Herramientas para la Decisión en Operaciones

Tema 1. Programación lineal

Lidia Sánchez Ruiz
Beatriz Blanco Rojo

Departamento de Administración de Empresas

Programación lineal

➢ Objetivo:

Optimizar (maximizar o minimizar) una **función objetivo lineal** sometida a una serie de restricciones, también lineales.

¿Qué cantidad de producto/s (X_1, X_2, X_3...) tenemos que producir para maximizar beneficios?

¿Qué cantidad de producto/s (X_1, X_2, X_3...) tenemos que producir para minimizar costes?

➢ Conceptos básicos:

- **Factores productivos:** recursos empleados en la fabricación del bien o prestación del servicio. Pueden ser limitados o no limitados.
- **Proceso productivo:** combinación de factores productivos para la obtención de un determinado volumen de producto o prestación de servicio.
- **Rendimiento:** nombre genérico que reciben los beneficios unitarios o los costes unitarios asociados a un proceso productivo.
- **Restricciones:** limitaciones existentes. Pueden ser igualdades o desigualdades.

Programación lineal

- **Objetivo:**

  Optimizar (maximizar o minimizar) una **función objetivo lineal** sometida a una serie de restricciones, también lineales.

¿Qué cantidad de producto/s (X_1, X_2, X_3…) tenemos que producir para maximizar beneficios?

¿Qué cantidad de producto/s (X_1, X_2, X_3…) tenemos que producir para minimizar costes?

Función objetivo: $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3$

- **c_x Rendimiento:** nombre genérico que reciben los beneficios unitarios o los costes unitarios asociados a un proceso productivo.
- **X_j:** cantidad de producto o servicio a producir. Variables a encontrar.

Tipos de restricciones

- **Capacidad de las máquinas:**
  - La máquina 1 produce una unidad del producto A (x_1) en 4 horas y del producto B (x_2) en 6 horas. Disponemos de un total de 100 horas de máquina 1 a la semana.

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 <= 100 \qquad 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 <= 100$$

Coeficiente técnico: a_1

- **Disponibilidad de recursos:**
  - La empresa dispone de 80 horas/hombre a la semana. El producto A (x_1) necesita 0,5 h/unidad y el producto B (x_2) necesita 0,3 h/unidad.

$$0{,}5 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 <= 80$$

- **De demanda o producción máxima:**
  - La cantidad máxima que absorbe el mercado es de 400 unidades de producto.

$$x_1 + x_2 <= 400$$

- **De producción mínima:**
  - Como mínimo, la empresa ha de producir 60 unidades del producto A.

$$x_1 >= 60$$

Variables de holgura

- **<u>Capacidad de las máquinas</u>:**
  - La máquina 1 produce una unidad del producto A (x_1) en 4 horas y del producto B (x_2) en 6 horas. Disponemos de un total de 100 horas de máquina 1 a la semana.

$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 <= 100$ $\qquad$ $4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + h_1 = 100$

$h_1 > 0$: Horas que no utilizo de la máquina 1 (recurso ocioso).

$h_1 = 0$: Utilizo todas las horas (recurso ajustado o escaso).

- **<u>Disponibilidad de recursos</u>:**
  - La empresa dispone de 80 horas/hombre a la semana. El producto A (x_1) necesita 0,5 h/unidad y el producto B (x_2) necesita 0,3 h/unidad.

$0{,}5 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 < = 80$ $\qquad$ $0{,}5 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 + h_2 = 80$

$h_2 > 0$: horas hombre que no utilizo (recurso ocioso).

$h_2 = 0$: utilizo todas las horas (recurso ajustado o escaso).

Variables de holgura

- **De demanda o producción máxima:**
  - La cantidad máxima que absorbe el mercado es de 400 unidades de producto.

$x_1 + x_2 < = 400 \quad x_1 + x_2 + h_3 = 400$

$h_3 > 0$: demanda no satisfecha, potencial de mercado.

$h_3 = 0$: se satisface toda la demanda.

- **De producción mínima:**
  - Como mínimo, la empresa ha de producir 60 unidades del producto A.

$x_1 > = 60 \quad x_1 – h_4 = 0$

$h_4 > 0$: cantidad que se produce por encima del mínimo.

$h_4 = 0$: se produce el mínimo.

