Expresiones Regulares

Una forma diferente de expresar un lenguaje

Universidad de Cantabria

Esquema

Motivación

El problema que se pretende resolver mediante la introducción de las expresiones regulares es el de obtener algún tipo de descriptores para los lenguajes generados por las gramáticas regulares.

Motivación

¿Cuales son los lenguajes más sencillos?

- Los conjuntos finitos,
- La concatenación de palabras de diferentes lenguajes,
- La repetición de elementos una y otra vez (operación estrella).

Motivación

¿Cuales son los lenguajes más sencillos?

- Los conjuntos finitos,
- La concatenación de palabras de diferentes lenguajes,
- La repetición de elementos una y otra vez (operación estrella).

Motivación

¿Cuales son los lenguajes más sencillos?

- Los conjuntos finitos,
- La concatenación de palabras de diferentes lenguajes,
- La repetición de elementos una y otra vez (operación estrella).

Ejemplo de operaciones

Supongamos que el alfabeto sobre el que definimos nuestro lenguaje $\Sigma = \{a, b\}$ y tenemos estos lenguajes

$$L_1 := aa, ab, \ L_2 := ba, bb.$$

Podemos definir estos nuevos lenguajes:

- $L_1 \cup L_2 := \{aa, ab, ba, bb\}$,
- $L_1 L_2 := \{aaba, abbb, abba, aabb\}$,
- $L_1^* := \{aa, ab, aaaa, aaab, abaa, abab, \ldots\}$.

Ejemplo de operaciones

Supongamos que el alfabeto sobre el que definimos nuestro lenguaje $\Sigma = \{a, b\}$ y tenemos estos lenguajes

$$L_1 := aa, ab, \; L_2 := ba, bb.$$

Podemos definir estos nuevos lenguajes:

- $L_1 \cup L_2 := \{aa, ab, ba, bb\}$,
- $L_1 L_2 := \{aaba, abbb, abba, aabb\}$,
- $L_1^* := \{aa, ab, aaaa, aaab, abaa, abab, \ldots\}$.

Ejemplo de operaciones

Supongamos que el alfabeto sobre el que definimos nuestro lenguaje $\Sigma = \{a, b\}$ y tenemos estos lenguajes

$$L_1 := aa, ab, \; L_2 := ba, bb.$$

Podemos definir estos nuevos lenguajes:

- $L_1 \cup L_2 := \{aa, ab, ba, bb\}$,
- $L_1 L_2 := \{aaba, abbb, abba, aabb\}$,
- $L_1^* := \{aa, ab, aaaa, aaab, abaa, abab, \ldots\}$.

Definición

Definición (Conjuntos regulares)

Sea Σ un alfabeto finito. Un conjunto regular es cualquier conjunto definido solamente a partir de concatenación, unión y la operación estrella sobre conjuntos regulares.

Definición

Definición (Expresiones Regulares)

Sea Σ un alfabeto finito. Llamaremos expresión regular sobre el alfabeto Σ a toda palabra sobre el alfabeto Σ_1 definido por la siguiente igualdad:

$$\Sigma_1 := \{\emptyset, \lambda, +, \cdot, (,),^* \} \cup \Sigma,$$

conforme a las reglas siguientes:

- *Son expresiones regulares $\emptyset, \lambda,$ a para cualquier símbolo a en el alfabeto Σ.*
- *Si α y β son expresiones regulares, también lo son:*
  - $(\alpha + \beta)$ *es una expresión regular,*
  - $(\alpha \cdot \beta)$ *es una expresión regular,*
  - $(\alpha)^*$ *es una expresión regular.*

Ejemplo

Ejemplo

Tomemos el alfabeto $\Sigma := \{a, b\}$. *Son expresiones regulares las secuencias de símbolos (palabras) siguientes:*

$$a \cdot a + b^* a, ab^* ba, \ldots$$

La Semántica de las Expresiones Regulares

Definición

Sea Σ un alfabeto finito. A cada expresión regular sobre el alfabeto α le asignaremos un lenguaje formal $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ conforme a las siguientes reglas:
Aplicando las reglas recursivas, si α y β son dos expresiones regulares sobre el alfabeto Σ usaremos las reglas siguientes:

- $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$,
- $L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha) \cdot L(\beta)$,
- $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$.

También mencionamos que el operador $*$ tiene preferencia sobre $\cdot$ y éste sobre $+$.

Ejemplo

Ejemplo

Sea $\alpha := 0^*10^*$ *la expresión regular sobre el alfabeto* $\Sigma := \{0, 1\}$. *Entonces,*

$$L(0^*10^*) = L(0)^* \cdot L(1) \cdot L(0)^* = \{0^m10^n \ : \ n, m \in \mathbb{N}\}.$$

No Unicidad

Un conjunto regular puede estar definido por dos expresiones regulares, como por ejemplo 1^* y $(1^*)^*$.

Equivalencia

Definición

Diremos que dos expresiones regulares α y β son tautológicamente equivalentes (o, simplemente, equivalentes) si se verifica:

$$L(\alpha) = L(\beta).$$

Escribamos $\alpha \equiv \beta$ para indicar equivalencia tautológica.

Propiedades de las Expresiones Regulares

Las expresiones regulares tienen varias propiedades que permiten operar y, a veces, reducir expresiones regulares.

Propiedades de las Expresiones Regulares

Asociativa:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \equiv (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma, \qquad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

Conmutativa (sólo para $+$)

$$\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha.$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

Elementos Neutros:

$$\alpha + \emptyset \equiv \alpha, \quad \alpha \cdot \lambda \equiv \alpha, \quad \alpha \cdot \emptyset \equiv \emptyset.$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

Idempotencia:

$$\alpha + \alpha \equiv \alpha.$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

Distributivas:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) \equiv \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma \equiv \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

Invariantes para *:

$$\lambda^* \equiv \lambda, \qquad \emptyset^* \equiv \emptyset, (\alpha^*)^* = \alpha^*$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

La notación α^+:

$$\alpha^* \cdot \alpha \equiv \alpha \cdot \alpha^* \equiv \alpha^+.$$

$$\alpha^* = \lambda + \alpha^+$$

y la relación de * con la suma:

$$(\alpha + \beta)^* \equiv (\alpha^* \beta^*)^*.$$