E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación — Curso 2010-2011

Grados E.T.S.I. Industriales — Asignatura: Cálculo I

PRUEBAS DE EVALUACIÓN

A continuación se presentan 5 preguntas con 4 respuestas posibles. En cada pregunta hay una única respuesta correcta. Cada pregunta acertada y bien justificada valdrá 1 punto. Las preguntas con más de una respuesta anotada o sin respuesta anotada puntúan con 0.

NÚMEROS COMPLEJOS

1

El número complejo $\dfrac{z}{1+\sqrt{3}\,i}$ es imaginario negativo si el argumento de z es:

A) $\dfrac{\pi}{3}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $-\dfrac{\pi}{6}$ D) $\dfrac{5\pi}{6}$

Justificación:

2

Dados los números complejos $z_1=-2+2i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, el cociente $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ se expresa así:

A) $\sqrt{2}-i$ B) $2\cdot e^{-i\pi/6}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$ D) $\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/12}$

Justificación:

3

Sea **z** un número complejo. Las funciones exponenciales complejas, e^z y e^{-z}, verifican:

A) $\arg(e^{-z}) = -\text{Im}(z)$ B) $|e^{-z}| = e^{\text{Real}(z)}$

C) $|e^z| = e^{|z|}$ D) $\arg(e^{-z}) = \text{Im}(z)$

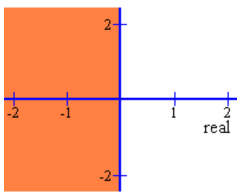
Justificación:

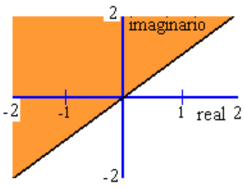
4

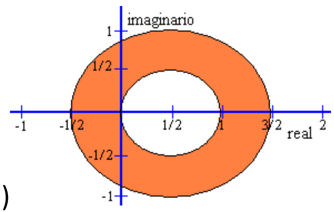
Se consideran las desigualdades complejas siguientes:

(a) $\text{Re}(z) \le 0$ (b) $\frac{1}{2} \le \left| z - \frac{1}{2} \right| \le \frac{3}{2}$ (c) $\text{Re}(z) \ge \text{Im}(z)$

y las regiones del plano sombreadas siguientes:

(1) 

(2) 

(3) 

Las soluciones de las desigualdades se corresponden con las regiones de la siguiente forma:

A) (a) con (1) y (b) con (3) B) (b) con (2)

C) (a) con (1) y (c) con (2) D) Ninguna de las anteriores

Justificación:

5

¿Cuál es la expresión binómica de las raíces cúbicas del número $-27\cdot i$?

A) $3i\,;\quad -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\,;\quad \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

B) $-3i\,;\quad -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\,;\quad \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

C) $3i\,;\quad -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\,;\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

D) Ninguna de las anteriores

Justificación:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1

Dibujar la gráfica de las siguientes funciones, indicar cuál es su dominio y estudiar si cumplen alguna de las siguientes propiedades: par o impar, periódica, monótona o acotada.

a) $f(x) = arctg(x)$	b) $f(x) = -\log(x)$
Dom (f) =	Dom (f)

Justificación:

2

Se considera la curva de ecuación $y = e^{x^2 + h \cdot x} - 1$. Determínese el valor de **h** para que la tangente en el origen sea la bisectriz del primer cuadrante.

Justificación:

3

Calcular el límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^4 sen^2 x}{tg\left[\log\left(1-x^2\right)\right] \cdot \left(1-\cos x\right)^2}$

Justificación:

4

a) Calcular el valor aproximado de $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, utilizando la diferencial primera (aproximación lineal) de una función *f(x)* adecuada.

b) Hallar una cota del error cometido en la aproximación anterior.

c) ¿Cuántos términos **n** del polinomio de Taylor, $T_n[f(x);0]$, se deberían tomar en la aproximación de $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ para que el error cometido fuese menor que 0,03?

