Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

4 de febrero de 2002

1. Suponga un sistema LTI cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{x}(t).$$

La salida puede considerarse como la contribución de dós términos: la respuesta natural, $y^n(t)$, debida a las condiciones iniciales no nulas, suponiendo que no hay entrada; y la respuesta forzada, $y^f(t)$, debida a la entrada, suponiendo que las condiciones iniciales son nulas.

Si las condiciones iniciales son $y(0^+) = 0$ e $\dot{y}(0^+) = 1$, y la entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$, calcule las respuestas natural y forzada:

I) resolviendo la ecuación diferencial en el dominio del tiempo. *(1 punto)*

II) invirtiendo la transformada de Laplace unilateral de la salida. *(1 punto)*

2. Una fuente de continua puede diseñarse mediante un rectificador de onda completa y un circuito RC, tal y como se muestra en la figura.

Si la entrada al rectificador de onda completa es $x(t)$, su salida es $g(t) = |x(t)|$. La respuesta frecuencial del filtro RC es $H(j\Omega) = Y(j\Omega)/G(j\Omega)$.

I) Demostrar, aplicando las leyes de Kirchoff y las propiedades de la transformada de Fourier, que *(0.5 puntos)*

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega RC}$$

II) Si $x(t) = \cos(100\pi t)$, calcular las transformadas de Fourier[1] de $g(t)$ e $y(t)$. *(1 punto)*

III) Calcular el rango de la constante de tiempo $\tau = RC$ de tal forma que la amplitud del primer armónico de $y(t)$ sea menor que el 1 % de su valor de continua. *(1 punto)*

[1] Puede utilizar indistintamente las relaciones $2\cos a \cos b = cos(a-b) + cos(a+b)$ o $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$.

3. Suponga que $x(t)$ es una señal limitada en banda, de tal forma que $|X(j\Omega)| = 0$ si $|\Omega| < 2$ o $|\Omega| > 3$ (todas las frecuencias Ω se suponen en rad/s).

   I) Se muestrea $x(t)$ con un periodo T para obtener la secuencia discreta $x[n] = x(nT)$. En este caso es posible muestrear con un periodo mayor que el indicado por el criterio de Nyquist y aún así recuperar $x(t)$ a partir de $x[n]$ mediante la utilización de un filtro apropiado.

      Determine el mayor intervalo de muestreo posible de tal forma que $x(t)$ pueda recuperarse perfectamente. Esboce un dibujo de $X(e^{j\omega})$ en esta situación límite e indique la forma del filtro de reconstrucción ideal. *(1 punto)*

   II) Suponga que $x(t)$ se obtuvo modulando una señal banda base $b(t)$ mediante un coseno de frecuencia $\Omega = 2{,}5$. En este caso, para recuperar la señal $b(t)$ no es necesario demodular mediante otro coseno: basta con muestrear $x(t)$ con el periodo apropiado y aplicar a continuación un filtro de reconstrucción.

      Esboce el proceso anterior en el dominio de la frecuencia e indique el periodo de muestreo apropiado. *(1 punto)*

4. Considere el sistema discreto de la siguiente figura, en la que los elementos z^{-1} representan un retraso de una unidad.

   I) Considere $q_1[n]$ y $q_2[n]$ como variables de estado y obtenga las ecuaciones matriciales que proporcionan la evolución del estado y la salida. *(1 punto)*

   II) Obtenga una representación directa de tipo II equivalente. *(1 punto)*

5. Imagine que interpreta el fragmento musical indicado en la partitura mediante un instrumento que emite sonidos monocromáticos. Suponga que cada una de las tres primeras notas

   —sol— corresponde a un sonido de frecuencia f_1 y duración T_1; y que la cuarta nota es un mi bemol de frecuencia $f_2 < f_1$ y duración $T_2 = 4T_1$.

   Observe que la producción de una nota durante un cierto tiempo puede modelarse como el producto de una señal sinusoidal por un pulso de anchura igual a la duración de la nota. Entre cada dos notas existe un pequeño silencio, lo que permite distinguir dos notas consecutivas de la misma frecuencia.

   Razone cómo debe ser la transformada de Fourier de la señal musical y esboce su módulo, prestando atención a las amplitudes relativas. *(1.5 puntos)*

Soluciones al examen de Señales y sistemas

4 de febrero de 2002

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

I) Como la ecuación característica $r^2 + 5r + 4 = 0$ tiene las raíces $r = -4$ y $r = -1$, la respuesta natural es $y^n(t) = Ae^{-4t}u(t) + Be^{-t}u(t)$, y su derivada $\dot{y}^n(t) = -4Ae^{-4t}u(t) - Be^{-t}u(t)$. Sustituyendo $t = 0^+$ en ambas ecuaciones e imponiendo las condiciones iniciales se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ -4A - B &= 1; \end{aligned}$$

de donde $A = -1/3$, $B = 1/3$ y la respuesta natural es

$$y^n(t) = \frac{-1}{3}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t).$$

La respuesta forzada es $y^f(t) = (Ae^{-4t} + Be^{-t} + Ce^{-2t})u(t)$, con lo que sus dos primeras derivadas son $\dot{y}^f(t) = (-4Ae^{-4t} - Be^{-t} - 2Ce^{-2t})u(t)$ e $\ddot{y}^f(t) = (16Ae^{-4t} + Be^{-t} + 4Ce^{-2t})u(t)$. Las condiciones iniciales nulas $y^f(0^+) = \dot{y}^f(0^+) = 0$ conducen al sistema

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ -4A - B - 2C &= 0; \end{aligned}$$

mientras que la sustitución de la entrada, la respuesta y sus derivadas en la ecuación diferencial proporciona $C = 1$. Al introducir este valor en el sistema anterior se obtiene $A = -1/3$ y $B = -4/3$; por lo que la respuesta forzada es

$$y^f(t) = \frac{-1}{3}e^{-4t}u(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t).$$

La respuesta total sería

$$y(t) = y^n(t) + y^f(t) = \frac{-2}{3}e^{-4t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t).$$

II) Para resolver el problema mediante la transformada de Laplace unilateral utilizaremos las propiedades

$$\dot{x}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s) - x(0^+), \qquad \ddot{x}(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^2X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0^+);$$

y el par transformado

$$e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}.$$

Por otra parte, como $x(t) = e^{-2t}u(t)$, entonces $X(s) = 1/(s+2)$ y $x(0^+) = 1$.

Transformando la ecuación diferencial al dominio de Laplace, y considerando que $y(0^+) = 0$,

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = sX(s) - x(0^+) + \dot{y}(0^+) = \frac{-2}{s+2} + 1.$$

Observemos que el primer sumando del segundo miembro corresponde a la entrada —el que da lugar a la respuesta forzada— y el segundo sumando corresponde a la condición inicial no nula sobre la salida —el que da lugar a la respuesta natural—.

Despejando $Y(s)$ en la ecuación anterior

$$Y(s) = \frac{-2}{(s+2)(s^2+5s+4)} - \frac{1}{s^2+5s+4} \equiv Y^f(s) + Y^n(s),$$

y expandiendo en fracciones simples cada uno de los dos sumandos se obtiene

$$Y^f(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+1},$$

donde $A = 1$, $B = -1/3$ y $C = -4/3$; e

$$Y^n(s) = \frac{D}{s+4} + \frac{E}{s+1},$$

donde $D = -1/3$ y $E = 1/3$. Invirtiendo ambas transformadas se obtienen inmediatamente las mismas respuestas $y^f(t)$ e $y^n(t)$ que en el apartado anterior.

Ejercicio 2

I) Si denominamos $i(t)$ a la corriente que atraviesa la resistencia, $g(t) - y(t) = Ri(t)$. Como la transformada de Fourier es lineal, en el dominio de la frecuencia $G(j\Omega) - Y(j\Omega) = RI(j\Omega)$. Por otra parte

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau,$$

que según la propiedad de integración de la transformada de Fourier, se transforma en

$$Y(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega C} I(j\Omega).$$

Eliminando $I(j\Omega)$ de las dos ecuaciones frecuenciales,

$$\frac{Y(j\Omega)}{G(j\Omega)} = \frac{1}{1 + j\Omega RC}.$$

II) Si denominamos $\Omega_1 = 100\pi$, la señal de entrada al rectificador de onda completa es $x(t) = \cos(\Omega_1 t)$, y la de salida $g(t) = |\cos(\Omega_1 t)|$. Esta señal tiene un periodo $T = 2\pi/\Omega_0$, donde $\Omega_0 = 2\Omega_1$; es decir, $T = 1/100$ s.

Como $g(t)$ es periódica, su transformada de Fourier puede obtenerse a partir de los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier

$$g[k] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\Omega_1 t) e^{-jk\Omega_0 t}\,dt,$$

que integrando mediante cualquiera de las dos relaciones propuestas en el enunciado, proporciona

$$g[k] = \frac{1}{T}\left(\frac{\operatorname{sen}((\Omega_1 - k\Omega_0)T/2)}{\Omega_1 - k\Omega_0} + \frac{\operatorname{sen}((\Omega_1 + k\Omega_0)T/2)}{\Omega_1 + k\Omega_0}\right) = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{2}{1-k^2}.$$

Por tanto,

$$G(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta(\Omega - k\Omega_0) = 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-k^2}\delta(\Omega - k\Omega_0).$$

Tras atravesar el filtro, la transformada de Fourier de la salida es

$$Y(j\Omega) = H(j\Omega)G(j\Omega) = 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-k^2}\frac{1}{1 + jk\Omega_0 RC}\delta(\Omega - k\Omega_0).$$

III) La salida $Y(j\Omega)$ está compuesta de deltas de Dirac, lo que indica que $y(t)$ es una señal periódica, cuya componente de continua —que denotaremos $y_0(t)$— es debida al término en $k = 0$ y el primer armónico —que denotaremos $y_1(t)$— a los términos $k = \pm 1$.

$$\begin{aligned}
Y(j\Omega) &= Y_0(j\Omega) + Y_1(j\Omega) + \dots \\
&= 4 + \frac{4}{3}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}}{1 + j\Omega_0\tau} + \frac{e^{-j\Omega_0 t}}{1 - j\Omega_0\tau}\right) + \dots \\
&= 4 + \frac{8}{3}\frac{\cos(\Omega_0 t) + \Omega_0\tau\operatorname{sen}(\Omega_0 t)}{1 + \Omega_0^2\tau^2} + \dots
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

1. Al muestrear con un periodo T, se produce la convolución de $X(j\Omega)$ con un tren de deltas de Dirac espaciadas $\Omega_s = 2\pi/T$. Teniendo en cuenta que la mayor frecuencia presente en $X(j\Omega)$ es $\Omega = 4$, muestrearemos en el límite marcado por el criterio de Nyquist si utilizamos $\Omega_s = 6$, con lo que el espectro de la señal muestreada por pulsos, $X_p(j\Omega)$, es

   Si disminuimos la frecuencia de muestreo, tomando por ejemplo $\Omega = 2$, obtendremos

   De las figuras se desprende que podemos disminuir Ω_s hasta el punto en el cual no se solapen las porciones no nulas de $X(j\Omega)$; es decir, hasta $\Omega_s \geq 1$

   El límite superior del periodo de muestreo para poder recuperar $x(t)$ es $T = 2\pi$ s, para la recuperación se utilizaría un filtro paso banda como el de la siguiente figurea.

2. Para demodular, hay que conseguir llevar una réplica de la porción no nula de $X(j\Omega)$ hasta banda base. Para ello, hay que muestrear con $\Omega_s = 2{,}5$; es decir, $T = 4\pi/5$ s.

Ejercicio 4

1. Las ecuaciones que relacionan la salida con la entrada de los elementos de memoria son $q_1[n+1] = b_1 x[n] + \alpha_1 q_1[n]$ y $q_2[n+1] = b_2 x[n] + \alpha_2 q_2[n]$. La salida viene dada por $y[n] = c_1 q_1[n] + c_2 q_2[n]$. Si denominamos al vector columna $\mathbf{q}[n] \equiv [q_1[n] q_2[n]]^T$, estas tres ecuaciones pueden expresarse en forma matricial como

$$\mathbf{q}[n+1] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x[n], \qquad y[n] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n].$$

2. Para calcular la representación de tipo II equivalente vamos a buscar la ecuación en diferencias que establece la relación entrada-salida del sistema. Para resolver este paso hay varias formas.

   Una posibilidad es tomar las tres ecuaciones escalares anteriores y eliminar las variables de estado. Las dos ecuaciones de estado pueden escribirse como $q_1[n+1] - \alpha_1 q_1[n] = b_1 x[n]$, $q_2[n+1] - \alpha_2 q_2[n] = b_2 x[n]$. Desplazando en una unidad la ecuación de salida tenemos $y[n+1] = c_1 q_1[n+1] + c_2 q_2[n+1]$. Eliminamos la primera variable de estado calculando, $y[n+1] - \alpha_1 y[n] = c_1 b_1 x[n] + c_2(1-\alpha_1) q_2[n]$. Si desplazamos esta ecuación en una unidad, eliminamos la segunda variable de estado calculando $y[n+1] - \alpha_1 y[n+1] - \alpha_2(y[n+1] - \alpha_1 y[n]) = c_1 b_1 (x[n+1] - \alpha_2 x[n]) + c_2(1-\alpha_1) b_2 x[n])$. Si reordenamos esta ecuación obtenemos

$$y[n+2] - (\alpha_1 + \alpha_2) y[n+1] + \alpha_1 \alpha_2 y[n] = c_1 b_1 x[n+1] + (c_2 b_2 - c_2 b_2 \alpha_1 - c_1 b_1 \alpha_2) x[n].$$

   Otra posibilidad es calcular la transformada z de la descripción mediante variables de estado

$$z\mathbf{Q}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(z) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} X(z), \qquad Y(z) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}(z),$$

   de donde

$$\begin{aligned} Y(z) &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-\alpha_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{z-\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} X(z) = \left(\frac{c_1 b_1}{z-\alpha_1} + \frac{c_2 b_2}{z-\alpha_2} \right) X(z) \\ &= \frac{(z-\alpha_2) c_1 b_1 + (z-\alpha_1) c_2 b_2}{z^2 - (\alpha_1+\alpha_2) z + \alpha_1 \alpha_2} X(z), \end{aligned}$$

   que proporciona la misma ecuación en diferencias que obtuvimos por el método anterior.

   Por tanto, la implementación directa de tipo II equivalente es

Ejercicio 5 Examinemos primero una única nota. Como se comenta en el enunciado, una nota puede modelarse como el producto de una señal sinusoidal pura por una ventana rectangular de la duración de la nota: $\cos(2\pi f_1 t)w(t, T_1)$, donde $w(t, T_1) = u(t) - u(t - T_1)$. Por lo tanto, la transformada de Fourier de una única nota consiste en un par de deltas de Dirac —debidas al coseno— convolucionadas por la transformada de Fourier de la ventana.

Las distintas notas pueden modelarse de la misma forma, considerando que habrá un desfase en la transformada de Fourier de cada nota debido al desplazamiento temporal —cada una comienza y termina en distintos instantes de tiempo—.

La señal temporal correspondiente a las cuatro notas puede modelarse como

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \cos(2\pi f_1 t)w(t, T_1) \\ & + \cos(2\pi f_1 t)w(t - (T_1 + \tau), T_1) \\ & + \cos(2\pi f_1 t)w(t - 2(T_1 + \tau), T_1) \\ & + \cos(2\pi f_2 t)w(t - 3(T_1 + \tau), T_2), \end{aligned}$$

donde τ es el pequeño silencio entre notas. Debido a la propiedad de linealidad, la transformada de Fourier de $x(t)$ será la suma de las cuatro componentes. Tendrá cuatro componentes, tres de ellas de frecuencia f_1 y amplitud proporcional a T_1 y una de frecuencia f_2 y amplitud proporcional a $T_2 = 4T_1$. Aunque el módulo no será exactamente la suma de los módulos, podemos dibujar el módulo aproximadamente como una componente a f_1 de amplitud relativa $3/4$ y una componente a f_2 de amplitud relativa 1, ambas convolucionadas por la transformada de Fourier de las respectivas ventanas.