Tema 2: Sistemas LTI

1. Introducción.
2. Caracterización en el dominio del tiempo.
    1. Respuesta impulsiva.
    2. Ecuación diferencial (sc) o en diferencias (sd).
    3. Variables de estado.
3. Funciones singulares.

2.1 Introducción

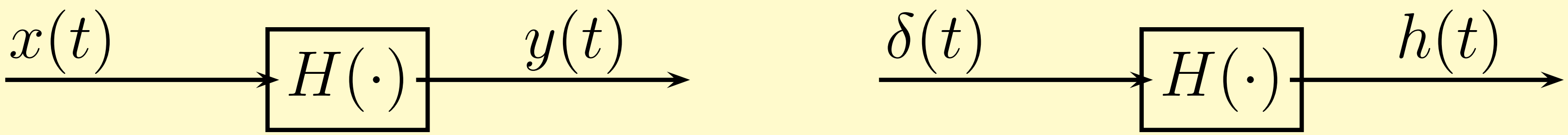
- Interés de sistemas que son L y TI:
  1. **Modelos** LTI de sistemas físicos complejos.
  2. Son muy sencillos de analizar.
- L: basta con conocer la respuesta a funciones **base**.
- TI: permite reducir el número de funciones base.

2.2.1 Respuesta impulsiva

1. Suma de convolución.
2. Integral de convolución.
3. Propiedades.
   1. Conmutativa, distributiva, asociativa.
   2. Memoria, causalidad, estabilidad, invertibilidad.
4. Respuesta al escalón unitario.

2.2.1 Respuesta impulsiva (II)

- La RI se representa por $h(t)$ o $h[n]$.
- Es la salida cuando aplicamos un impulso unitario en $t = 0$ o $n = 0$: $\delta(t)$ o $\delta[n]$.



- ¿Por qué caracteriza a un sistema LTI?
- Veremos que podemos expresar la entrada como combinación lineal de impulsos desplazados.
- La salida será combinación lineal de RI desplazadas.
- Ésta se denomina suma o integral de *convolución*.
- RI: analíticamente de un modelo o medirse.

2.2.1.1 Suma de convolución

- Selección: $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$, $x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$.
- El producto de una señal por un impulso desplazado es proporcional a un impulso desplazado.
- $\boxed{\text{Dibujar ejemplo}}$

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots \,,$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

2.2.1.1 Suma de convolución (II)

- Sea $H(\cdot)$ el operador del sistema, $h[n] = H(\delta[n])$.

$$y[n] = H(x[n]) = H\left(\sum_k x[k]\delta[n-k]\right)$$

$$\overset{\downarrow \text{L}}{=} \sum_k x[k]H(\delta[n-k]) \overset{\downarrow \text{TI}}{=} \sum_k x[k]h[n-k].$$

- Suma de convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k].$$

2.2.1.1 Suma de convolución (III)

Ejemplo: calcular $y[n]$ si

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2],$$
$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1].$$

Dibujar $h[n]$, $x[n]$ e $y[n]$

$$\begin{aligned} y[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] \\ +3\delta[n] + 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \\ - 2\delta[n-1] - 4\delta[n-2] - 2\delta[n-3] \end{aligned}$$

$$y[n] = 2\delta[n+1] + 7\delta[n] + 6\delta[n-1] - \delta[n-2] - 2\delta[n-3]$$

2.2.1.1 Suma de convolución (IV)

Interpretación 1 {iscl.m}:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k[n].$$

- $p_k[n]$ es una entrada $x[k]$ aplicada en el instante k.
- La salida asociada a $p_k[n]$ es $v_k[n] = x[k]h[n-k]$.
- Para calcular $x[n]$ hay que sumar todas estas funciones

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- Calculamos $v_k[n]$ y sumamos, para cada n, según k ($\downarrow$).

2.2.1.1 Suma de convolución (V)

Interpretación 2 {`isc2.m`}

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n[k].$$

- Ahora k es la variable independiente, n una constante.
- Para cada n fijo, necesitamos evaluar una función.
- Se suma según la variable independiente ($\rightarrow$), no según el parámetro ($\downarrow$).
- $w_n[k] = x[k]h[-(k-n)]$: h invertida y desplazada.

