El Autómata con Pila

Una Generalización del Autómata Finito

Universidad de Cantabria

Esquema

Introducción

Los autómatas son abstracciones de maquinas de calcular, como hemos visto. Los más sencillos no tienen acceso a memoria y por ello tienen sus limitaciones.

Introducción

Si añadimos acceso a una cantidad finita de memoria, no hay ninguna ganancia, ya que se puede utilizar los autómatas finitos también para simular estos procesos.

Introducción

Por lo tanto autómatas más generales tienen que tener memoria infinita, pero las diferencias están en como se accede a los contenidos de esa memoria. Esta lección estará dedicada a los autómatas que tienen una memoria que funciona como un stack o una pila.

Stacks

Podemos identificar las pilas con ciertos lenguajes y ciertas funciones sobre un alfabeto Γ del modo siguiente. Comenzaremos añadiendo un nuevo símbolo Z_0 que no está en Γ. Las pilas (stacks) son elementos del lenguaje: $Z_0 \cdot \Gamma^*$. El símbolo Z_0 se identificará con el significado *Fondo de la Pila*.

Stacks

El fondo de la pila es un elemento que se puede leer, se puede sacar pero no se puede volver a introducir.
Los elementos de la pila se colocaran de izquierda a la derecha, esto es los elementos del fondo son los los que están más a la izquierda.
Como anticipo diremos que los elementos se irán introduciendo uno a uno, colocandolos a la izquierda.

Funciones sobre las Pilas

empty: Definimos la aplicación

$$empty : Z_0 \cdot \Gamma^* \longrightarrow \{0, 1\},$$

dada mediante:

$$empty(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega = \lambda \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Funciones sobre las Pilas

top: Definimos la aplicación

$$top : Z_0 \cdot \Gamma^* \longrightarrow \Gamma \cup \{\lambda\},$$

mediante la regla siguiente: Dada una pila $Z_0 \cdot \omega \in Z_0 \cdot \Gamma^*$ (con $\omega = w_1 \cdots w_n \in \Gamma^*$),

$$top(Z_0 w) := \begin{cases} w_n \in \Gamma, & \text{si } \omega = w_1 \cdots w_n \in \Gamma^*,\ Z_0\omega \neq \lambda \\ \lambda, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Funciones sobre las Pilas

push: Apilar (empujar) una pila encima de otra. Definimos la aplicación

$$push : Z_0 \cdot \Gamma^* \times \Gamma^* \longrightarrow Z_0 \cdot \Gamma^*,$$

mediante la regla siguiente:
Dada una pila $Z_0 \cdot \omega \in Z_0 \cdot \Gamma^*$ (con $\omega = w_1 \cdots w_n \in \Gamma^*$), y una palabra $a \in \Gamma^*$, dada mediante: $a := a_1 \cdots a_r$, definimos

$$push(Z_0\omega, a) := Z_0 w_1 \cdots w_n a_1 \cdots a_r \in Z_0 \cdot \Gamma^*.$$

Funciones sobre las Pilas

pop (Pull Out the toP): Definimos la aplicación

$$pop : Z_0 \cdot \Gamma^* \longrightarrow Z_0 \cdot \Gamma^*,$$

mediante la regla siguiente:
Dada una pila $Z_0 \cdot \omega \in Z_0 \cdot \Gamma^*$, definimos $pop(Z_0\omega)$ como el resultado de eliminar $top(Z_0\omega)$, esto es

$$pop(Z_0\omega) := \begin{cases} Z_0 w_1 \cdots w_{n-1} \in Z_0 \cdot \Gamma^*, & \text{si } w_1 \cdots w_n \in \Gamma^+, \\ Z_0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Propiedad Básica

Una de las propiedades básicas de las operaciones es, obviamente, la siguiente:

$$push(pop(Z_0\omega), top(Z_0\omega)) = Z_0\omega.$$

Definición

Definición (Non–Deterministic Pushdown Automata)

Un autómata con pila (o pushdown autómata) indeterminista es una lista $A := (Q, \Sigma, \Gamma, Q_0, F, Z_0, \delta)$ *donde:*

- Q *es el conjunto de estados y que suele denominarse espacio de estados, y* Q_0 *es el estado inicial,*
- Σ *y* Γ *son conjuntos finitos donde* $Z_0 \notin \Gamma$ *y es llamado el "fondo de la pila",*
- F *es el subconjunto de* Q *de estados finales aceptadores,*
- δ *es una correspondencia:*

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma) \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*),$$

que se denomina función de transición.

Propiedad Adicional

La función de transición debe verificar la propiedad siguiente para cada lista $(q, x, A) \in Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{Z_0\})$:

$$\sharp\{(p, \omega) \in Q \times \Gamma^* \ : \ (p, \omega) \in \delta(q, x, A)\} < \infty.$$

Es decir, sólo un número finito de elementos de $Q \times \Gamma^*$ estarán relacionados con cada elemento (q, x, A) mediante la función de transición.

Propiedad Adicional

Nótese que hemos supuesto que la función de transición δ tiene su rango (el conjunto hacia el que va a parar) en $Q \times \Gamma^*$. Esta condición nos dirá (más adelante) que no podemos escribir en la pila el símbolo de "fondo de pila" nada más que cuando se escriba en la configuración inicial. Podremos, sin embargo, leerlo. No estará, en ningún caso, "en medio" de la pila.

Determinismo

El determinismo en autómatas con pila difiere del caso de autómatas finitos. No vamos a exigir que δ sea aplicación sino algo más delicado.

Determinismo

Esto es porque el autómata tiene que leer de la pila y de la cinta de lectura.

Determinismo

La imagen de cualquier lectura contiene a lo sumo 1 elemento. Es decir, para cualesquiera $(q, x, A) \in Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{Z_0\})$, el conjunto de los elementos relacionados con él a través de δ tiene, a lo sumo, 1 elemento:

$$\sharp(\{(p, \omega) \in Q \times \Gamma^* \ : \ (p, \omega) \in \delta(q, x, A) = (p, \omega)\}) \leq 1.$$

Determinismo

Si dados $q \in Q$ y $A \in \Gamma$, existieran $(p, \omega) \in Q \times \Gamma^*$ tales que $\delta(q, \lambda, A) = (q, \omega)$, entonces, ninguno de los elementos de $Q \times \Sigma \times (\Gamma \cup \{Z_0\})$ tiene imagen por δ. Es decir, si

$$\sharp\{(p, \omega) \in Q \times \Gamma^* \ : \ (p, \omega) \in \delta(q, \lambda, A)\} = 1,$$

entonces

$$\sharp \bigcup_{x \in \Sigma} \{(p, \omega) \in Q \times \Gamma^* \ : \ (p, \omega) \in \delta(q, x, A)\} = 0.$$

Ejemplo de Autómata Determinista

Dar un autómata determinista que acepte el siguiente lenguaje:

$$L := \{a^n b^m c^n \ : \ n, m \geq 1\}$$

Determinismo

No es cierto, en el caso de autómatas con pila, que todo autómata con pila indeterminista sea equivalente a un autómata con pila determinista. Así, el siguiente lenguaje es aceptado por un autómata con pila indeterminista, pero no puede ser aceptado por un autómata con pila determinista:

$$L := \{a^n b^m c^n \ : \ n, m \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m \ : \ n, m \geq 1\} \subseteq \{a, b, c\}^*.$$

Determinismo

No todos los autómatas deterministas acaban en un tiempo finito. Son mucho más complejos que los finitos, ya que estos pueden entrar en ciclos.