Expresiones Regulares y Derivadas Formales

La Derivación como Operación.

Universidad de Cantabria

Esquema

Motivación

Sabemos como son los conjuntos regulares y parece que hay alguna relación entre las gramáticas regulares y las expresiones regulares. ¿Como hallar una gramática a partir de una expresión regular?

Ideas

Sea la siguiente expresión a^*.

¿Qué lenguaje genera?

Ideas

Tomemos la siguiente gramática regular
$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{\ S \mapsto aS \mid \lambda\ \})$.

¿Qué lenguaje genera?

El Lenguaje de los Prefijos

Si nuestro lenguaje esta generado por ba^*, entonces una posible gramática que genere el mismo lenguaje es:
$G = (\{S, S'\}, \{a, b\}, S', \{S' \mapsto bS,\ S \mapsto aS \mid \lambda\ \})$

El Lenguaje de los Prefijos

El lenguaje $L(a^*)$ se relaciona con $L(ba^*)$ porque todas las palabras de $L(a^*)$ pertenecen a $L(ba^*)$ si se les añade el prefijo b.

Idea

Buscar estos “lenguajes de prefijos” y tratar de hallar una gramática a partir de ellos.

Pregunta

¿Como hallar para un lenguaje generado por una expresión regular las palabras que están en ese mismo lenguaje añadiéndole un prefijo?

Derivación Formal

Definición

Sea Σ un alfabeto finito, $a \in \Sigma$ un símbolo del alfabeto, y α una expresión regular sobre el alfabeto Σ. Llamaremos derivada de α con respecto al símbolo α a la expresión regular $D_a(\alpha)$ con la siguiente propiedad:

$$L(D_a(\alpha)) = \{\omega \in \Sigma^* \ : \ a\omega \in L(\alpha)\}.$$

Notación

Por la relación con las derivadas formales, utilizaremos la siguiente notación

$$D_a(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial a}.$$

La Derivación

Calculemos varias derivaciones de expresiones regulares sencillas:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial a} = \emptyset, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial a} = \emptyset, \quad \frac{\partial b}{\partial a} = \emptyset, \quad \forall b \in \Sigma, \ b \neq a.$$

$$\frac{\partial a}{\partial a} = \lambda.$$

Expresiones Regulares Complejas

Si α y β son dos expresiones regulares sobre Σ:

$$\frac{\partial(\alpha+\beta)}{\partial a} = \frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial a}.$$

Expresiones Regulares Complejas

$$\frac{\partial(\alpha)^*}{\partial a} = \frac{\partial(\alpha)}{\partial a} \cdot \alpha^*.$$

Expresiones Regulares Complejas

Ahora un poco para la concatenación de expresiones regulares:

$$\frac{\partial(\alpha \cdot \beta)}{\partial a} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \cdot \beta.$$

Pues no es cierto.

Expresiones Regulares Complejas

Ahora un poco para la concatenación de expresiones regulares:

$$\frac{\partial(\alpha \cdot \beta)}{\partial a} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \cdot \beta.$$

Pues no es cierto.

Expresiones Regulares Complejas

$$\frac{\partial(\alpha \cdot \beta)}{\partial a} = \frac{\partial \alpha}{\partial a} \cdot \beta + t(\alpha)\frac{\partial \beta}{\partial a},$$

donde $t(\alpha)$ es la función dada por la identidad siguiente:

$$t(\alpha) := \left\{ \begin{array}{ll} \lambda & \text{si } \lambda \in L(\alpha), \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{array} \right\}$$

Ejemplo

Veamos la derivación de la expresión regular a^*:

$$\frac{\partial (a)^*}{\partial a} = \frac{\partial (a)}{\partial a} (a)^* = a^*.$$

Ejemplo

Las derivaciones de la expresión regular $(aa+bb)^*$:

$$\frac{\partial (aa+bb)^*}{\partial a} = \frac{\partial (aa+bb)}{\partial a}(aa+bb)^* = a(aa+bb)^*.$$

No Funciona el Camino Fácil

Las derivadas no vuelven las expresiones regulares más sencillas. Pero si que dan información sobre el lenguaje generado.

$$L(a^*) = aL(a^*) \cup \lambda.$$

Y esto se traduce a una gramática.

Regla de Leibnitz

Teorema (Regla de Leibnitz para Expresiones Regulares)

Dada una expresión regular α sobre un alfabeto finito Σ, supongamos que $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Entonces,

$$\alpha \equiv a_1 D_{a_1}(\alpha) + \cdots + a_n D_{a_n}(\alpha) + t(\alpha),$$

donde $t(\alpha)$ es la función definida anteriormente.

Aplicación

Asignemos a cada expresión una variable, y cada expresión regular y a partir de la Regla de Leibnitz hallemos la gramática:

$$L(a^*) = aL(a^*) \cup \{\lambda.\}$$

Aplicación

Demos a cada expresión una variable, y cada expresión regular y a partir de la Regla de Leibnitz hallemos la gramática:

$$S \mapsto aS \mid \lambda.$$

Aplicación

El mismo resultado se aplica para $(a + b)a^*, (a + b)^*$. Pero, ¿que ocurre cuando las derivaciones son expresiones regulares igual de complejas?

¿Como aplicar lo mismo para una expresión más compleja?