2.2.1.1 Suma de convolución (VI)

- Hacer el ejercicio 1.54.
- Demostrar (sugerencia, $r = n - k$):

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k}.$$

- $h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$, $x[n] = u[n]$: ¿$y[n]$? (2 métodos gráficos y analíticamente).
- $h[n] = \frac{1}{4}\,[0 \leq n \leq 3]$: ¿$y[n]$ para $x[n]$ genérica?

2.2.1.2 Integral de convolución

- Para un LTI, al igual que en el caso discreto, $h(t)$ es todo lo que necesitamos conocer para calcular $y(t)$ para una $x(t)$ arbitraria.
- Expresaremos $x(t)$ como una superposición de $\delta(t)$ desplazadas.
- Veremos que, en lugar de la suma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k],$$

obtendremos la integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau.$$

2.2.1.2 Integral de convolución (II)

A partir de selección: $x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$:

- Si interpretamos como funciones de τ e integramos

$$x(t) \times 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau.$$

- Si $H(\delta(t)) \equiv h(t)$ y TI, $H(\delta(t-\tau)) = h(t-\tau)$.

$$y(t) = H(x(t)) = H\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right) \stackrel{\downarrow \text{L}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(\delta(t-\tau))\,d\tau$$

$$\stackrel{\downarrow \text{TI}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \equiv x(t) * h(t) : \text{ Integral de convolución.}$$

2.2.1.2 Integral de convolución (III)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau.$$

Interpretación 1:

$$p_\tau(t) \equiv x(\tau)\delta(t-\tau), \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t)\, d\tau.$$

- Integramos pulsos ($p_\tau(t)$).

$$v_\tau(t) \equiv x(\tau)h(t-\tau), \quad y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v_\tau(t_0)\, d\tau.$$

2.2.1.2 Integral de convolución (IV)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.$$

Interpretación 2:

- $w_{t_0}(\tau) = v_\tau(t_0) = x(\tau)h(t_0-\tau)$ como función de τ.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{t_0}(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(-(\tau-t_0))\,d\tau.$$

- Deslizamos de izda. a dcha. una copia invertida de $h(\tau)$.
- Calculamos el área del producto de ésta por $x(\tau)$.

2.2.1.2 Integral de convolución (V)

- Proponer ejemplos de integral de convolución: mirar 2.6, 2.7 y 2.8.
- $h(t) = e^{-t}u(t)$, $x(t) = e^{-3t}(u(t) - u(t-2))$: ¿$y(t)$?
- $x(t) = 2(u(t-1) - u(t-3))$,
  $h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$: ¿$y(t)$? Dibujar las señales.
- $h(t) = \delta(t-a)$, ¿$y(t)$ para una $x(t)$ genérica?

2.2.1.3 Propiedades representación RI

- La respuesta impulsiva de una sistema LTI caracteriza completamente su relación entrada-salida.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau, \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- ¿Cómo se reflejan las propiedades de un sistema (memoria, estabilidad, causalidad, . . .) en su RI?
- ¿Cuánto vale la RI de un sistema compuesto por la interconexión de subsistemas?

2.2.1.3 Propiedad conmutativa (I)

- Demostrar $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$.
- Demostrar $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$.
- $\boxed{\text{Entrada y sistema son intercambiables}}$
- Calcular $y[n]$ si $x[n] = \alpha^n(u[n] - u[n-10])$ y $h[n] = \beta^n u[n]$, $0 < \beta < 1$. (5 métodos, intercambiar $x[n]$ y $h[n]$).

2.2.1.3 Propiedad distributiva (II)

- $\boxed{\text{Dibujar } h_1[n] \text{ y } h_2[n] \text{ en paralelo, } x[n] \text{ e } y[n]}$
- $y_1[n] = x[n] * h_1[n]$, $y_2[n] = h_2[n] * x[n]$, $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_2[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](h_1[n-k] + h_2[n-k]) \\ &\equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]. \end{aligned}$$

- $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$: porque $*$ es distributiva. $\boxed{\text{sist. eq.}}$

2.2.1.3 Propiedad asociativa (III)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) h_2(t-\tau)\, d\tau, \qquad z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) h_1(\tau-\nu)\, d\nu.$$

$$y(t) = \iint x(\nu) h_1(\tau-\nu) h_2(t-\tau)\, d\nu\, d\tau$$

$$\overset{\downarrow \eta=\tau-\nu}{=} \iint x(\nu) h_1(\eta) h_2(t-\nu-\eta)\, d\eta\, d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta) h_2(t-\nu-\eta)\, d\eta \right] d\nu.$$

Si $h(t) \equiv h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta) h_2(t-\eta)\, d\eta$, $[\cdots] = h(t-\nu)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) h(t-\nu)\, d\nu = x(t) * h(t).$$

2.2.1.3 Propiedades representación RI (IV)

Ejemplos:

- Demostrar que es lo mismo la conexión en serie de $h_1[n]$ y $h_2[n]$ que la inversa.
- Sea el sistema: $h[n] = ((h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]) - h_4[n]$, con $h_1[n] = u[n]$, $h_2[n] = u[n+2] - u[n]$, $h_3[n] = \delta[n-2]$, $h_4[n] = \alpha^n u[n]$.

    - Dibujar esquema de bloques.
    - Demostrar que $h[n] = (1 - \alpha^n)u[n]$.
    - Calcular $y[n]$ para $x[n] = n(u[n] - u[n-4])$.

2.2.1.3 Sistemas LTI: memoria (V)

- La salida de un sistema sin memoria depende tan sólo de la entrada en el instante actual.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

- Si no debe depender de $x[n-k]$ para todo $k \neq 0$, entonces $h[k] = c\delta[k]$; con lo que $y[n] = cx[n]$.
- Si $c = 1$,

$$x[n] = y[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

- Análogamente, en el caso continuo, $h(t) = c\delta(t)$.

2.2.1.3 Sistemas LTI: causalidad (VI)

- La salida de un sistema causal no depende de valores futuros de la entrada.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad \rightarrow \quad h[k] = 0 \text{ si } k < 0.$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \overset{\downarrow r=n-k}{=} \sum_{r=-\infty}^{n} x[r]h[n-r]$$

- Análogo en el caso continuo.
- Reposo inicial. Si, para un sistema LTI causal, $x(t) = 0$ para $t < t_0$, entonces $y(t) = 0$ para $t < t_0$.
- ¿Qué se entiende por señal causal?

2.2.1.3 Sistemas LTI: estabilidad (VII)

- Estable: *toda* entrada acotada, $|x[n]| \leq M_x < \infty$ da lugar a una salida acotada, $|y[n]| \leq M_y < \infty$.

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]|$$

$$\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| = M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Es condición *suficiente* que $h[n]$ sea sumable —$h(t)$ integrable— en valor absoluto,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau < \infty.$$

2.2.1.3 Sistemas LTI: estabilidad (VIII)

- Supongamos un sistema con $h[n]$ al que se le introduce

$$x[n] = \frac{h[-n]}{|h[-n]|}[h[-n] \neq 0].$$

- La entrada está acotada, ya que $|x[n]| \leq 1$, para todo n.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h[-k]}{|h[-k]|} h[n-k];$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[-k]|^2}{|h[-k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]|.$$

- Si ha de ser finito, *necesariamente* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$.

2.2.1.3 Sistemas LTI: invertibilidad (IX)

- Un sistema es invertible si podemos recuperar su salida a partir de su entrada.
- Será invertible si existe un sistema que al colocarlo en serie con el primero, reproduce la entrada.
- $\boxed{\text{Dibujar } x(t),\ h(t),\ y(t),\ h^{-1}(t),\ x(t)}$.

$$x(t) * (h(t) * h^{-1}(t)) = x(t) \quad \rightarrow \quad h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t).$$

2.2.1.3 Sistemas LTI: invertibilidad (X)

- El proceso de identificar la entrada a partir de la salida se denomina deconvolución.
- Un sistema inverso tiene salida $x(t)$ y entrada $y(t)$. Resuelve este problema.
- Ej, ecualizador: invierte distorsión canal telefónico.
- Problema relacionado: identificación de sistemas.
- Demostrar que si un sist. LTI tiene inverso, éste es LTI.
- Encontrar el sistema inverso que elimina un eco $y[n] = x[n] + ax[n-1]$. El sistema debe ser causal. Ver si es estable.

2.2.1.4 Respuesta al escalón unitario

- Definimos

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k],$$

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau.$$

- Ver el ejemplo 2.12: el inverso del acumulador es la diferencia.

$$h[n] = s[n] - s[n-1], \quad h(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

2.2.2 Representación mediante EDD

1. Ecuaciones diferenciales y en diferencias (EDD).
2. Resolución de EDD.
    1. Respuesta natural.
    2. Respuesta forzada.
3. Diagramas de bloques.
    1. Sistemas discretos.
    2. Sistemas continuos.

2.2.2.1 EDD

- En muchos sistemas dinámicos de interés, la relación entrada-salida puede expresarse como una ecuación diferencial o en diferencias (EDD).
- En particular nos fijaremos en sistemas regidos por EDD con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t), \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

- N, la máxima derivada o retraso de la salida se conoce como *orden* del sistema.

2.2.2.1 EDD (II)

Dibujar un RLC serie con tensión $x(t)$ e intensidad $y(t)$.

$$R\dot{y}(t) + L\ddot{y}(t) + \frac{1}{C}y(t) = \dot{x}(t).$$

- N: nº de almacenadores de energía. R, L, C ctes.
- EDD: ecuaciones implícitas de relación entrada–salida.
- ¿Qué es resolver?, encontrar una ecuación explícita de la salida en función de la entrada.
- Para ello, necesitamos conocer las condiciones iniciales (CI) del sistema.
- En EDO, el nº de CI es N, el orden. En el caso discreto también.

2.2.2.1 EDD (III)

- En una EDO, las CI están relacionadas con los valores iniciales de los almacenadores de energía: memoria.
- Las CI resumen la información sobre el pasado del sistema —en cierto sentido su estado— y es todo lo que necesitamos conocer para su evolución futura.
- $y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$: relación recursiva que da la salida en función de la entrada y de valores anteriores de la salida. CI: $y[-1]$ e $y[-2]$.
- Ejercicio: calcular $s[n]$ para el ejemplo anterior si el sistema es causal. Idem si $x[n] = 0$ y las CI son no nulas.

2.2.2.2 Resolución de EDD

- Expresaremos la salida del sistema como la suma de dos componentes:
  - Una asociada con las CI: respuesta natural (homogénea).
  - Otra asociada a la entrada: respuesta forzada.
- La respuesta forzada supone reposo inicial (no hay energía o memoria almacenada).
- La respuesta natural es la salida cuando $x(t) = 0$.
- La respueta natural representa la forma en que el sistema disipa la energía asociada a las CI.

2.2.2.2.1 Respuesta natural

- Es la solución de la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y^{(n)}(t) = 0,$$

- que es de la forma (comprobar sustituyendo)

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i t},$$

donde r_i son las raíces de la ecuación característica

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k = 0.$$

2.2.2.2.1 Respuesta natural (II)

- Discreto: la respuesta natural $y^{(n)}[n]$ es la solución de

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(n)}[n-k] = 0,$$

- que es de la forma (comprobar sustituyendo)

$$y^{(n)}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^n,$$

donde r_i son las raíces de

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^{N-k} = 0.$$

2.2.2.2.1 Respuesta natural (III)

- ¿Qué ocurre si la ecuación característica tiene raíces múltiples?
- Si una raíz r_i se repite p veces incluimos los p términos
  - $e^{r_i t}, te^{r_i t}, \ldots, t^{p-1}e^{r_i t}$,
  - $r_i^n, nr_i^n, \ldots, n^{p-1}r_i^n$.
- Cada término en la respuesta natural depende de la naturaleza de la raíz asociada:
  - Raíz real: exponencial.
  - Raíz imaginaria: sinusoide.
  - Raíz compleja: sinusoide amortiguada.