Se recomienda obtener el valor de n tanteando, desde n = 1 en adelante

Justificación:

5

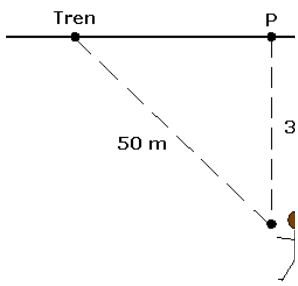
Obtener la expresión del polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, centrado en el punto a = 0.

Justificación:

6

Una persona se encuentra a 30 metros de un punto P de una vía del tren (ver figura).

Un tren se acerca por dicha vía a 25 m/s. ¿Con qué razón decrece la distancia entre el tren y la persona cuando se encuentran a 50 metros de distancia?



Justificación:

7

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva siguiente en el punto (-2,0)

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

Justificación:

8

Se pretende construir un depósito abierto por arriba, de base cuadrada y con capacidad 1 m^3. Se sabe que el precio del material de la base es 10 € por m^2, mientras que el de los laterales es de 5 € el m^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de ese depósito paralelepipédico para que el coste sea mínimo?

Justificación:

NOTA: Se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

SERIES NUMÉRICAS

1

Estudiar el carácter de las siguientes series numéricas. Justificar la respuesta. En el caso de que sea posible hallar la suma:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\log 3n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2-3n}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$

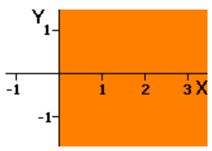
Justificación:

NOTA: Se deberá justificar las respuestas explicando el procedimiento seguido en la resolución de los ejercicios.

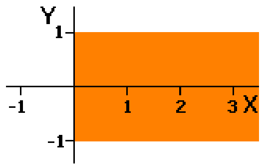
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1

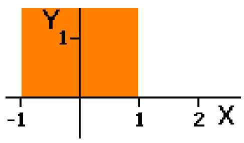
La representación gráfica del dominio de la función $f(x,y)=\log(x)+arc\ sen(y)$ es la región coloreada siguiente:



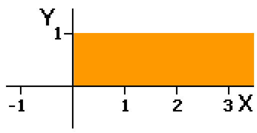
A)



B)



C)



D)

Justificación:

2

Sea la función $f(x,y)$, para la cual en el punto (a,b) hay una dirección que viene dada por el vector $\vec{u}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+sen\varphi\cdot\vec{j}$ en la que no existe derivada direccional. Entonces:

a) f no es diferenciable en (a,b)

b) f no es continua en (a,b)

c) ninguna respuesta es correcta.

Justificación:

3

La función $f(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)$ verifica:

a) $f''_{xx}+f''_{yy}=0$

b) $f''_{xx}-f''_{yy}=0$

c) $f''_{xx}+f''_{yy}=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

d) ninguna de las igualdades anteriores

Justificación:

4

La altura ***h*** de una montaña con respecto al nivel del mar , viene dada por la expresión $h(x,y)=1000-0{,}1\cdot x^2-0{,}5\cdot y^2$, donde ***x*** representa la dirección Este e ***y*** representa la dirección Norte. Un montañero está en el punto de la montaña de coordenadas $(10,10)$. Se pide:

a) Analizar si el montañero asciende o desciende cuando camina en las direcciones Norte, Este y Noreste, respectivamente.

b) Hallar las direcciones de ascenso y descenso más rápido, en dicho punto.

c) Hallar la derivada direccional máxima en el punto.

Justificación:

5

Hallar los extremos absolutos de la función $z=f(x,y)=y-x^2$, sobre el recinto plano D limitado por una elipse, que está definido por la ecuación $D\equiv\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 9\right\}$. Dibujar el dominio D y la posición de los puntos críticos de *f* sobre dicho dominio.

Justificación:

NOTA: Se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1

Hallar el área de la región A, situada en el primer cuadrante, limitada por las rectas de ecuaciones:

$$x=0\,; \quad x=1\,; \quad y=2+\left(\frac{\pi}{4}-2\right)\cdot x$$

así como por la gráfica de la función $y=arc\,tg\left(x\right)$. Hacer un esquema sencillo de la región A.

Justificación: