# Tema 6: Transformadas de Laplace y $z$

0. Introducción.
1. Transformada de Laplace.
2. Transformada $z$.

# 6.1: Transformada de Laplace

1. Introducción.
2. Transformada de Laplace bilateral.
    1. Región de convergencia.
    2. Propiedades de la ROC.
3. Transformada de Laplace unilateral.
4. Propiedades de la transformada de Laplace.
5. Inversión de la transformada de Laplace.
6. Resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.
7. Estabilidad y causalidad.

# 6.1.1 Introducción (I)

- TF de una señal continua $x(t)$:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega,$$

- Representación con sinusoidales complejas $e^{j\Omega t}$.
- TL: generalización de la TF que representa $x(t)$ en función de exponenciales complejas genéricas $e^{st}$.
- TL: aplicable a más señales y sistemas que la TF.
- Ej.: la TF no existe para señales que no sean $\int |\cdot| < \infty$.

# 6.1.1 Introducción (II)

- TL: propiedades similares a la TF.
  - Como exp. complejas son autofunciones de los LTI,

$$\text{convolución} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \text{producto}$$

- Existen dos variedades de la TL:
  - Unilateral: herramienta apropiada para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.
  - Bilateral: permite investigar características de sistemas tales como la estabilidad, causalidad y respuesta frecuencial.

# 6.1.2 La TL bilateral (I)

- $e^{st}$: exp. compleja de frecuencia compleja $s = \sigma + j\Omega$.
- $\Re$ e $\Im$: sinusoides $\times$ exponencial (si $\sigma < 0$: decreciente).
- Autofunciones de los sistemas LTI:
  - Si $x(t) = e^{st}$ entra a un LTI con RI $h(t)$, la salida será $y(t) = H(s)e^{st}$, donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau \qquad \text{(análisis)}$$

es la función de transferencia del sistema.

# 6.1.2 La TL bilateral (II)

- Como $s = \sigma + j\Omega$,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (h(\tau)e^{-\sigma\tau})e^{-j\Omega\tau}\, d\tau = \mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\}.$$

- Por tanto,

$$h(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(s)e^{j\Omega t}\, d\Omega.$$

- Multiplicando por $e^{\sigma t}$ y considerando $ds = j d\Omega$,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{st}\, ds. \qquad \text{(síntesis)}$$

# 6.1.2 La TL bilateral (III)

- Análisis y síntesis. Par transformado: $x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$.
- La evaluación directa de la ec. de síntesis requiere una integración a lo largo de un contorno.
- Habitualmente no se integra, sino que se recurre a correspondencias entre $x(t)$ y $X(s)$:
  - Descomposición en fracciones simples.
  - Aplicación de las propiedades (linealidad, desplazamiento, derivación, integración, ...).
  - Tablas.

# 6.1.2.1 Región de convergencia (I)

- Como la TL de $x(t)$ es la TF de $x(t)e^{-\sigma t}$, $\exists$ TL cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t)e^{-\sigma t} \right| dt < \infty.$$

- El rango de valores de $\sigma$ para los que converge la TL se denomina la región de convergencia (ROC).
- $\exists$ TL incluso para señales que no son $\int |\cdot|$.
- Ej.: $x(t) = e^{t}u(t)$ no tiene TF pero si TL para $\sigma > 1$.

¿Cómo son $x(t)$, $e^{-\sigma t}$ y su producto?

# 6.1.2.1 Región de convergencia (II)

- Representaremos la frecuencia compleja $s$ en un plano complejo en el que
  - el eje de abscisas es la parte real $\sigma$.
  - el de ordenadas la frecuencia angular $j\Omega$.
- El eje imaginario divide el plano $s$ en dos mitades:
  - semiplano izquierdo: valores negativos de $\sigma$.
  - semiplano derecho: valores posititivos de $\sigma$.
- Si existe la TF, puede obtenerse a partir de la TL como

$$X(j\Omega) = X(s)|_{\sigma=0} ;$$

es decir, evaluando la TL en el eje imaginario.

# 6.1.2.1 Región de convergencia (III)

- Habitualmente tendremos TL racionales en $s$

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \ldots b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M} (s - c_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - d_k)}$$

- $c_k$: ceros de $H(s)$, símbolo $\circ$.
- $d_k$: polos de $H(s)$, símbolo $\times$.
- La localización de los polos y ceros en el plano complejo especifica totalmente —excepto por el factor de ganancia $b_M$— a $H(s)$ racional.
- Polos y ceros en el infinito.

# 6.1.2.1 Ejemplo

- Calcular TL, localización de polos y ceros y ROC's de $x(t) = e^{at}u(t)$ e $y(t) = -e^{at}u(-t)$.

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a.$$

$$Y(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma < a.$$

- Aunque $x(t) \neq y(t)$, $X(s) = Y(s)$.
- Se distinguen sólo por su ROC: para especificar completamente la TL hay que indicar la ROC.

# 6.1.2.1 Región de convergencia (IV)

- Generalización del ejemplo anterior:
- Sean $x(t) = g(t)u(t)$ e $y(t) = -g(t)u(-t)$.
- Sus TL son

$$X(s) = G(s,\infty) - G(s,0), \text{donde } G(s,t) = \int g(t)e^{-st}\,dt;$$

$$Y(s) = G(s,-\infty) - G(s,0).$$

- Por tanto, $X(s) = Y(s)$ cuando $G(s,\infty) = G(s,-\infty)$.
- Los valores de $s$ que hacen que $G(s,\infty)$ sea finito son distintos de los que hacen que lo sea $G(s,-\infty)$: debe especificarse la ROC.

# 6.1.2.1 Ejemplos

- Calcular la TL de $x(t) = u(t-5)$

$$X(s) = \frac{e^{-5s}}{s}, \qquad \sigma > 0.$$

- Calcular la TL de $y(t) = e^{j\Omega_0 t}u(t)$.

$$Y(s) = \frac{1}{s - j\Omega_0}, \qquad \sigma > 0,$$

Tiene un polo en $s = j\Omega_0$.

# 6.1.2.2 Propiedades de la ROC (I)

- Como la TLB involucra los valores de $x(t)$ tanto para $t < 0$ como para $t \geq 0$:
  - Es una herramienta apropiada para problemas que traten con señales y sistemas no causales.
  - No está especificada unívocamente a no ser que se especifique la ROC.
- Veremos cómo se relaciona la ROC con las características de $x(t)$:
  - a menudo podremos identificar la ROC a partir de la expresión de $X(s)$ y de las propiedades de $x(t)$.

# 6.1.2.2 Propiedades de la ROC (II)

1. La ROC no puede contener polos
   - Si la TL converge, $X(s)$ es finita sobre toda la ROC. Si $d$ es un polo, $X(d) = \pm\infty$.
2. La ROC está formada por bandas paralelas al eje imaginario.
   - Como $X(s) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$, la convergencia de la TL implica que

     $$I(\sigma) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\,dt < \infty$$

     para algunos valores de $\sigma$: la ROC depende sólo de $\sigma = \Re(s)$.

# 6.1.2.2 Propiedades de la ROC (III)

3. Si $x(t)$ acotada y duración finita: ROC todo el plano $s$.
   - Duración finita: $x(t) = 0$ para $t < a$ y $t > b$.
   - Acotada: $|x(t)| \leq A$.
   - Por tanto,

$$I(\sigma) \leq \int_a^b A e^{-\sigma t}\, dt = \begin{cases} (-A/\sigma) e^{-\sigma t}\Big|_a^b, & \sigma \neq 0, \\ A(b-a), & \sigma = 0. \end{cases}$$

$I(\sigma)$ es finita para todo $\sigma$.

# 6.1.2.2 Propiedades de la ROC (IV)

4. Si $x(t)$ es de orden exponencial: la ROC de una izquierda es de la forma $\sigma < \sigma_n$, de una derecha $\sigma > \sigma_p$, de una bilateral $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$.
   - ¿Qué son señales izquierdas, derechas y bilaterales?.
     - Si $x(t) = 0$ para $t > b$: señal unilateral izquierda.
     - Si $x(t) = 0$ para $t < a$: unilateral derecha.
     - Bilateral: extensión infinita en ambos sentidos.
   - ¿Qué es una señal de orden exponencial?

# 6.1.2.2 Propiedades de la ROC (V)

Orden exponencial:

- Si hacemos $I(\sigma) = I_{-}(\sigma) + I_{-}(\sigma)$, donde

$$I_{-}(\sigma) = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|e^{-\sigma t}\,dt, \quad I_{+}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\,dt,$$

  $I(\sigma)$ es finita si lo son ambas integrales: $|x(t)|$ debe estar limitada de algún modo.

- $A$ y $\sigma_p$: menores ctes. t.q. $|x(t)| \leq Ae^{-\sigma_p t}$, $\forall t > 0$.
- Sea $\sigma_n$ la mayor constante t.q. $|x(t)| \leq Ae^{\sigma_n t}$, $\forall t < 0$.
- Una señal que satisfaga estas condiciones es de *orden exponencial* ($|x(t)|$ no crece más rápido que $e^{\sigma_p t}$ para $t$ positivo: no como $e^{t^2}$ o $t^{3t}$).

# 6.1.2.2 Propiedades de la ROC (VI)

$$I_{-}(\sigma) \leq A \int_{-\infty}^{0} e^{(\sigma_n - \sigma)t}\, dt \leq \frac{A}{\sigma_n - \sigma} e^{(\sigma_n - \sigma)t} \Big|_{-\infty}^{0},$$

$$I_{+}(\sigma) \leq \frac{A}{\sigma_p - \sigma} e^{(\sigma_p - \sigma)t} \Big|_{0}^{\infty}.$$

- $I_{-}(\sigma)$ es finita cuando $\sigma < \sigma_n$.
- $I_{+}(\sigma)$ es finita cuando $\sigma > \sigma_p$.
- Por tanto, ambas lo son si $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$.
- Si $\sigma_p > \sigma_n$ la TL no converge.

5. Si $X(s)$ es racional, la ROC está limitada por polos o se extiende hasta el infinito.

# 6.1.2.2 Ejemplo (I)

Identificar las ROC de

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(-t),$$
$$x_2(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$$

- Comprobamos la integrabilidad de $|x_1(t)|e^{-\sigma t}$ calculando

$$I_1(\sigma) = \left.\frac{-1}{1+\sigma}e^{-(1+\sigma)t}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{-1}{2+\sigma}e^{-(2+\sigma)t}\right|_{0}^{\infty}.$$

- El primer término converge para $\sigma < -1$, el segundo para $\sigma > -2$.

# 6.1.2.2 Ejemplo (II)

(La TL es

$$X_1(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2},$$

polos en $s = -1$ y $s = -2$).

- Análogamente para $|x_2(t)|e^{-\sigma t}$

$$I_2(\sigma) = \frac{-1}{2+\sigma} e^{-(2+\sigma)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{1+\sigma} e^{-(1+\sigma)t} \Big|_{0}^{\infty}.$$

El primer término converge cuando $\sigma < -2$ y el segundo cuando $\sigma > -1$.

# 6.1.2.2 Ejercicio

Consideremos la señal $x(t) = e^{-b|t|}$.

- ¿Cuál es la ROC si $b > 0$?
- ¿Cuál es la ROC si $b < 0$?

# 6.1.3 La TL unilateral (I)

- En muchas aplicaciones de la TL, trabajamos con señales causales: nulas para $t < 0$.
- Por ejemplo, la salida de un LTI causal al que se le aplica una entrada causal.
- Al trabajar con señales causales, se elimina la ambigüedad inherente en la TL bilateral y no es necesario considerar ROC.
- La TL unilateral de una señal $x(t)$ se define como

$$X(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} \, dt$$

# 6.1.3 La TL unilateral (II)

- El límite inferior $0^+$ implica que $X(s)$ depende tan sólo de $x(t)$ para $t > 0$. Las discontinuidades e impulsos en $t = 0$ están excluidos.
- La transformada inversa es la misma expresión que para la bilateral.
- Para señales causales coinciden ambas

$$e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a},$$

$$e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \quad \text{con } \sigma > a.$$

# 6.1.4 Propiedades de la TL (I)

- Son muy similares a las de la transformada de Fourier.
- La bilateral y la unilateral comparten muchas propiedades, pero se diferencian en otras.
- Linealidad: $ax(t) + by(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} aX(s) + bY(s)$.
- Escalado: $x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(s/a)$.
- Convolución: $x(t) * y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)Y(s)$.
- Desplazamiento en el dominio $s$: $e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s - s_0)$.

# 6.1.4 Propiedades de la TL (II)

- Desplazamiento temporal: $x(t-\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-s\tau}X(s)$.
  - En el caso de la unilateral sólo es válido para aquellos valores de $\tau$ tales que

$$x(t-\tau)u(t) = x(t-\tau)u(t-\tau).$$

¿Qué ocurre cuando $x(t)$ tiene una región no nula en $t$ positivo que se desplaza a $t$ negativo?

¿Y cuándo tiene una región no nula en $t$ negativo que se desplaza a $t$ positivo?

# 6.1.4 Propiedades de la TL (III)

- Diferenciación en el dominio $s$: $-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{ds}X(s)$.
- Diferenciación en el dominio del tiempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \int_{0^+}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) e^{-st}\, dt$$

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} + s\int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt = sX(s) - x(0^+),$$

ya que, si $X(s)$ existe, necesariamente $x(t)e^{-st}\Big|_{t=\infty} = 0$.

- Para la transformada bilateral, $\dot{x}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$.

# 6.1.4 Propiedades de la TL (IV)

- El caso general de diferenciación en el tiempo es

Si

$$w(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k},$$

entonces

$$W(s) = s^k X(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-1-l} \left. \frac{d^l x(t)}{dt^l} \right|_{t=0^+}$$

# 6.1.4 Propiedades de la TL (V)

- Integración en el tiempo:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{x^{(-1)}(0^+)}{s} + \frac{X(s)}{s},$$

donde $x^{(-1)}(0^+) = \int_{-\infty}^{0^+} x(\tau)\, d\tau$ es el área bajo $x(t)$ desde $t = -\infty$ hasta $t = 0^+$.

Para la transformada bilateral, si $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$ con ROC $= R$, entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s},$$

con ROC que contiene a $R \cap \{\sigma > 0\}$.

# 6.1.4 Propiedades de la TL (VI)

- Teoremas de valor inicial y final. Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no presenta deltas ni singularidades de orden superior en el origen, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s),$$
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s).$$

- El teorema de valor inicial no aplica a funciones $X(s)$ racionales cuyo numerador sea de orden mayor que el denominador.
- El teorema del valor final aplica sólo si todos los polos de $X(s)$ se encuentran en la parte izquierda del plano $s$, teniendo como máximo un polo en el origen.

# 6.1.4 Ejemplos y ejercicios

- Ej: calcular los valores inicial y final de una señal $x(t)$ cuya transformada unilateral es $X(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$. $x(0^+) = 7$, $x(\infty) = 5$. Verificar que $x(t) = (5 + 2e^{-2t})u(t)$.
- Ej: calcular los valores inicial y final de $x(t)$ si $X(s) = e^{-5s}\frac{-2}{s(s+2)}$. $x(0^+) = 0$, $x(\infty) = -1$.
- Hacer el ejercicio 9.53. Consultar las tablas 9.1 (propiedades) y 9.2 (pares transformados).

# 6.1.5 Inversión de la TL (I)

- Un par transformado importante es:

$$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{A}{(s+\alpha)^n},$$

(casos particulares de interés son $n = 1$ o $\alpha = 0$).

- Ej: calcular la transformada inversa de

$$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2},$$

$A = -B = 1$, $C = 2$. $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t} + 2te^{-2t})u(t)$.

- Ejemplo

$$X(s) = \frac{-5s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)}, \quad \rightarrow x(t) = (e^{-t} - 2e^{t} + e^{-2t})u(t).$$

# 6.1.5 Inversión de la TL (II)

- Si $\alpha \pm j\Omega$ son dos polos complejos conjugados

$$\frac{A_1}{s-\alpha-j\Omega_0}+\frac{A_2}{s-\alpha+j\Omega_0}.$$

- Si deben representar a una señal real, $A_1$ y $A_2$ deben ser complejos conjugados (como los denominadores) ya que $A+A^* \in \mathbb{R}$.
- Si expandimos la expresión anterior —con $A_1 = A_2^*$—

$$\frac{A_1(s-\alpha+j\Omega_0)+A_2(s-\alpha-j\Omega_0)}{(s-\alpha)^2+\Omega_0^2}=\frac{B_1 s+B_2}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2},$$

con todos los coeficientes reales.

# 6.1.5 Inversión de la TL (III)

- Resolvemos para $B_1$ y $B_2$ y factorizamos el resultado en la suma de dos términos cuadráticos con TL inversas conocidas

$$\frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha)^2+\Omega_0^2} = \frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\Omega_0^2} + \frac{C_2\Omega_0}{(s-\alpha)^2+\Omega_0^2},$$

donde $C_1 = B_1$ y $C_2 = (B_1\alpha + B_2)/\Omega_0$.

$$x(t) = (C_1 e^{\alpha t}\cos(\Omega_0 t) + C_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\Omega_0 t))u(t).$$

# Ejemplo (I)

Encontrar la TL inversa de

$$X(s) = \frac{4s^2+6}{s^3+s^2-2}.$$

- Raíces del denominador:
  $s^3+s^2-2=(s-1)(s^2+2s+s)$.
- Raíces del polinomio de segundo orden: $s=-1\pm j$.
- Expansión en fracciones simples

$$X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B_1 s + B_2}{(s+1)^2+1}.$$

# Ejemplo (II)

- El coeficiente $A$ se obtiene mediante el método de los residuos $A = X(s)(s-1)|_{s=1} = 2$.
- Los otros dos coeficientes, resolviendo el sistema, $B_1 = 2$, $B_2 = -2$.
- Factorizando $2s - 2 = 2(s+1) - 4$,

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + 2\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - 4\frac{1}{(s+1)^2+1},$$

Por tanto,

$$x(t) = (2e^t + 2e^{-t}\cos t - 4e^{-t}\operatorname{sen} t)u(t).$$

# Ejercicio

- Expandir

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

en fracciones simples para comprobar que su TLI es

$$x(t) = (-e^{-t} + 2e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t))u(t).$$

- La localización de los polos de $X(s)$ determina las características de $x(t)$. Un polo en $s = d_k$ resulta en una sinusoidal exponencialmente amortiguada $e^{d_k t}u(t)$. Si $d_k = \sigma_k + j\Omega_k$, la parte real determina el factor de amortiguamiento, y la parte imaginaria la frecuencia.

# 6.1.6 Resolución de ED con CI (I)

- Ej: calcular la salida del sistema descrito por

$$\dot{y}(t) + 5y(t) = x(t)$$

si $x(t) = 3e^{-2t}u(t)$ e $y(0^+) = -2$.

Calculando la TL unilateral,

$$sY(s) - y(0^+) + 5Y(s) = X(s),$$

por lo que

$$Y(s) = \frac{1}{s+5}(X(s) + y(0^+)) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5} - \frac{2}{s+5},$$

$y(t) = (e^{-2t} - 3e^{-5t})u(t)$.

# 6.1.6 Resolución de ED con CI (II)

- Calculando la TLU de la ED general

$$a_N \frac{d^N}{dt^N} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t),$$

obtenemos $A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s) - D(s)$, donde

$$A(s) = a_N s^N + \cdots + a_1 s + a_0,$$

$$B(s) = b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0,$$

$$C(s) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} \left. \frac{d^l}{dt^l} y(t) \right|_{t=0^+},$$

$$D(s) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=0}^{k-1} b_k s^{k-1-l} \left. \frac{d^l}{dt^l} x(t) \right|_{t=0^+}.$$

# 6.1.6 Resolución de ED con CI (III)

- Si todas las condiciones iniciales son nulas, $C(s) = 0$. Si la entrada es cero, $B(s)X(s) - D(s) = 0$.
- Podemos escribir $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{B(s)X(s) - D(s)}{A(s)} + \frac{C(s)}{A(s)} = Y^{(f)}(s) + Y^{(n)}(s).$$

- El método de la TL para resolver ED separa claramente la respuesta natural del sistema a las condiciones iniciales y la respuesta forzada asociada a la entrada.

# Ejemplo

- Si $x(t) = u(t)$, $y(0^+) = 1$ y $\dot{y}(0^+) = 2$, calcular la salida del sistema $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$.
- TLU: $(s^2 + 5s + 6)Y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+) - 5y(0^+) = (2s + 1)X(s) - 2x(0^+)$, con lo que

$$Y(s) = \frac{(2s+1)X(s) - 2x(0^+)}{s^2 + 5s + 6} + \frac{sy(0^+) + \dot{y}(0^+) + 5y(0^+)}{s^2 + 5s + 6}.$$

$$Y^{(f)}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1/6}{s} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1/3}{s+3},$$

$$Y^{(n)}(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s+3)} = \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}.$$

# Ejercicio

Comprobar que las respuestas natural y forzada del sistema descrito por $\dot{y}(t) + 3y(t) = 4x(t)$, cuando $x(t) = \cos(2t)u(t)$ e $y(0^+) = -2$ vienen dadas por

$$y^{(f)}(t) = \left(-\frac{12}{13}e^{-3t} + \frac{12}{13}\cos(2t) + \frac{8}{13}\,\mathrm{sen}(2t)\right)u(t),$$

$$y^{(n)}(t) = -2e^{-3t}u(t).$$

# 6.1.7 Estabilidad y causalidad (I)

- La RI es la TL inversa de la función de transferencia.
- Para poder realizar la inversión, necesitamos conocer la ROC o tener algún otro conocimiento sobre la RI.
- La descripción de un sistema mediante su ED no proporciona este conocimiento.

# 6.1.7 Estabilidad y causalidad (II)

- La RI de un sistema causal es cero para $t < 0$.
  - Un polo en el semiplano izquierdo contribuye con una exponencial decreciente.
  - En el semiplano derecho con una creciente.
- Si el sistema es estable, su RI es absolutamente integrable (existe la TF y la ROC incluye al eje imaginario).
  - Un polo en el semiplano derecho da lugar a una exponencial decreciente para $t < 0$.
- Si se sabe que es causal y estable, todos los polos deben estar en el semiplano izquierdo.

# Ejemplo

- Si la función de transferencia de un sistema es

$$H(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-2},$$

calcular las posibles RI del mismo.

  - La RI, suponiendo que el sistema es estable, es

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{2t}u(-t).$$

  - La RI, suponiendo que el sistema es causal, es

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(t).$$

# Ejemplo

- Comprobar que la RI de un sistema estable y causal descrito por la ED

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 13x(t)$$

tiene que ser, necesariamente,

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) + \delta(t).$$

# Tema 6.2: transformada $z$

1. Introducción.
2. Transformada $z$ bilateral (TZB).
3. Transformada $z$ unilateral (TZU).
4. Función generatriz.
5. Transformada $z$ inversa (TZI).
6. Región de convergencia.
7. Técnicas de cálculo de la TZI.
8. Propiedades de la TZ.
9. Análisis de sistemas LTI discretos mediante la TZB.
10. Sistemas LTI descritos por EDCC.
11. Recurrencias y TZU.

# 6.2.1 Introducción (I)

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{h[n]} \xrightarrow{y[n]}$$

- LTI: la salida es el producto de convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

- Exp. complejas autofunciones, si $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n.$$

- Función $H(z)$: transformada $z$ *bilateral* de $h[n]$.

# 6.2.1 Introducción (II)

- Existe también la transformada $z$ unilateral $H_+(z)$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}, \quad H_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}.$$

  - Especialmente útil para analizar sistemas regidos por EDCC con CI no nulas (no en reposo inicial).
- Cuando digamos simplemente *transformada* $z$, nos referiremos a la bilateral.

# 6.2.2 Transformada $z$ bilateral (I)

- La TZ convierte la secuencia $x[n]$ en una función de $z$

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots$$

- El parámetro $z = re^{j\omega} \in \mathbb{C}$; si $|z| = 1$,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

- Relación entre las transformadas de Fourier y $z$ de $x[n]$:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \mathcal{Z}\{x[n]\}|_{z=e^{j\omega}}.$$

# 6.2.2 Transformada $z$ bilateral (II)

- TF $=$ TL evaluada en el eje imaginario.
- DTFT $=$ TZ evaluada en la circunferencia unidad.

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\},$$

es decir, TZ de $x[n]$ es la DTFT de $x[n]r^{-n}$.

- $x[n] \times$ exp. real creciente (si $r > 1$) o decreciente.
- $\exists$ TZ para $r$ t.q. $\exists$ TF de $x[n]r^{-n}$: concepto de ROC.
- ROC=ROC($r$): acotada por círc. centrados en el origen.
- $\exists$ DTFT $x[n]$ si circ. unidad $\in$ ROC de su TZ.

# Ejemplo (I)

- Calcular la TZ de $x[n] = a^n u[n]$ [Oppenheim 10.1]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|.$$

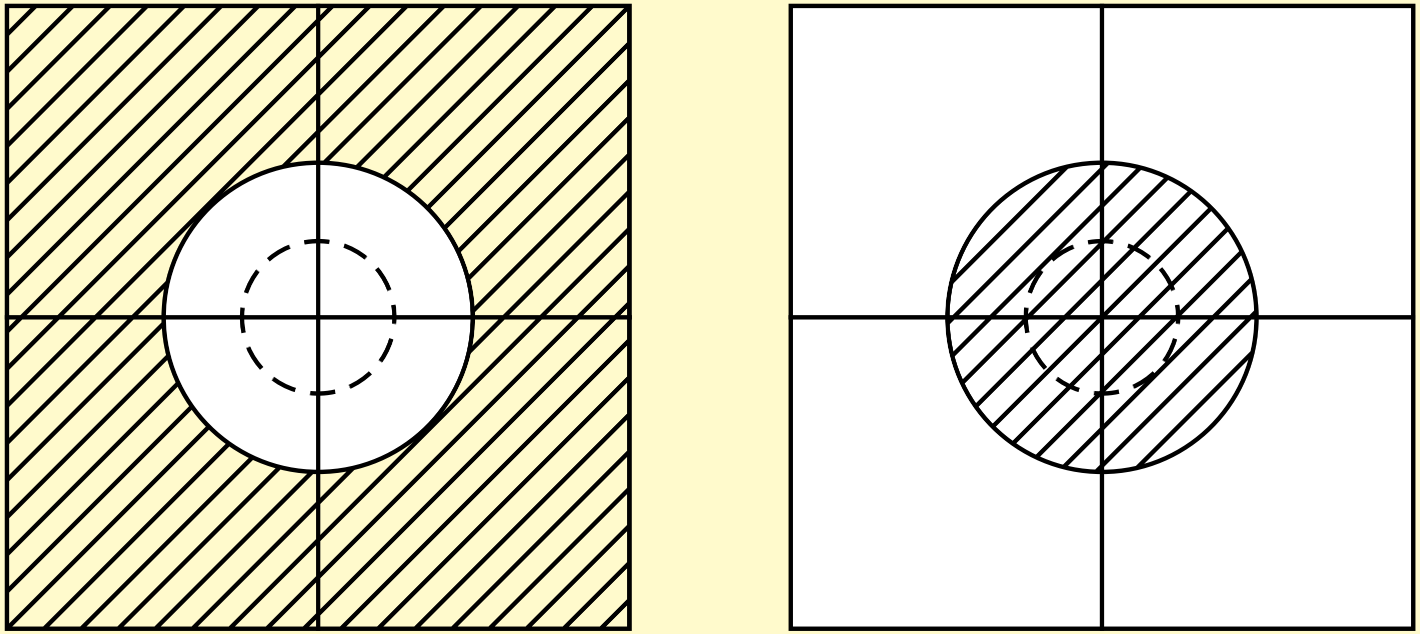
- Calcular la TZ de $x[n] = -a^n u[-n-1]$ [Oppenheim 10.2]

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|.$$

# Ejemplo (II)

- Ambas secuencias —distintas— tienen la misma expresión racional para su TZ.
- Sólo se diferencian en su ROC.



- Interpretar qué ocurre cuando $a = 2$ y $a = 1/2$ en cuanto a la existencia de la DTFT.

# Ejemplo (I)

- Calcular la TZ de [Oppenheim, 10.3]

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

$$X(z) = 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n.$$

Para que converga debe verificarse, $|(1/3)z^{-1}| < 1$ y $|(1/2)z^{-1}| < 1$; es decir, $|z| > 1/3$ y $|z > 1/2|$.

# Ejemplo (II)

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \\ &= \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

- $X(z)$: función de $z$ o función de $z^{-1}$.

# 6.2.2 Transformada $z$ bilateral (III)

- Como
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$
si $x[n]$ es causal, $X(z)$ sólo tendrá potencias negativas de $z$: más conveniente función racional en $z^{-1}$.
- En todo caso, los polos y ceros son de $X(z)$ como función de $z$.
- Cuando $x[n]$ sea una CL de exponenciales reales y complejas
  - su TZ será racional en $z$.
  - por lo que estará determinada por su patrón de polos y ceros.

# 6.2.3 Transformada $z$ unilateral (I)

- La TZU puede interpretarse como la TZB de $x[n]u[n]$.
- La ROC de $X_+(z)$ es siempre el exterior de un círculo.
- La TZU

$$X_+(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

  no contiene potencias positivas de $z$ ...
- ... lo que se refleja en la expansión permitida.

# 6.2.3 Transformada $z$ unilateral (II)

- Si $X_+(z)$ debe tener una expansión en serie sin potencias positivas de $z$, no cualquier función de $z$ puede ser una transformada unilateral.
- En particular, para que la función

$$\frac{p(z)}{q(z)},$$

  - un cociente de polinomios en $z$(no en $z^{-1}$)
  - sea una transformada unilateral válida
  - con una ROC que sea el exterior de un círculo.
  - el orden del numerador no debe ser mayor que el del denominador.

# 6.2.4 Función generatriz (I)

- Función generatriz de la secuencia $x[n]$:

$$X_g(z) = X_+(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^n.$$

- Ejemplo, la FG de

$$x[n] = \begin{cases} n^2, & 0 \leq n \leq 6, n \text{ par}, \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases}$$

es

$$X_g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^n = 4z^2 + 16z^4 + 36z^6.$$

# 6.2.4 Función generatriz (II)

- Los coeficientes del desarrollo en serie de $X_g(z)$ involucran a la secuencia $x[n]$.

$$X_g(z) = X_g(0) + z \left.\frac{dX_g}{dz}\right|_{z=0} + \frac{z^2}{2} \left.\frac{d^2X_g}{dz^2}\right|_{z=0} + \cdots = \sum_{n\geq 0} x[n]z^n.$$

- Si comparamos la expresión anterior con la definición de la función generatriz

$$x[0] = X_g(0), \quad x[n] = \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n X_g(z)}{dz^n}\right|_{z=0}.$$

# 6.2.5 Transformada $z$ inversa (I)

- Como TZ $x[n]$ = TF de $x[n]r^{-n}$ ($\forall r$ t.q. $z = re^{j\omega} \in$ ROC), entonces $x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(z)\}$.
- Podemos recuperar $x[n]$ a partir de su TZ como

$$\begin{aligned} x[n] &= r^n \mathcal{F}^{-1}\{X(z)\} = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n\, d\omega. \end{aligned}$$

- $x[n]$ se obtiene a partir de su TZ evaluada a lo largo del contorno $z = re^{j\omega}$, con $\omega$ variando en un intervalo de $2\pi$ y $r$ fijo en la ROC.

# 6.2.5 Transformada $z$ inversa (II)

- Si cambiamos de variable de integración, considerando que $z = re^{j\omega}$, tendremos $dz = jre^{j\omega}\,d\omega$; es decir, $d\omega = (1/j)z^{-1}\,dz$, podremos poner

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\,dz,$$

  donde la integral está extendida a un contorno circular centrado en el origen y de radio $r$, recorrido en sentido antihorario.
- No es el método habitual de evaluar la TZ inversa.

# 6.2.5.1 Expansión en series de potencias (I)

- Según la definición de la transformada $z$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

$X(z)$ es una serie de potencias en $z$:

$$X(z) = \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \; .$$

En particular, observemos que se verifica

$$\delta[n+n_0] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{n_0}.$$

# 6.2.5.1 Expansión en series de potencias

- Ejemplo [Oppenheim, 10.12]: la transformada inversa de $X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty$, es la secuencia

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2, \\ 2, & n = 0, \\ 3, & n = 1, \\ 0, & \text{en otro caso}; \end{cases} \qquad = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1].$$

# 6.2.5.1 Ejemplo [Oppenheim 10.13]

- Alternativamente, expansión en series de potencias de

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

(en este caso se puede hacer bien dividiendo o bien calculando el desarrollo de Taylor en función de $z^{-1}$)

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots, \quad \text{converge para |z|>|a|.}$$

Comparando con el desarrollo general: $x[n] = a^n u[n]$.

- Si ROC $\equiv |z| < |a|$, la expansión anterior diverge.
- Dividiendo de nuevo o expandiendo $z/(z-a)$ en $z$

$$X(z) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \ldots; \quad \rightarrow x[n] = -a^n u[-n-1].$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.14] (I)

- Método útil para transformadas $z$ no racionales.
- Supongamos que queremos calcular la TZI de

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$$

- Si aplicamos el desarrollo de Taylor de una función $f(\nu)$

$$f(\nu) = f(0) + \nu f'(0) + \frac{\nu^2}{2} f''(0) + \frac{\nu^3}{3!} f'''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n)}(0) \frac{\nu^n}{n!},$$

a la función $f(\nu) = \log(1 + \nu)$, que verifica
  - $f(0) = 0$ y
  - $f^{n)}(\nu) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+\nu)^n}$,

# Ejemplo [Oppenheim, 10.14] (II)

tendremos

$$\log(1+\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\nu^n}{n}, \quad |\nu| < 1,$$

podemos poner

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}a^n z^{-n}}{n};$$

con lo que

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases} = -\frac{(-a)^n}{n}u[n-1].$$

# Ejemplo [Haykin, 7.12]

- Calcular la IZT de $X(z) = e^{z^2}$ con ROC $\equiv |z| \neq \infty$.
- Como

$$e^a = \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!},$$

entonces

$$X(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{k!};$$

por lo que

$$x[n] = \frac{1}{(n/2)!}[n \leq 0 \text{ y par}].$$

# Ejemplos

- Calcular $x[n]$ si
$$X_g(z) = \frac{1}{1-az}.$$
- Calcular $x[n]$ si
$$X_g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$
($x[n] = n+1$).
- Calcular $X(z)$ para $x[n] = \binom{2}{n}$ ($x[n] = (1+z)^2$).
- Calcular $X(z)$ para $x[n] = \binom{4}{n}$ ($x[n] = (1+z)^4$).

# 6.2.6 Región de convergencia (I)

- El patrón de polos y ceros de la TZ no la especifica completamente
  - es necesario suministrar información sobre su ROC.
  - A menudo es posible deducir la ROC para cierto tipo de funciones $X(z)$ a partir de dicho patrón y de consideraciones sobre $x[n]$.
- La región de convergencia de la transformada $z$ presenta las siguientes propiedades:

# 6.2.6 Región de convergencia (II)

1. La ROC de $X(z)$ es un anillo centrado en el origen del plano complejo.
   - Porqué la convergencia depende de $r = |z|$, no de $\omega$.
   - Si el anillo contiene al origen, degenera en un disco.
2. La ROC no contiene ningún polo.
3. Si $x[n]$ es de duración finita, ROC $\equiv$ plano $z$ completo.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n},$$

   - salvo tal vez los puntos $z = 0$ y $z = \infty$
   - cuando $z \to 0$, las potencias negativas de $z$ divergen.
   - Idem las positivas cuando $z \to \infty$.

# 6.2.6 Región de convergencia (III)

4. Si $x[n]$ es derecha ($x[n] = 0$ para $n < N_1$) y el círculo $|z| = r_0 \in$ ROC, entonces $\forall |z| > r_0$, $z \in$ ROC.
   - Si $N_1 < 0$, $X(z)$ tiene pot. positivas, $\rightarrow \infty \notin$ ROC.
   - $x[n]$ causal $\rightarrow N_1 \geq 0$, la ROC se extenderá hasta $\infty$.
5. Si $x[n]$ es izda. y $|z| = r_0 \in$ ROC, $\forall 0 < |z| < r_0, z \in$ ROC.
   - Para este tipo de señales,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n] z^{-n},$$

si $N_2 > 0$, $X(z)$ incluye potencias negativas de $z$ y por tanto la ROC no contendrá al origen.

# 6.2.6 Región de convergencia (IV)

6. Si $x[n]$ es bilateral, y el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces la ROC es un anillo que contiene a dicho círculo.
7. Si $X(z)$ es racional, la ROC o bien está limitada por polos o bien se extiende hasta infinito.
8. Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ es derecha, la ROC es la región del plano $z$ exterior al polo más externo. En particular, si $x[n]$ es causal, entonces la ROC también incluye $z = \infty$.
9. Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ izquierda, la ROC es la región del plano $z$ interior al polo no nulo más interno —incluyendo quizá al punto $z = 0$—. En particular, si $x[n]$ es anticausal, entonces la ROC también incluye al punto $z = 0$.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.5]

- Calcular la TZ y la ROC del impulso unitario.

$$\delta[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1, \quad \text{para todo } z.$$

$$\delta[n-1] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1}, \quad z \neq 0.$$

$$\delta[n+1] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-1} = z, \quad \text{para todo } z \text{ finito.}$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.8] (I)

- Calcular todas las posibles ROC's asociadas a

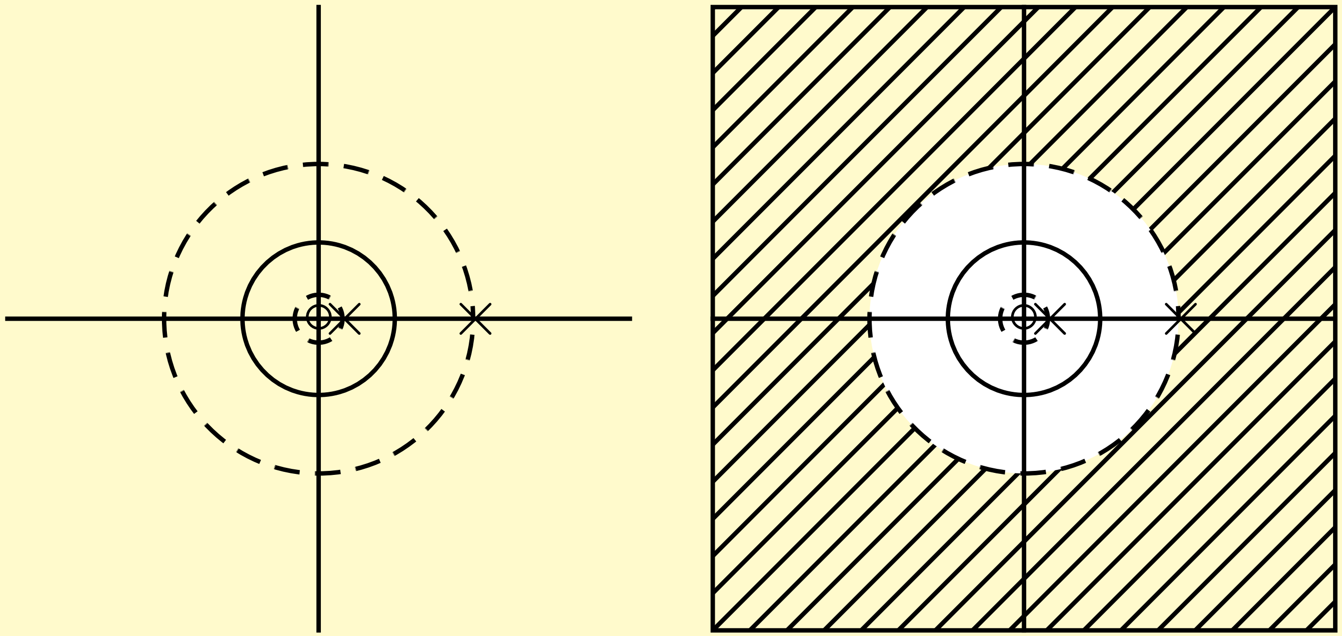
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

- Puesto que los polos y ceros son las raíces del den. y num. como función de $z$, utilizamos

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{3})(z - 2)}.$$

- Cero doble en el origen y polos en $z = 1/3$ y $z = 2$.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.8] (II)



Hay tres posibilidades:

- Secuencia derecha.
- Secuencia izquierda.
- Secuencia bilateral (la única que incluye al círculo unidad (TF)).

# 6.2.7 Técnicas de cálculo de TZI

- Evaluar la IZT descomponiendo $X(z)$ con una combinación de funciones de las que se conozca su inversa.
- Evaluación de la IZT mediante expansión en fracciones simples.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.9–10.11] (I)

- Calcular la transformada $z$ inversa de

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{2z(18z - 5)}{(3z - 1)(4z - 1)}$$

para las distintas posibilidades de su ROC.

- polos: $z = 1/3$ y $z = 1/4$, ceros: $z = 0$ y $z = 18/5$.
- Observar que si hacemos $3 - 5z^{-1}/6 = 0$ para obtener los ceros, no obtenemos el cero en el origen.
- Expandiendo $X(z)$ en fracciones simples de $u = z^{-1}$,

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \equiv x_1[n] + x_2[n].$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.9–10.11] (II)

- Supongamos ROC $\equiv |z| > 1/3$
  - Hacia el exterior del polo mayor.
  - Secuencia derecha.
  - Como $X(z)$ es una combinación lineal de dos términos, sus ROC's respectivas deben ser hacia el exterior, con lo que tendremos

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4},$$

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3}.$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.9–10.11] (III)

- Si ROC $\equiv 1/4 < |z| < 1/3$,

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4},$$

$$x_2[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

- Si ROC $\equiv |z| < 1/4$,

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4},$$

$$x_2[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

# Ejemplo

- Si la ROC es $|z| < 1$, calcular la IZT de

$$X(z) = \frac{z^3 - 10z^2 - 4z + 4}{2z^2 - 2z - 4} = \frac{z^3}{2z^2} \frac{1 - 10z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} \equiv \frac{z}{2} W(z).$$

El factor $z/2$ puede incorporarse más tarde según la propiedad de desplazamiento.

$$W(z) = 3 - 2z^{-1} + \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{3}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| < 1.$$

Por tanto,

$$w[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-1] - (-1)^n u[-n-1] + 32^n u[-n-1],$$

$$x[n] = w[n+1]/2.$$

# Ejemplo

- Calcular la IZT de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$$

suponiendo que

a) la señal es causal ($x[n] = (2^{-n} + 2^{n+1})u[n]$).

b) la señal tiene DTFT ($x[n] = 2^{-n}u[n] - 2^{n+1}u[-n-1]$).

# 6.2.8 Propiedades (I)

- Muchas de las propiedades de la TZ son similares a las de la DTFT.
- La TZ bilateral y la unilateral comparten muchas de sus propiedades, aunque no todas.
  - Por ejemplo, la ROC de la TZ unilateral es siempre el exterior de un círculo.

1. Linealidad. Si $x_i[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_i(z)$ con ROC $R_i$, entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z),$$

  - Con una ROC que incluye a $R_1 \cap R_2$.
  - La ROC será mayor si algunos polos se cancelan con ceros.

# 6.2.8 Propiedades (II)

2. Desplazamiento temporal. Si $x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ con ROC $R$, entonces $x[n-n_0] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$,
   - con la misma ROC.
   - salvo por la posible inclusión o eliminación del origen y el infinito.
   - Si $n_0 > 0$, al multiplicar por $z^{-n_0}$ estamos introduciendo $n_0$ polos en el origen, que pueden cancelar ceros de $X(z)$ en el origen.
   - Por tanto, $z^{-n_0}X(z)$ puede tener polos en el origen que $X(z)$ no tenía, eliminando el origen de la ROC.
   - Lo contrario ocurre para $n_0 < 0$.

# Ejemplo

La TZ unilateral de la secuencia $y[n] = x[n-1]$ es

$$Y_+(z) = \sum_{n\geq 0} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n\geq 1} x[n-1]z^{-n}$$
$$= x[-1] + \sum_{n\geq 0} x[n]z^{-(n+1)} = x[-1] + z^{-1}\sum_{n\geq 0} x[n]z^{-n},$$

que puede relacionarse con la transformada de $x[n]$ como $Y_+(z) = z^{-1}X_+(z) + x[-1]$. Análogamente, obtendríamos la transformada de $w[n] = y[n-1] = x[n-2]$ como $W_+(z) = z^{-2}X_+(z) + x[-1]z^{-1} + x[-2]$.

# Ejercicio [Oppenheim, 10.60]

- Si $y[n] = x[n+1]$, ¿cómo se relaciona $Y_+(z)$ con $X_+(z)$?

$$
\begin{aligned}
Y_+(z) = \sum_{n\geq 0} y[n]z^{-n} &= \sum_{n\geq 0} x[n+1]z^{-n} \\
&= \sum_{m\geq 1} x[m]z^{-m+1} \\
&= z\sum_{m\geq 1} x[m]z^{-m} \\
&= z\left(\sum_{m\geq 0} x[m]z^{m} - x[0]\right) \\
&= zX_+(z) - zx[0].
\end{aligned}
$$

# 6.2.8 Propiedades (III)

3. Escalado en el dominio $z$. Si $x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ con ROC $R$,

$$z_0^n x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right),$$

   - Con ROC $\equiv |z_0|R$, una versión escalada de $R$.
   - Si $z_0 = e^{j\omega_0}$, se produce una rotación de los polos y ceros en el plano complejo.

4. Inversión temporal. $x[-n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z^{-1})$,
   - Con ROC $\equiv 1/R$.
   - Esta propiedad pone de manifiesto una relación entre la transformada $z$ y la función generatriz.

