

Métodos Matemáticos en la Ingeniería (Curso 2011/2012)

Ejercicios TEMA 6: Modelos de regresión por mínimos cuadrados

- 6.1** En una ciudad se quiere hacer un estudio sobre la utilización de una determinada línea urbana de autobús. Para ello se midieron en una misma parada 31 valores de intervalos de tiempo, en minutos, que transcurren entre las sucesivas llegadas de autobuses de dicha línea (X) y el número de viajeros que suben a él (Y), resultando los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= 290 & \sum_i x_i^2 &= 2848 & \sum_i x_i y_i &= 2995 \\ \sum_i y_i &= 315 & \sum_i y_i^2 &= 3981 & & \end{aligned}$$

- Calcule el tiempo medio de llegada entre los autobuses en esta muestra.
 - Determine la desviación estandar del número de viajeros que suben al autobús.
 - Estudie la relación entre X e Y mediante el coeficiente de correlación.
 - Calcule la recta de regresión lineal del número de viajeros respecto al tiempo.
 - Estime, con la recta hallada, el número de viajeros que suben al autobús cuando el intervalo de tiempo entre autobuses es de 5 minutos.
 - Calcule el coeficiente de determinación.
- 6.2** En la siguiente tabla se recogen datos de la presión sanguínea y la edad de una muestra de 12 individuos:

Edad (años)	56	42	70	35	64	47	53	49	38	42	68	60
Presión sanguínea (mmHg)	147	122	160	118	150	130	146	145	113	145	152	155

- Estudiar la relación entre ambas variables.
 - Calcular la recta de regresión de la presión sanguínea en función de la edad.
 - Estimar la presión sanguínea para una edad de 65 años.
 - Determinar el error estandar de la estimación.
- 6.3** Un ciclista se desplaza en línea recta con un movimiento uniforme para el cual según las leyes de la mecánica su posición x en un instante t vendrá dada por la ecuación $x = x_0 + vt$ donde x_0 es la posición inicial y v la velocidad. Se han tomado los siguientes valores de su posición x en metros y el tiempo t en segundos:

x (metros)	14	26.2	37.7	51	61.8	76	84.2
t (segundos)	2	4	6	8	10	12	14

A partir de estos datos estimar:

- el coeficiente de correlación
 - los valores de la posición inicial y la velocidad del ciclista por medio de una regresión lineal.
 - el espacio recorrido por el ciclista transcurridos 9 segundos.
 - el error estandar de la estimación y la fracción de varianza explicada por el modelo.
- 6.4** Para un conjunto de piezas de mármol que están siendo sometidas a un proceso de pulido, se han recogido datos sobre el peso (Y) que han disminuido desde el inicio del mismo (en gramos) y el tiempo (X) que llevan sometidas a tal proceso (en minutos), de los cuáles se tiene la información:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 x_i &= 77 & \sum_{i=1}^8 y_i &= 75.8 \\ \sum_{i=1}^8 x_i^2 &= 905 & \sum_{i=1}^8 y_i^2 &= 879.34 & \sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i &= 891 \end{aligned}$$

A partir de esta información se pide:

- Estime el modelo lineal que explica el peso perdido por las piezas en función del tiempo que lleva el proceso de pulido.
- Según el modelo considerado, qué peso se espera que va a perder una pieza que está un cuarto de hora sometida al proceso.
- Calcule el coeficiente de correlación entre ambas variables e indique, razonadamente, el tipo de relación que tienen.
- Calcule la fracción de varianza explicada por el modelo.

6.5 En un experimento se han recogido los siguientes datos de presión de un gas para varios valores de su volumen, manteniendo constante la temperatura.

V (mm^3)	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0
P (mm de Hg)	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1

Los principios de la termodinámica relacionan los valores de volumen (V) y presión (P) de un proceso adiabático mediante la expresión $PV^\gamma = C$ siendo γ y C dos constantes. Calcular:

- Los valores de γ y C expresando la presión en función del volumen.
- Estimar el valor de la presión para un volumen de $90 mm^3$

6.6 Se dispone de los siguientes datos de un experimento acerca de la presión (P) sobre los pilares de un puente que ejerce el viento (V).

V (Km/h)	16	24	36	54	81	121.5
P (Ton/m^2)	0.0014	0.037	0.076	0.187	0.408	0.918

- Ajustar el modelo $P = cV^b$ aplicando el método de mínimos cuadrados a los datos de la muestra.
- Si una presión de $2 Ton/m^2$ produce el colapso de los pilares del puente, estimar la velocidad de viento que produce ese efecto en el puente.

6.7 El número de pulgadas que un muro de reciente construcción se ha hundido en el terreno viene representado por la siguiente expresión:

$$z = 3 - 3e^{\alpha t}$$

donde t representa el tiempo en meses. A partir de las siguientes medidas recogidas

t (meses)	2	4	6	12	18	24
z (pulgadas)	1.07	1.88	2.26	2.78	2.97	2.99

- Estimar el valor de α aplicando el método de mínimos cuadrados.
- Obtener una estimación del hundimiento para el mes 26.

6.8 Ajustar un modelo lineal a la deformación (D) de una viga en función de la carga (C) a partir de los siguientes valores registrados:

C (miles de kilos)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
D (centésimas de mm)	40	87	112	160	215	240	265	310	335	390	410	455

- Estudiar el ajuste del modelo mediante el error estandar de la estimación y el coeficiente de determinación.
- Obtener una estimación de la deformación de la viga para una carga de 7000 Kilos.

6.9 En un estudio se han recogido los siguientes valores de los ingresos totales de 40 familias frente a los gastos fijos por mes en euros:

Ingresos Gastos	300-600	600-840	840-1100	1100-1350	1350-1700
35-70	2				
70-110	1	3	5		
110-150			8	10	
150-180				6	2
180-300					3

Calcular:

- la recta de regresión mínimo cuadrática de los gastos fijos sobre los ingresos.
- el coeficiente de correlación lineal.
- con la recta calculada estime, los gastos fijos de una familia cuyos ingresos son de 200 euros.

x_i	y_j	n_{ij}	$x_i y_j n_{ij}$	$x_i^2 n_{ij}$	$y_j^2 n_{ij}$
450	52.5	2	47250	405000	5512.5
450	90	1	40500	202500	8100
720	90	3	194400	1555200	24300
970	90	5	436500	4704500	40500
970	130	8	1008800	7527200	135200
1225	130	10	1592500	15005250	169000
1225	165	6	1212750	9003750	163350
1525	165	2	503250	4651250	54450
1525	240	3	1098000	6976875	172800
Totales		40	6133950	5003252	773212.3

6.10 En la siguiente tabla se recogen datos de un experimento en el que se ha analizado el tiempo de secado de un tipo de pintura dependiendo de la cantidad añadida de un aditivo que reduce el tiempo de secado.

Tiempo de secado (horas)	12	10.5	10	9	8.5	8	7.5	7.2	7
Aditivo (gramos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Sabiendo que la relación entre la variable tiempo (T) y la cantidad de aditivo (C) se expresa mediante un modelo del tipo $T = \beta C^\alpha$ siendo β y α dos constantes, determinar:

- dibuje un diagrama de dispersión para verificar que es razonable suponer que la relación es de tipo potencial.
- los valores de β y α .
- el tiempo de secado de la pintura cuando se mezclan 9.5 gramos de aditivo.