

Herramientas para la Decisión en Operaciones

Tema 1. Ejercicio 1. Programación lineal Interpretación informe sensibilidad



Lidia Sánchez Ruiz
Beatriz Blanco Rojo

Departamento de Administración de Empresas

Este tema se publica bajo Licencia:
[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

**EJERCICIO 1. PROGRAMACIÓN LINEAL
INTERPRETACIÓN INFORME SENSIBILIDAD**

Una empresa fabrica 3 productos: P1, P2 y P3. En el proceso de producción se usan las materias primas R1 y R2 que se procesan en las líneas F1 y F2. En la tabla siguiente se ven los datos del problema.

| Recurso | Unidades | Uso por unidad | | | Capacidad diaria máxima |
|---------|----------|----------------|----|----|-------------------------|
| | | P1 | P2 | P3 | |
| F1 | Minutos | 1 | 2 | 1 | 430 |
| F2 | Minutos | 3 | 0 | 2 | 460 |
| R1 | kilos | 1 | 4 | 0 | 420 |
| R2 | kilos | 1 | 1 | 1 | 300 |

La demanda mínima diaria de P2 es de 70 unidades, y la demanda máxima de P3 es de 240 unidades. Las contribuciones de P1, P2 y P3 a los beneficios son de 300, 200 y 500 u.m. por unidad respectivamente.

Celdas cambiantes

| Celda | Nombre | Valor | Gradiente | Coefficiente | Aumento | Disminución | Límites de sensibilidad | |
|---------------|--------------|-------|-----------|--------------|------------|-------------|-------------------------|----------|
| | | Igual | reducido | objetivo | permisible | permisible | Inferior | Superior |
| \$B\$2 | Variables P1 | 0 | -200 | 300 | 200 | 1E+30 | -1E+30 | 500 |
| \$C\$2 | Variables P2 | 70 | 0 | 200 | 300 | 1E+30 | -1E+30 | 500 |
| \$D\$2 | Variables P3 | 230 | 0 | 500 | 1E+30 | 200 | 300 | 1E+30 |

Restricciones

| Celda | Nombre | Valor | Sombra | Restricción | Aumento | Disminución | Límites de sensibilidad | | Holgura | |
|----------------|--------------------|-------|--------|--------------|------------|-------------|-------------------------|----------|---------|----|
| | | Igual | precio | lado derecho | permisible | permisible | Inferior | Superior | | |
| \$E\$6 | F1 | 370 | 0 | 430 | 1E+30 | 60 | 370 | 1E+30 | 60 | <= |
| \$E\$7 | F2 | 460 | 0 | 460 | 1E+30 | 0 | 460 | 1E+30 | 0 | <= |
| \$E\$8 | R1 | 280 | 0 | 420 | 1E+30 | 140 | 280 | 1E+30 | 140 | <= |
| \$E\$9 | R2 | 300 | 500 | 300 | 0 | 230 | 70 | 300 | 0 | <= |
| \$E\$10 | Produce. mínima P2 | 70 | -300 | 70 | 35 | 0 | 70 | 105 | 0 | >= |
| \$E\$11 | Demanda maxima P3 | 230 | 0 | 240 | 1E+30 | 10 | 230 | 1E+30 | 10 | <= |

a. La dirección de la empresa evalúa medios para mejorar la situación financiera de la compañía. Describa la factibilidad y cómo afectan las siguientes propuestas a la solución y a los beneficios: a. Elevar el beneficio unitario de P3 un 20%, vía reducción de su coste variable unitario.

Elevar el beneficio un 20% supone que éste pasa de 500 a 600, estamos dentro de los límites ya que el aumento permisible es de más infinito. Al estar dentro de los límites podemos afirmar que la solución actual sigue siendo óptima, luego no habrá cambios en la producción (es decir, seguiremos produciendo 70 unidades de P2 y 230 unidades de P3, no utilizaremos 60 de F1 y 140 de R1 y produciremos 10 de P3 por encima del contrato del cliente). Sin embargo, sí se producirá un cambio en el beneficio. En concreto, nuestro beneficio aumentará 23.000um (100 um de aumento del precio * 230 unidades que produzco de P3).

b. Elevar el beneficio unitario de P3 un 20%, vía aumento de precio. Esto supondría una reducción de la demanda de 240 a 210.

A diferencia del caso anterior, en esta situación se producen dos cambios simultáneos:

- a) Un cambio en el coeficiente objetivo de P3, que pasa de 500 a 600.
- b) Un cambio en la restricción de demanda máxima de P3, que pasa de 240 a 210.

El análisis de sensibilidad es válido para cambios en un único parámetro, luego al cambiar dos (coeficiente de la función objetivo y restricción), los valores (límites de sensibilidad y gradiente reducido y precio sombra) ya no están operativos. Por lo tanto, el efecto de ambas medidas no lo podemos conocer con la información actual ya que es necesario recalcular.