2.2.2.2.1 Respuesta natural (IV)

- Dibujar un RL en serie, $x(t)$ tensión, $y(t)$ intensidad
  Calcular la respuesta natural de $x(t) = Ry(t) + L\dot{y}(t)$ si $y(0) = 2$ A.
  La ecuación característica es $R + Lr_1 = 0$, por lo que $y^{(n)}(t) = C_1 e^{-Rt/L}$, de la CI se desprende que $C_1 = 2$.
  Válida para $t \geq 0$.
- Calcular la respuesta natural del sistema descrito por $y[n] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] + 2x[n-2]$.
  La EC es $r^2 + \frac{1}{4} = 0$, con lo que $r = \pm j/2 = e^{\pm j\pi/2}$,
  $y^{(n)}[n] = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$.
- Ejercicio 2.55.

2.2.2.2.2 Respuesta forzada

- Es la solución de la EDD para la entrada dada cuando las CI son nulas.
- Se suele obtener suponiendo que la salida es de la misma forma que la entrada.
- Si $x[n] = \alpha^n$, $y^p[n] = C\alpha^n$.
- Si $x[n] = \cos(\omega n + \phi)$, $y[n] = C_1 \cos(\omega n) + C_2 \operatorname{sen}(\omega n)$.
- Se ajustan las constantes.
- Calcular $s[n]$ para $y[n] - \frac{1}{4} y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$.
  $y[n] = \left(C_1 \frac{1}{2^n} + C_2 \frac{1}{(-2)^n} + C_3 \right) u[n]$. $C_1 = -2$, $C_2 = 0$, $C_3 = 4$.

2.2.2.2 Torre de Hanoi

- $\boxed{\text{Dibujar 3 torres y } n \text{ discos}}$
- ¿Cuántos movimientos son necesarios para trasladar n discos de una torre a otra, si
  1. sólo se puede mover un disco cada vez, y
  2. un disco no puede estar sobre otro menor?
- $y[0] = 0$, $y[1] = 1$, $y[2] = 3$, $y[n] = 2y[n-1] + 1$, $n \geq 1$. Podemos poner $y[n] - 2y[n-1] = u[n-1]$. La ecuación característica es $\alpha - 2 = 0$, por tanto $y^{(n)}[n] = C2^n u[n-1]$. La completa es $y[n] = (C2^n + D)u[n-1]$. Como $y[1] = 1$ e $y[2] = 3$, $y[n] = (2^n - 1)u[n-1]$.

2.2.2.2 Números de Fibonacci

$y[0] = 0$, $y[1] = 1$, $y[n] = y[n-1] + y[n-2]$ para $n > 1$.

- Ec. en diferencias: $y[n] - y[n-1] - y[n-2] = \delta[n-1]$.
- Ec. característica $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.
- Raíces: $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Solución general:

$$y[n] = \left[C \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + D \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u[n] + E\delta[n-1]$$

- Imponiendo $y[n]$, $n = 0, 1, 2$: $C = -D = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $E = 0$.

2.2.2.3 Diagramas de bloque

- Ejercicios 2.57–2.60.
- Diagrama de bloques: interconexión de operaciones elementales que actúan sobre las señales del sistema.
- Descripción más detallada que la RI o las EDD: describe la estructura interna.
- La RI o la EDD representa tan sólo la relación IO.
- Una misma relación IO puede implementarse con diferentes diagramas de bloques.