# 6.2.8 Propiedades (IV)

5. Expansión temporal. Si definimos

$$\boxed{x_{(\uparrow k)}[n] = x[n/k][n \text{ es múltiplo de } k]}$$

- Hay $k-1$ ceros entre cada dos muestras de $x[n]$.
- La TZ de la señal expandida es

$$x_{(\uparrow k)}[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z^k), \quad \text{con ROC } R^{1/k}.$$

Podemos comprobar este resultado si consideramos

$$X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^k)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-kn} = \sum_{u \text{ múltiplo de } k} x[u/k]z^{-u}.$$

# 6.2.8 Propiedades (V)

6. Conjugación. $x^*[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z*)$, con la misma ROC.
7. Convolución. $x_1[n] * x_2[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z)$,
   - con una ROC que contiene a $R_1 \cap R_2$
   - pudiendo ser mayor si algún cero cancela a algún polo.
   - Este resultado puede interpretarse como la multiplicación de polinomios.
   - Para la TZ unilateral, el resultado se aplica si $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son nulas para $n < 0$.

# 6.2.8 Propiedades (VI)

8. Acumulación. Definimos una nueva secuencia como el acumulando de $x[n]$,

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = u[n] * x[n].$$

- Si consideramos la propiedad de convolución
- y la TZ del escalón unitario $U(z) = 1/(1 - z^{-1})$,

$$W(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z),$$

- con una ROC que incluye la intersección de $R$ con el círculo $|z| > 1$ (que es la ROC del escalón).

# 6.2.8 Propiedades (VII)

9. Diferenciación en $z$. $nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}$, misma ROC.
10. Teorema de valor inicial. Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, $X(z)$ sólo tendrá potencias $\leq 0$ de $z$

$$X(z) = x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots \quad \rightarrow \quad x[0] = \lim_{z\rightarrow\infty} X(z).$$

Como consecuencia,

- para una secuencia causal con $x[0]$ finito,
- $\lim_{z\rightarrow\infty} X(z)$ es finito.
- orden del numerador $\not>$ orden del denominador.
- número de ceros finitos $\not>$ que el de polos finitos.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.17] (I)

Calcular $x[n]$ cuya TZ es la función no racional

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$$

- Si derivamos con respecto a $z$ tendremos

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{1}{1 + az^{-1}} \frac{-a}{z^2}.$$

- Si multiplicamos por $-z$, para aplicar la propiedad de diferenciación en el dominio $z$, tendremos

$$y[n] = nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.17] (II)

- TZ racional: podemos aplicar las técnicas habituales.

$$b^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|.$$

- Si hacemos $b = -a$ y multiplicamos a su vez por $a$

$$a(-a)^n u[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{a}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

- Aplicando la propiedad de desplazamiento temporal,

$$x[n-n_0] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z) \quad \rightarrow \quad y[n] = a(-a)^{n-1} u[n-1] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}},$$

- Por lo tanto, la secuencia buscada es

$$x[n] = \frac{y[n]}{n} = -\frac{(-a)^n}{n} u[n-1].$$

# 6.2.9 Sistemas LTI y TZB (I)

- ¿Por qué es útil la TZ para analizar sistemas LTI discretos?
  - Por la propiedad de convolución,
  - que permite calcular $Y(z) = H(z)X(z)$,
  - donde $H(z)$ es la función de transferencia del sistema.
- Muchas de las propiedades del sistema pueden relacionarse con
  - Ubicación de polos y ceros.
  - Región de convergencia.

# 6.2.9 Sistemas LTI y TZB (II)

Causalidad:

- Sea un sistema LTI cuya RI es nula para $n < 0$.
- Derecha $\rightarrow$ ROC debe ser el exterior de un círculo (en algunos casos, p. ej. $h[n] = \delta[n]$, $0 \in$ ROC).
- Para una sec. derecha, $\infty$ puede o no pertenecer a ROC (p. ej., $h[n] = \delta[n+1]$, $H(z) = z$ e $\infty \notin$ ROC).
- Si es causal, la serie de potencias $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$ no contiene potencias positivas de $z \rightarrow \infty \in$ ROC.
- LTI discreto es causal sii *la ROC de su función de transferencia es el exterior de un círculo, incluyendo el infinito*.

# 6.2.9 Sistemas LTI y TZB (III)

Un sistema LTI discreto con función de transferencia *racional* es causal sii

1. *La ROC es el exterior de un círculo que pasa por el polo más externo, y*
2. *Si expresamos $H(z)$ como un cociente de polinomios en $z$, el orden del numerador no puede ser mayor que el del denominador.*

# 6.2.9 Sistemas LTI y TZB (IV)

Estabilidad:

- Un sistema LTI discreto es estable sii su RI es sumable en valor absoluto: la TF de $h[n]$ converge y la ROC de $H(z)$ debe incluir al círculo unidad.
- *Un sistema LTI discreto es estable sii la ROC de su función de transferencia incluye al círculo unidad.*
- Para los sistemas causales con función de transferencia racional, la ROC es la región exterior al polo más externo. Para que esta región incluya al círculo unidad todos los polos del sistema deben verificar $|z_k| < 1$.
- *Un sistema LTI discreto y causal, con función de transferencia racional, es estable sii todos sus polos residen en el interior del círculo unidad.*

# 6.2.10 Sistemas LTI descritos por EDCC (I)

- La TZ constituye una herramienta muy útil para analizar sistemas LTI descritos por EDCC, permitiendo calcular
  - La función de transferencia.
  - La transformada de Fourier.
  - La respuesta frecuencial.
- Sistema LTI regido por la ED de orden $N$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

- Según la propiedad de desplazamiento de la TZ

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z),$$

# 6.2.10 Sistemas LTI descritos por EDCC (II)

la función de transferencia es la expresión racional

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}.$$

- Para establecer la región de convergencia necesitamos conocer información acerca de la estabilidad o causalidad del sistema.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (I)

Supongamos un sistema LTI regido por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1].$$

- Si aplicamos la TZ a ambos miembros tendremos

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z),$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}}.$$

$\boxed{\text{¿Qué ROC's son posibles } \times : z = 1/2,\ \circ : z = -1/3\text{?}}$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (II)

- Existen dos posibles ROC's compatibles con la ubicación de los polos.
- Una asociada a una respuesta impulsiva derecha y la otra a una respuesta impulsiva izquierda.
- Vamos a empezar a trabajar con la opción de la secuencia derecha.
- Estudiaremos varias formas de resolver el problema.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (III)

Una forma de abordar el problema es expandir

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > |1/3|. \tag{1}$$

como una serie de potencias en $z^{-1}$ (o la función generatriz en potencias de $z$)

$$H(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2} + \frac{5}{24}z^{-3} + \frac{5}{48}z^{-4} + \cdots .$$

De esta expresión, deducimos inmediatamente la forma general de la respuesta impulsiva

$$h_1[n] = \delta[n] + \frac{5}{3}\frac{1}{2^n}u[n-1].$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (IV)

Otra forma de abordar el problema —la utilizada en el libro— es expresar la ecuación (1) como

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}. \qquad (2)$$

el primer término corresponde a la secuencia $1/2^n u[n]$, y el segundo puede interpretarse como una versión escalada (multiplicada por el factor $1/3$) y desplazada (que se traduce en multiplicar por $z^{-1}$) de ésta, por lo que

$$h_2[n] = \frac{1}{2^n}u[n] + \frac{1}{3}\frac{1}{2^{n-1}}u[n-1].$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (V)

Otra posibilidad más es expandir (1) en fracciones simples

$$H(z) = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \tag{3}$$

con lo que tendremos

$$h_3[n] = -\frac{2}{3}\delta[n] + \frac{5}{3}\frac{1}{2^n}u[n].$$

- Las tres expresiones calculadas para $h[n]$ son equivalentes, ya que generan la misma secuencia de números.
- Comprobar.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (VI)

Supongamos ahora que consideramos la otra posibilidad e imponemos que la ROC es la región $|z| < 1/2$.