No obstante, analizando por separado, se interpretaría:

-El efecto de la primera a) ya lo conocemos, lo hemos expresado en el apartado anterior, la solución seguiría siendo óptima. Solo cambiaría el beneficio, reduciéndose.

-Pero, en cuanto al efecto de la reducción en la restricción: puesto que estamos fuera de los límites (ya que la disminución permisible es 10 y la reducción que analizamos es de 30), la solución actual deja de ser factible (alguna variable tomaría valor negativo y por tanto no cumple con las condiciones de no negatividad) y por lo tanto hay que recalcular la solución.

Al cambiar la selección de variables básicas, cambia la matriz B y por tanto no podemos utilizar la hoja de cálculo matricial para hacer simulación, es necesario resolver de nuevo con solver.

-En conjunto, sabemos que va a cambiar la solución (tanto la selección de variables básicas como su valor) y que se va a reducir el beneficio, pero no podemos cuantificarlo. Hay que recalcular la solución con solver.

c. La materia prima R2 parece ser un factor crítico para limitar la producción actual. Se pueden asegurar unidades adicionales con un proveedor distinto pero que nos cobra un precio mayor que el actual. ¿Nos interesa adquirir unidades adicionales?, ¿Cuántas?, ¿Cuánto estaríamos dispuestos a pagar por ellas?

Efectivamente la materia prima R2 es un recurso escaso (holgura= 0, precio sombra>0). En principio, dado que el precio sombra es positivo, podríamos afirmar que sí nos interesa adquirir más unidades de esa materia prima. El precio sombra, además, nos indica el precio máximo que la empresa está dispuesta a pagar, en este caso, como mucho estará dispuesta a pagar 500 u.m. por cada unidad adicional de R2.

Sin embargo, si nos fijamos en los límites, el aumento permisible es cero.

Luego, con la información actual, sabemos que nos interesaría adquirir más cantidad de recurso, pero no podemos saber ni qué cantidad ni a qué precio máximo. Habría que recalcular la solución poniendo en la restricción asociada, en lugar de 300 301, y observar el nuevo precio sombra asociado y los límites de sensibilidad.

d. Las capacidades de F1 y F2 pueden aumentar hasta 40 minutos por día, cada una con un coste adicional de 35 u.m. diarias. ¿Interesa contratar capacidad adicional en la línea F1?, ¿Y en la F2? ¿Cuántos minutos interesaría incrementar la capacidad diaria de cada línea, al precio indicado?

En el caso de F1 no nos interesa adquirir más capacidad puesto que F1 es un recurso ocioso (holgura >0). En el caso de F2 tampoco nos interesa adquirirlo porque es un recurso ajustado (holgura=0, precio sombra=0). Es decir, consumimos toda la capacidad pero unidades adicionales no suponen ningún aumento en el beneficio.

e. El principal comprador del producto P2 pide que se aumente su entrega diaria de las 70 unidades actuales, a 100. ¿Nos interesa? ¿En qué condiciones?

En primer lugar comprobamos que aumentar la producción a 100 ud está dentro de los límites de la restricción, ya que el aumento permisible es de 35. Ahora mismo, por cada unidad adicional que produzcamos de P2 nuestro beneficio disminuye en 300 u.m. (ver precio sombra). Por lo tanto, para que nos interese producirlo el cliente debería compensar esa pérdida y estar dispuesto a pagar un precio superior. En concreto el precio debería aumentar, como mínimo, en 300 u.m. Si el precio aumenta 300 u.m. no habrá variaciones en el beneficio, puesto que cubriremos la pérdida. Si el aumento es superior a 300 u.m., obtendremos algún aumento en el beneficio.

f. El tiempo de procesamiento de P1 en F2 se puede reducir de 3 a 2 minutos por unidad, con un costo adicional de 4 u.m. diarios. ¿Nos interesa?

Este cambio supone una modificación en un coeficiente técnico asociado a P1 y en el coeficiente de P1 en la función objetivo. Al producirse un cambio en un coeficiente técnico, nos encontramos ante un proceso distinto. Por lo tanto, vamos a definir un producto nuevo con el nuevo coeficiente y el resto de coeficientes técnicos iguales a P1. Definimos un nuevo producto porque, tal y como vimos en otros ejercicios, el mismo producto con diferente proceso se trata como un producto nuevo.

Desde el punto de vista matemático, el cambio supone la introducción de una nueva variable/producto (x_i), con su proceso (P_i). Para determinar si interesa reducir el tiempo en F2 a cambio de aumentar el coste, habría que analizar matricialmente el cambio que se produce en la fila de indicación (no podemos analizarlo con el informe de sensibilidad por dos razones: no analiza la sensibilidad en los coeficientes técnicos y no se pueden analizar dos cambios simultáneos (coeficiente técnico y coeficiente de la función objetivo)).

Para analizar cómo cambia la fila de indicación, hemos de calcular el valor del nuevo elemento de la fila de indicación asociado a la nueva variable (w_i).