2.2.2.3 Diagramas de bloque (I)

- Utilizaremos tres bloques elementales:
  - Multiplicación escalar, $y(t) = cx(t)$, $y[n] = cx[n]$. $\boxed{\text{Dibujar un arco}}$
  - Suma, $y(t) = x(t) + w(t)$. $\boxed{\text{Dibujar sumador}}$
  - Desplazamiento temporal o integración, $y[n] = x[n-1]$, $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$. $\boxed{\text{Dibujar } D \text{ e } \int}$
- En el dominio continuo, la EDO se convierte en integral: más fácil de implementar, menos sujeta a errores.

2.2.2.3.1 Sistemas discretos

- Sistema discreto genérico:
  $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$.
- Sea el sistema de segundo orden
  $y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2] = b_0 x[n]+b_1 x[n-1]+b_2 x[n-2]$.
- Definiendo $w[n]$, tenemos

$$w[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2], \qquad \text{(*)}$$

$$y[n] = w[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]. \qquad \text{(**)}$$

- $\boxed{\text{Dibujar forma directa de tipo I}}$
- Retrasos sobre $x[n]$ e $y[n]$.

2.2.2.3.1 Sistemas discretos (II)

- Interconexión en serie de dos subsistemas.
- Propiedad asociativa: podemos intercambiar su orden.
- Directamente de $(*)$ y $(**)$, tenemos

$$f[n] = -a_1 f[n-1] - a_2 f[n-2] + x[n],$$
$$y[n] = b_0 f[n] + b_1 f[n-1] + b_2 f[n-2].$$

- En los dos subsistemas los retrasos son sobre $f[n]$.
- Basta con un único conjunto de memorias.
- $\boxed{\text{Dibujar forma directa II}}$

2.2.2.3.1 Sistemas discretos (III)

- Calcular el diagrama de bloques de $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-3] = x[n] + 2x[n-2]$.

2.2.2.3.2 Sistemas continuos

- Forma general

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

- En los sistemas discretos implementamos retrasos.
- En los continuos obtendríamos resultados análogos si utilizásemos diferenciadores.
- Se suelen implementar integradores.
- Lo primero es convertir la EDO en un ecuación integral.

2.2.2.3.2 Sistemas continuos (II)

- Para un $v^{(0)}(t) \equiv v(t)$, definimos recursivamente

$$v^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{t} v^{(n-1)}(\tau)\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $v^{(n)}(t)$ es la integral n-ésima de $v(t)$.

$$v^{(n)}(t) = v^{(n)}(0) + \int_{0}^{t} v^{(n-1)}(\tau)\, d\tau.$$

- Se necesitan N condiciones iniciales $n = 1, 2, \ldots, N$.
- Con CI nulas, la derivada y la integral son inversas

$$\frac{d}{dt} v^{(n)}(t) = v^{(n-1)}(t), \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

2.2.2.3.2 Sistemas continuos (III)

- Si $N \geq M$ (sup. $M = 2$) e integramos la EDO genérica

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \cdots + a_N \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$a_0 y^{(1)} + a_1 y^{(0)} + \cdots + a_N \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} = b_0 x^{(1)} + b_1 x^{(0)} + b_2 \frac{dx}{dt},$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_0 y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \cdots + a_N y^{(0)} = b_0 x^{(N)} + b_1 x^{(N-1)} + b_2 x^{(N-2)}.$$

- La ecuación integral equivalente es

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(N-k)}(t).$$

2.2.2.3.2 Sistemas continuos (IV)

Ejemplo $N = 2$ (supondremos $a_2 = 1$):

$a_0 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_2 y(t) = b_0 x^{(2)} + b_1 x^{(1)} + b_2 x(t)$.

$$w(t) = b_2 x(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x^{(2)}(t),$$

$$y(t) = -a_1 y^{(1)}(t) - a_0 y^{(2)}(t) + w(t).$$

Dibujar forma directa I

Si intercambiamos los dos sistemas en serie

$$f(t) = -a_1 f^{(1)}(t) - a_0 f^{(2)}(t) + x(t),$$

$$y(t) = b_2 f(t) + b_1 f^{(1)}(t) + b_0 f^{(2)}(t).$$

Dibujar forma directa II

2.2.3 Variables de estado

- Hasta ahora tenemos una EDD de orden N.
- VE: sistema de EDD's de primer orden acopladas.
  - Unas describen cómo evoluciona el estado.
  - Otra: salida en función de la entrada y el estado.
- Representación matricial.
- Estado: mínimo conjunto de señales que representan la memoria completa del pasado del sistema.
- Si conocemos el estado en n_0 y la entrada para $n \geq n_0$, podemos calcular la salida para $n \geq n_0$.
- Las variables que constituyen el estado no son únicas.
- Salida elementos de memoria o almacenes de energía.

