Introducción a los Autómatas Finitos

Un modelo de Computación.

Universidad de Cantabria

Esquema

El Problema

Nuestro objetivo en este tema es introducir un “mecanismo ideal” que resuelva problemas automáticamente. Esto es, que para un problema concreto, nosotros le demos unos datos y el “nos de la respuesta correcta”.

El Problema

Empezaremos por problemas que “solamente” requieran una respuesta “Si” o “No”.

El Problema

Elementos que podemos deducir que tiene un autómata

- Cinta de entrada
- “Programa” (¿Que significa esto del programa?).
- Memoria

El Autómata

En la cinta de entrada y la memoria se almacenan elementos de un alfabeto.

- Estas son controladas por el “programa”.
- El programa va leyendo de la cinta de izquierda a derecha, un elemento cada vez.
- Una vez leído un elemento, ya no vuelve a ser leído.

El Autómata

El programa se considera en su forma más abstracta, en forma de estados y una función de transición.

- El comportamiento se define en función del estado que este el autómata, parte de la memoria y el símbolo leído en la cinta.
- El estado al final de la ejecución del programa determina la respuesta del autómata.

El Autómata

El programa, al ser un sistema de computación, debe admitir una forma de representación que involucre un grafo (aunque este sea un grafo infinito).

El Autómata

La memoria también contiene información de cualquier tipo, pero asumiremos que son símbolos de un alfabeto finito.

- Tiene dos funciones leer y almacenar.
- Dependiendo de que información se pueda leer y que se pueda almacenar definiremos el autómata.

El Autómata

Empezaremos por la versión más sencilla de autómatas. Lo que esta claro es que de los elementos mencionados el único que es prescindible es la “memoria”. Los autómatas finitos son aquellos que no tienen memoria.

La Formalización

Definición

Llamaremos autómata finito a todo quíntuplo $A := (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ *donde:*

- Σ *es un conjunto finito (alfabeto),*
- Q *es un conjunto finito cuyos elementos se llaman estados y que suele denominarse espacio de estados,*
- q_0 *es un elemento de* Q *que se denomina estado inicial,*
- F *es un subconjunto de* Q*, cuyos elementos se denominan estados finales ó aceptadores,*
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \longrightarrow Q$ *es una correspondencia que se denomina función de transición.*

Pequeña nota

Si δ es aplicación, el autómata se denomina autómata determinístico ó determinista y en caso contrario autómata indeterminístico ó indeterminista.

Espacio de Configuraciones

$S := Q \times \Sigma^*$ es el espacio de configuraciones. Esto representa un "snapshot" (o instantánea) en cada momento de una computación del autómata.

Computación de una Palabra

La transición $\rightarrow_A \subseteq S \times S$ se define por las reglas siguientes:

$$(q, x) \rightarrow_A (q', x') \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \;\; x = \alpha x', \;\; q' = \delta(q, x)$$

Interpretación del Proceso: Cinta de Entrada

$$\begin{array}{|c|c|c|c} \hline x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ \hline \end{array}$$

Interpretación del Proceso

$$\begin{array}{|c|c|c|c}\hline x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ \hline\end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{|c|}\hline q_0 \\ \hline\end{array}$$

Interpretación del Proceso

$$(q_0, x) \to_A (q_1, x^{(1)}) \to_A \cdots \to_A (q_{n-1}, x^{(n)}) \to_A (q_n, \lambda)$$

Interpretación del Proceso

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c}
\hline
\quad & \quad & \quad & \cdots & \quad & \quad & \cdots\cdots \\
\hline
\end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{|c|}
\hline
q_n \\
\hline
\end{array}$$

Interpretación del Proceso

Al acabar de leer la cinta, el autómata comprueba si el estado es final. En ese caso responde “Si”, en otro caso responde “No”.

Un Autómata

Consideremos el siguiente autómata $A = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$. Donde,

- $\Sigma = \{a, b\}$.
- $Q := \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$.
- $F := \{q_2\}$.

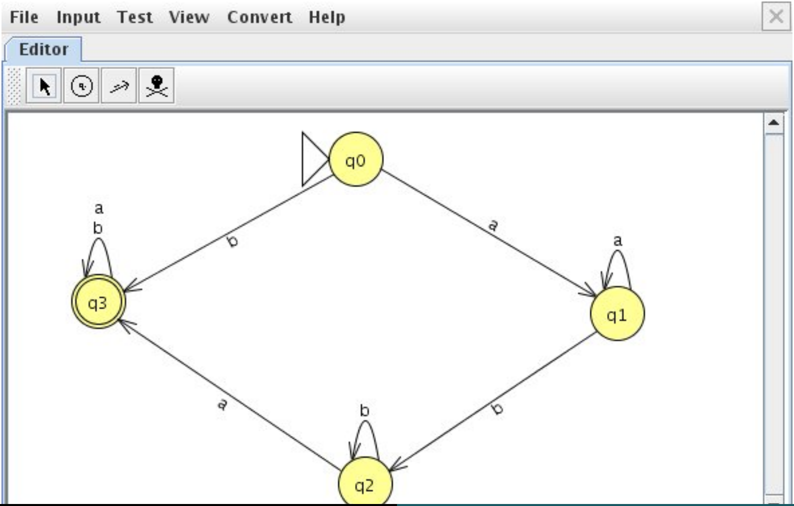
Un Autómata

δ	**a**	**b**
q_0	q_1	q_3
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_3

Representación Gráfica

- Los nodos del grafo están dados por los estados del grafo. Cada nodo está rodeado de, al menos, una circunferencia.
- Los nodos finales aceptadores del grafo son aquellos que están rodeados por dos circunferencias, el resto de los nodos aparecen rodeados de una sola circunferencia.
- Dada una transición $\delta(q, z) = p$, asignaremos la arista del grafo (q, p) con etiqueta z.
- Hay una arista sin entrada, cuya salida es el nodo asociado al estado inicial.

Representación Gráfica



Ejemplo de Uso de un Autómata

Queremos modelizar la siguiente situación. Un banco electrónico reparte dinero a un cliente. Este cliente quiere comprar bienes de un vendedor. Por simplicidad supondremos que solo hay una pieza de dinero en juego.

Ejemplo de Uso de un Autómata

El banco puede recibir transferir dinero de un cliente a la cuenta de un vendedor. El banco también puede cancelar esta operación. Supondremos que cuando se cancela una operación, el banco no permitirá cobrar ese dinero.

Ejemplo de Uso de un Autómata

El vendedor puede pedir que le den el dinero en metálico cuando lo tenga en su cuenta. Además puede enviar por correo los bienes que le haya comprado el cliente.

Ejemplo de Uso de un Autómata

El cliente puede enviar la orden de pagar y cancelar todas las veces que quiera.

Ejercicio

Modelar cada uno de los participantes como un autómata y después modelar como un autómata todo el escenario.

Conclusiones

Los autómatas así expresados son bastante abstractos y parece que los procedimientos “creativos” son mejores. Pero captan la esencia del calculo y hacen posible que solo nos tengamos que dedicar a realizar algoritmos.

Conclusiones

Los autómatas así expresados son bastante abstractos y parece que los procedimientos "creativos" son mejores. Pero captan la esencia del calculo y hacen posible que solo nos tengamos que dedicar a realizar algoritmos.