- Si el nuevo elemento w_i es mayor que cero, el cambio no interesa. El hecho de que el valor sea positivo nos indica que la solución actual (sin el cambio en el coeficiente técnico) ya es óptima.
- Si el nuevo elemento w_i es menor que cero, el cambio nos interesa. Un valor negativo en la fila de indicación señala que la solución no es óptima, luego en este caso hay que reoptimizar.
- Por último, un valor de w_i igual a cero, indica la presencia de óptimos alternativos.

Para calcular el valor w_i aplicamos la fórmula que ya conocemos que, sustituyendo, queda como sigue:

$$w_i = C_B \cdot B^{-1} \cdot P_i - c_i = (200, 500, 0, 0, 0, 0) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} - (300-4)=204$$

El valor obtenido es positivo, luego nos indica que la solución actual (sin el cambio en el coeficiente técnico) es óptima. Por lo tanto no interesa la reducción de tiempo.

A efectos operativos, cuando se produce un cambio en un coeficiente técnico, lo que se hace es cambiar el dato en el problema y resolver otra vez con solver.

1) ¿Cuál es la producción final?

$P_1 = 0$; $P_2 = 70$; $P_3 = 230$

2) ¿Cuáles son las variables básicas positivas?

P_2 ; P_3 ; H_1 ; H_3 ; H_6

3) ¿Hay solución degenerada? Si la hay ¿Cuál es la variable degenerada?

Sí hay solución degenerada porque hay menos variables básicas positivas (5) que restricciones (6).

La variable degenerada es aquella que, tomando valor cero, también tiene cero en la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra). En este caso la variable básica degenerada es H_2 .

4) ¿Hay óptimos alternativos?

No. En la fila de indicación (coste o gradiente reducido y precio sombra) hay tantos ceros como variables básicas.

5) Interpretación de las holguras

$H_1 = 60$. Nos sobran 60 minutos en F_1 . Por lo tanto es un recurso ocioso.

H2 = 0. Consumimos todos los minutos de F2 (valor final = restricción). Además, puesto que el precio sombra es cero, podemos afirmar que unidades adicionales no suponen aumento de beneficio, luego estamos ante un recurso ajustado.

H3 = 140. Nos sobran 140 kilos de la materia prima R1, es un recurso ocioso.

H4 = 0. Consumimos todos los kilos de materia prima R2. Además, cada unidad adicional supondría un aumento de 500 u.m. en el beneficio. Luego es un recurso escaso.

H5 = 0. Producimos exactamente el mínimo exigido de P2 para cumplir con el contrato del cliente. No producimos nada más para otros clientes.

H6 = 10. Existe una demanda de P3 no cubierta o no satisfecha, ya que el máximo es 240 y producimos 230. También puede interpretarse como lo que falta para alcanzar el grado de saturación del mercado o como potencial de crecimiento en ese mercado.

6) Por un problema con el proveedor, la cantidad disponible de materia prima R2 ha disminuido hasta 50 ¿qué cambios provoca este cambio en la producción y en el beneficio?

En esta situación nos encontramos fuera de los límites luego hay que recalcular la solución ya que esta solución deja de ser factible (alguna variable tomaría valor negativo).

¿Y si la disponibilidad de R2 sólo disminuye hasta 250?

En este caso nos encontramos dentro de los límites. Por lo tanto, las variables básicas seguirán siendo las mismas pero su valor cambiará. En cuanto al beneficio, éste disminuirá en 25.000 (50 unidades que se reducen, 500€ cada unidad).

7) ¿Qué ocurre si el beneficio unitario de P2 aumenta hasta 400?

Puesto que estamos dentro de los límites, cambiará el beneficio pero no cambiará la producción. El beneficio aumentará en 14.000 (70 ud por 200€ de aumento por unidad).

¿Y si aumenta hasta 550?

Nos encontramos fuera de los límites luego la solución ya no sería óptima, tenemos que reoptimizar.

8) Dada la extrema competitividad de mercado, la empresa tiene que bajar el precio de P3 para seguir siendo competitiva ¿Cuánto puede bajar el precio de P3 sin que afecte al programa de producción actual?

El precio de P3 puede disminuir como mucho 200€ (disminución permisible), es decir, llegar a ser de 300 (límite inferior) y el programa de producción no se verá afectado.

g. ¿Si un cliente estuviera interesado en la adquisición del producto P1, nos interesaría atender su pedido en las condiciones actuales? Razonar la respuesta.

En las condiciones actuales NO nos interesa producir el producto P1, porque por cada unidad del producto P1 que produjésemos se produciría una reducción del beneficio en 200 u.m. (gradiente reducido).

Por tanto para que el producto fuera interesante, su margen unitario debería aumentar en AL MENOS 200 u.m. (con un incremento del beneficio unitario igual a 200 supondría que no perderíamos; y con un incremento superior a 200 ya ganaríamos). Por tanto para que nos interesase atender el pedido del cliente este debería aceptar un incremento de precio de al menos 200 u.m.