2.2.3 Variables de estado (II)

Ejemplo: representación II de sistema discreto de orden 2

- La salida del primer D en el instante $n+1$, $q_1[n+1]$, es la entrada en el instante n:
  $q_1[n+1] = x[n] - a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n]$.
- $q_2[n+1] = q_1[n]$.
- La salida verifica

$$
\begin{aligned}
y[n] &= b_0(x[n] - a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n]) + b_1 q_1[n] + b_2 q_2[n] \\
&= (b_1 - b_0 a_1) q_1[n] + (b_2 - b_0 a_2) q_2[n] + b_0 x[n].
\end{aligned}
$$

2.2.3 Variables de estado (III)

Matricialmente, las tres ecuaciones anteriores son

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n].$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}[n+1] &= \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n], \\ y[n] &= \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + Dx[n]; \end{aligned}$$

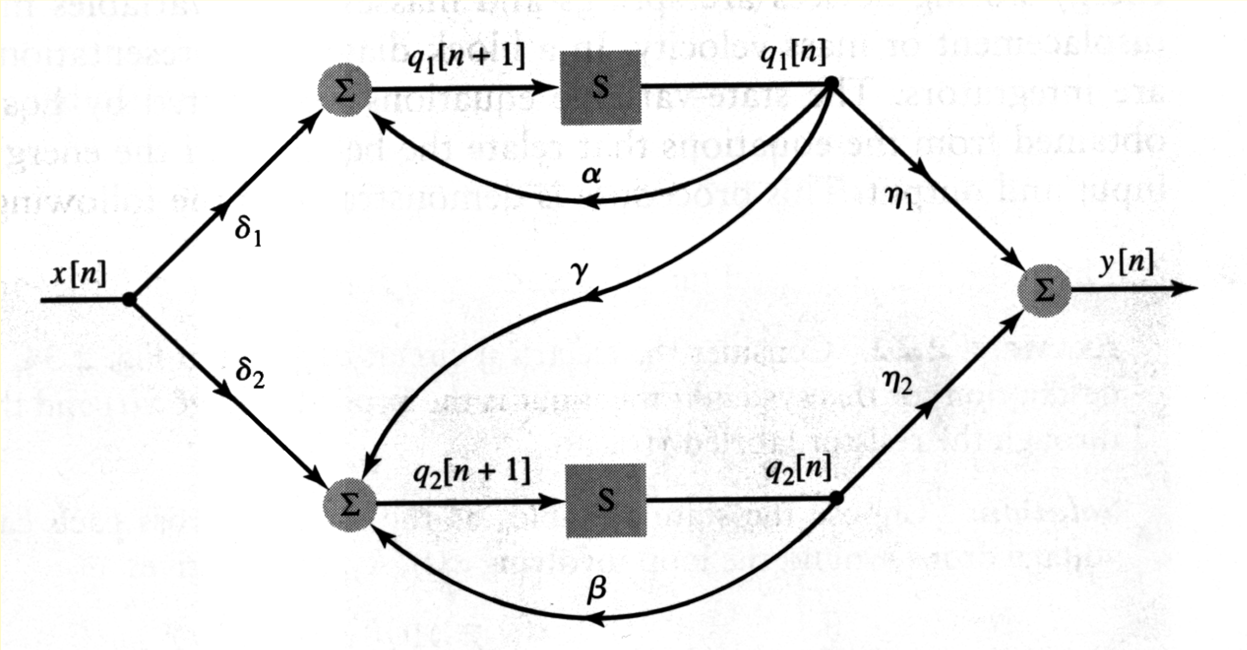
donde $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (b_1 - b_0 a_1) & (b_2 - b_0 a_1) \end{bmatrix}$, $D = b_0$.

