\,\frac{\mathbf{M}_j\boldsymbol{\epsilon}_j}{T} \neq \mathbf{0}$$

□

13.4.1.2. Mínimos cuadrados indirectos. Si las variables exógenas son fijas, la forma reducida cumple los supuestos básicos del modelo clásico. En este caso, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{Y}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}$$

es consistente.

Definición 101. *El estimador de mínimos cuadrados indirectos de* $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j$ *y* $\hat{\boldsymbol{\delta}}_j$ *se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} 1 & -\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\boldsymbol{\delta}}_j$$

en donde $(1 \ \ -\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j)$ *es la* j*-ésima fila de* $\mathbf{A}$ *y* $\hat{\boldsymbol{\delta}}_j$ *es la* j*-ésima fila de* $\mathbf{B}$ *cambiada de signo.*

Proposición 122. *El estimador de mínimos cuadrados indirectos es consistente si la ecuación está exactamente identificada.*

13.4.2. Mínimos cuadrados en dos etapas. Como su nombre indica, este método proporciona estimaciones de los parámetros de (13.8) siguiendo un procedimiento en dos etapas. En la primera etapa, se realiza la regresión de las variables endógenas explicativas $\mathbf{Y}_j$ sobre todas las variables exógenas del modelo $\mathbf{X}$, y se obtiene la matriz $(m-1\times T)$ de valores ajustados $\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{Y}_j\mathbf{X}'(\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}$ y la matriz de residuos $\hat{\mathbf{V}}_j = \mathbf{Y}_j - \hat{\mathbf{Y}}_j$. En la segunda etapa, se estima la ecuación de regresion

$$\mathbf{y}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j'\gamma_j + \mathbf{X}'\boldsymbol{\delta}_j + \mathbf{e}_j$$

que se obtiene sustituyendo la identidad $\mathbf{Y}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{V}}_j$ en (13.8), siendo $\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\epsilon}_j + \hat{\mathbf{V}}_j'\gamma_j$.

Proposición 123. *Los estimadores de mínimos cuadrados en dos etapas*

$$\hat{\gamma}_j = (\hat{\mathbf{Y}}_j\mathbf{M}_{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}_j')^{-1}\hat{\mathbf{Y}}_j\mathbf{M}_{\mathbf{X}}\mathbf{y}_j \quad y \quad \hat{\boldsymbol{\delta}}_j = (\mathbf{X}\hat{\mathbf{M}}_j\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\hat{\mathbf{M}}_j\mathbf{y}_j$$

son consistentes, $\hat{\mathbf{M}}_j = \mathbf{I}_T - \hat{\mathbf{Y}}_j'(\hat{\mathbf{Y}}_j\hat{\mathbf{Y}}_j')^{-1}\hat{\mathbf{Y}}_j$.

Demostración. Los estimadores sólo dependen de variables exógenas. □

Proposición 124. *El estimador de mínimos cuadrados es un estimador de variables instrumentales que usa* $\hat{\mathbf{Y}}_j$ *como instrumentos de* $\mathbf{Y}_j$ *y* $\mathbf{X}_j$ *como instrumentos de* $\mathbf{X}_j$.

Proposición 125. *Si la ecuación está exactamente identifica, el estimador de mínimos cuadrados en dos etapas es equivalente al de mínimos cuadrados indirectos.*

Proposición 126. *El estimador correcto de la varianza de la perturbación*

$$\hat{\sigma}_{jj}^2 = \frac{1}{T}(\mathbf{y}_j - \mathbf{Y}_j'\hat{\gamma}_j - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\delta}}_j)'(\mathbf{y}_j - \mathbf{Y}_j\hat{\gamma}_j - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\delta}}_j)$$

es consistente.

Definición 102. *El estimador de la clase* k *remplaza la matriz* $\mathbf{Y}$ *por* $\mathbf{Y} - k\hat{\mathbf{V}}$.