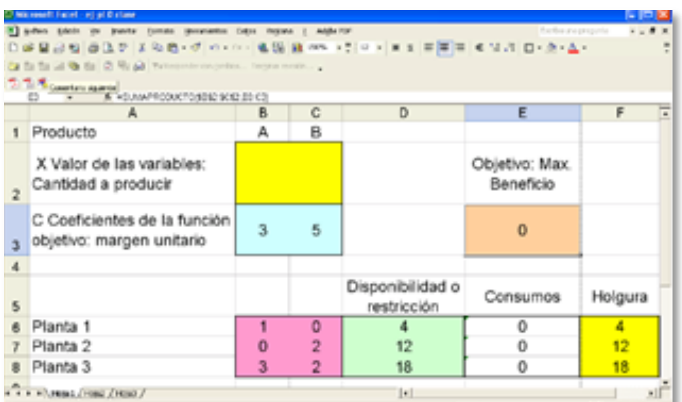
Métodos de resolución

➢ Métodos de resolución:

- ❖ Resolución gráfica: cuando hay dos variables.
- ❖ Método simplex manual – Resolución matricial.

			c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0
			x_1	x_2	…	x_n	h_1	h_2	…	h_m
0	H_1	b_1	A_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
0	H_2	b_2	A_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	h_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1
		0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0

- ❖ Excel: Solver.



El problema del transporte

➢ Planteamiento:

❖ Dados m orígenes y n destinos y siendo E_1, E_2, ..., Em las ofertas de producción o existencias en esos orígenes 1, 2... , m, respectivamente y siendo D_1, D_2..., Dn las cantidades que se van a demandar en los destinos 1, 2... , n respectivamente, y llamando c_{ij} al coste de transportar una unidad desde el origen i al destino j, tendremos inicialmente, como dato, la siguiente tabla, llamada tabla de costes directos (son los coeficientes de la función objetivo):

DESTINOS

ORIGENES	1	2	3	...	n	
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1n}	E_1
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_{2n}	E_2
3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...	C_{3n}	E_3
...	----------	----------	----------	----------	----------	...
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	..	C_{mn}	Em
	D_1	D_2	D_3	...	Dn	$\sum Ei = \sum Dj$

➢ Objetivo:

❖ Se tratará de determinar las incógnitas X_{ij} que serán las cantidades que se van a enviar desde cada origen a cada destino, pero con el objetivo de que el coste total de transporte o distribución sea mínimo, y teniendo en cuenta además que deben satisfacerse las demandas y no excedernos de las disponibilidades o existencias.

El problema del transporte

- **Casos especiales en el problema del transporte:**
  - **Orígenes y destinos ficticios:**

    Los métodos existentes para resolver el problema del transporte suponen que en el planteamiento del problema las restricciones tienen signo igual y, por tanto, la suma de ofertas y demandas coincide. En los casos en que esto no es así, podemos adaptar el problema al planteamiento general del problema del transporte. Para realizar esta transformación introducimos un origen o un destino ficticio o artificial. Este concepto es análogo a las variables de holgura de la Programación lineal.

El problema del transporte

➢ Casos especiales en el problema del transporte:

❖ Restricción referente al hecho de que una variable tome valor cero:

En algunos casos, el planteamiento del problema impone la restricción de que una de las variables haya de ser cero necesariamente. En este caso, si la variable tomara un valor distinto de cero, el problema no tendría solución.

Una opción inmediata es introducir la restricción directamente (x_{ij} < = 0). Pero el incrementar el número de restricciones (especialmente cuando no es necesario como en este caso), también incrementa el tamaño de las matrices, lo que en algunos casos puede provocar problemas para resolver o imponer equipos más potentes.

Lo mejor es NO introducir una restricción adicional, y en su lugar trabajar manipulando los coeficientes de la función objetivo.

La manipulación consiste en cambiar el coeficiente de la función objetivo afectado (c_{ij}) y en su lugar asignar un número desproporcionadamente grande M (negativo o positivo) de forma que si la variable tomase valor, produjese un efecto enorme contrario al objetivo buscado.

El problema del transporte

- **Casos especiales en el problema del transporte:**
  - **Cuando se quiere asignar un valor a una variable**:
    - Dos casos:

      A. Queremos que la variable sea al menos ese valor. $x_{ij} >= q$:
      - Se asigna la cantidad q a la variable.
      - Se resta de los términos independientes de cada restricción afectada (fila y columna) la cantidad q asignada.
      - Se resuelve el problema.
      - Se suma al valor de la función objetivo la cantidad $q \cdot c_{ij}$.
      - Se suma al valor de la variable la q.

El problema del transporte

- **Casos especiales en el problema del transporte:**
  - **Cuando se quiere asignar un valor a una variable**:
    - Dos casos:

B. Que la variable sea exactamente ese valor. $x_{ij} = q$:

- Se asigna la cantidad q a la variable.
- Se resta de los términos independientes de cada restricción afectada (fila y columna) la cantidad q asignada.
- Para que la solución no asigne más a esa variable, tenemos que forzar que valga cero. Para ello se cambia el coeficiente c_{ij} por un valor M muy grande. Positivo si es un problema de mínimo. O negativo si es de máximo.
- Se resuelve el problema.
- Se suma al valor de la función objetivo la cantidad $q \cdot c_{ij}$.
- Se suma al valor de la variable la q.