- En este caso, la secuencia será izquierda.
- De nuevo, podemos aplicar cualquiera de los tres métodos utilizados en el caso anterior.

La primera posibilidad es expandir la función

$$H(z) = \left(z + \frac{1}{3}\right) / \left(z - \frac{1}{2}\right)$$

como una serie de potencias en $z$

$$H(z) = -\frac{2}{3} - \frac{10z}{3} - \frac{20z^2}{3} - \frac{40z^3}{3} - \cdots = -\frac{2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{1} \frac{-10}{3} 2^{-n-1} z^{-n}.$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (VII)

Si comparamos esta expresión con la definición de la transformada $z$,

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n},$$

deducimos inmediatamente

$$h_4[n] = -\frac{2}{3}\delta[n] - \frac{10}{3} 2^{-n-1} u[-n-1].$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.25] (VIII)

- La segunda posibilidad (la utilizada en el libro) es utilizar la descomposición de la ecuación (2) pero considerar las ROC hacia el interior del círculo $|z| = 1/2$,

$$h_5[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n-1] - \frac{1}{3}\frac{1}{2^{n-1}}u[-n].$$

- La tercera posibilidad es utilizar la ecuación (3) y considerar la región de convergencia hacia el interior,

$$h_6[n] = -\frac{2}{3}\delta[n] - \frac{10}{6}\frac{1}{2^n}u[-n-1].$$

- Las tres expresiones, $h_4[n]$, $h_5[n]$ y $h_6[n]$ son la misma secuencia anticausal.

# Ejemplo

Calcular la descripción mediante ecuación en diferencias del sistema con función de transferencia

$$H(z) = \frac{5z+2}{z^2+3z+2} = \frac{5z^{-1}+2z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}.$$

- Vemos que $N = M = 2$
- y que $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2] = 5x[n-1]+2x[n-2]$.

# Ejemplo

Un sistema está descrito mediante la ecuación en diferencias
$y[n] - y[n-1] + y[n-2]/4 = x[n] + x[n-1]/4 - x[n-2]/8$.

1. Calcular la función de transferencia del sistema inverso.
2. ¿Existe un sistema inverso causal y estable?

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{H^{-1}(z)}.$$

Como los polos de $H^{-1}(z)$ ($z = 1/4$ y $z = -1/2$) están dentro del círculo unidad, el sistema inverso puede ser estable y causal.

# Ejemplo [Oppenheim, 10.36 y 10.37] (I)

- Supongamos un sistema regido por la ecuación en diferencias $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$, al que se le introduce la entrada $x[n] = \alpha u[n]$, cuya TZ unilateral es

$$X_+(z) = \alpha \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

- Al tomar la TZU de la ED se obtiene la relación

$$Y_+(z) + 3(y[-1] + z^{-1}Y_+(z)) = X_+(z).$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.36 y 10.37] (II)

- Supongamos en principio reposo inicial ($y[-1] = 0$)

$$Y_+(z)(1 + 3z^{-1}) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}},$$

- y la transformada $z$ unilateral de la salida es

$$Y_+(z) = \frac{\alpha}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{3\alpha}{4}\frac{1}{1 + 3z^{-1}} + \frac{\alpha}{4}\frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

- La secuencia de salida es por tanto

$$y[n] = \frac{3\alpha}{4}(-3)^n u[n] + \frac{\alpha}{4}u[n].$$

# Ejemplo [Oppenheim, 10.36 y 10.37] (III)

- Supongamos ahora que el sistema está sujeto a la condición inicial $y[-1] = \beta$,

$$Y_+(z) = -\frac{3\beta}{1+3z^{-1}} + \frac{\alpha}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$$
$$= \left(-3\beta + \frac{3\alpha}{4}\right)\frac{1}{1+3z^{-1}} + \frac{\alpha}{4}\frac{1}{1-z^{-1}},$$

- y por tanto

$$y[n] = \left(-3\beta + \frac{3\alpha}{4}\right)(-3)^n u[n] + \frac{\alpha}{4}u[n].$$

# 6.2.11 Recurrencias y TZU

- Supongamos la secuencia causal descrita mediante la relación de recurrencia

$$x[n] = ax[n-1], \quad \text{con } x[0] = 1.$$

- Como $x[1] = a, x[2] = a^2, \ldots$, se deduce $x[n] = a^n u[n]$.
- Esto es lo que entendemos por *resolver la recurrencia*.
- Hay un método sistemático de resolver la recurrencia y averiguar una forma explícita:

$$x[n] = ax[n-1] + \delta[n],$$

$$X(z)(1 - az^{-1}) = 1.$$

# Ejemplo [números de Fibonacci] (I)

Sea la secuencia definida mediante la recurrencia

$$x[n] = x[n-1] + x[n-2],$$

con $x[0] = x[1] = 1$.

- La secuencia que se obtiene aplicando la regla es $1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.
- La forma general es

$$x[n] = x[n-1] + x[n-2] + \delta[n],$$

por lo que $X(z) = z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + 1$

# Ejemplo [números de Fibonacci] (II)

$$X(z)=\frac{-1}{z^{-2}+z^{-1}-1}=\frac{-1}{(z^{-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2})(z^{-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+z^{-1}}-\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}+z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}z^{-1}}-\frac{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}z^{-1}}\right).$$

La secuencia asociada será

$$x[n]=\frac{(-1)^n2^{n+1}}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]u[n]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]u[n].$$

# Ejercicio

- Supongamos una secuencia $x[n]$ definida por

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 1, & n = 1, \\ x[n-1] + 2x[n-2] + (-1)^n, & n \geq 2. \end{cases}$$

1. Calcular la transformada $z$ de $x[n]$. Representar su patrón de polos y ceros y la región de convergencia (razonando si el origen y el infinito pertenecen o no a la región de convergencia).
2. Deducir una expresión explícita —que no sea una relación de recurrencia— para $x[n]$. ¿Existe $X(e^{j\omega})$?

# Ejercicio

- Calcular la secuencia asociada a la función

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 4z^{-2} + z^{-4}}$$

si su ROC es el exterior de un círculo en el plano $z$.

# Ejercicio (I)

- Supongamos dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$ definidas mediante las siguientes relaciones de recurrencia

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, \\ 2y[n-1] + x[n-2], & n \geq 2. \end{cases},$$

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 1, \\ 0, & n = 0, \\ x[n-1] + y[n-2], & n \geq 2. \end{cases}.$$

# Ejercicio (II)

1. Calcular la transformada $z$ de $x[n]$ y de $y[n]$.
   (a) Representar su patrones de polos y ceros
   (b) y las regiones de convergencia
   (c) razonando si el origen y el infinito pertenecen o no a dichas regiones.
2. Deducir una expresión explícita —que no sea una relación de recurrencia— para cada una de las secuencias $x[n]$ e $y[n]$.

# 6.2.11 Resumen (I)

- La TZ representa señales discretas como una CL de exponenciales complejas —más generales que las sinusoidales complejas— por lo que puede representar un conjunta mayor de señales que la DTFT, incluyendo las que no son sumables en valor absoluto.
- La TZ puede utilizarse para analizar señales y sistemas no estables.
- La DTFT se utiliza como una herramienta de representación de señales y para estudiar las características de los sistemas en su estado estacionario.
- En estos problemas, la DTFT es más fácil de visualizar que la TZ porque es función de una variable real, $\omega$, en lugar de un número complejo $z = re^{j\omega}$.

# 6.2.11 Resumen (II)

- La TZ bilateral suele utilizarse para estudiar características de los sistemas: estabilidad y causalidad.
- La TZ unilateral es útil para resolver ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales.
- La solución se expresa como la suma de dos términos: la respuesta con entrada nula y la respuesta con condiciones iniciales nulas.
- La primera se obtiene mejor con la TZ unilateral, mientras que la segunda se puede obtener con la bilateral.