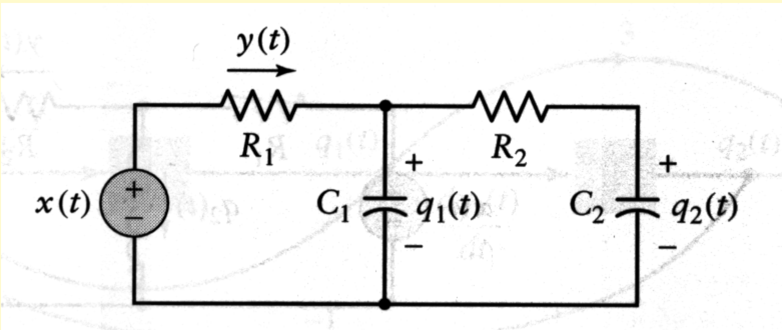
Las dimensiones de las matrices son

$$\mathbf{q} : N \times 1, \mathbf{A} : N \times N, \mathbf{b} : N \times 1, \mathbf{C} : 1 \times N.$$

2.2.3 Variables de estado (IV)

- Ej. 1 del examen febrero 2000: i)–iv).

- 

- 

2.3 Funciones singulares

- Retomamos el impulso unitario continuo $\delta(t)$ ahora que hemos visto la RI y el concepto de convolución.
- $\delta(t)$ no es una función, sino una distribución o función singular.
- A cada función le hace corresponder otra función.
- El IU es una idealización de un pulso *lo suficientemente corto* como para que no importe su forma y duración.
- Podría pensarse que la energía se ha aplicado instantáneamente, $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$.

2.3 Funciones singulares (II)

- El IU puede definirse de forma operacional, por cómo actúan sobre él los sistemas LTI.
- Selección: $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$, convolución: $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$.
- En particular, si $t_0 = 0$, $x(t) * \delta(t) = x(t)$. Si $x(t) = \delta(t)$, $\delta(t) = \delta(t) * \delta(t)$.
- Si tomamos el IU y calculamos la convolución consigo mismo obtenemos el IU.

2.3 Funciones singulares (III)

- Desde el punto de vista de definir $\delta(t)$ como $\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$, $r_\Delta(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta^2}(t\,[0 \leq t < \Delta] + (2\Delta - t)\,[\Delta < t \leq 2\Delta])$.

  $\boxed{\text{Dibujar } \delta_\Delta(t) \text{ y } r_\Delta(t)}$

- Por tanto, $\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} r_\Delta(t)$. Análogamente con $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ o $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$.
- Todas estas funciones, y muchas otras, se comportan como impulsos. En lugar de la definición anterior de $\delta(t)$, podríamos uitilizar $x(t) = x(t) * \delta(t)$ para todo $x(t)$.
- Si tomamos $x(t) = 1$, $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau$.

2.3 Funciones singulares (IV)

- Otra definición. Dado $g(t)$ calculamos $g(-t)$.
  $g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t)\delta(\tau)\, d\tau$. Por tanto,
  $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(\tau)\, d\tau$.
- Dado $x(t)$, fijamos t y definimos $g(\tau) = x(t-\tau)$,
  entonces $g(0) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)\, d\tau$.

2.3 Funciones singulares (V)

- Sea un sistema LTI en el que $y(t) = \dot{x}(t)$.
- ¿RI?: la derivada de $\delta(t)$ (*doblete unitario* $u_1(t)$).
- Operacional: $\dot{x}(t) \equiv x(t) * u_1(t)$, $\ddot{x}(t) \equiv x(t) * u_2(t)$.

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = x(t) * u_1(t) * u_1(t).$$

- $u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \text{ veces}}$.

$$\dot{x}(t) \equiv x(t) * u_1(t), x(t) = 1 \to 0 = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\, d\tau.$$