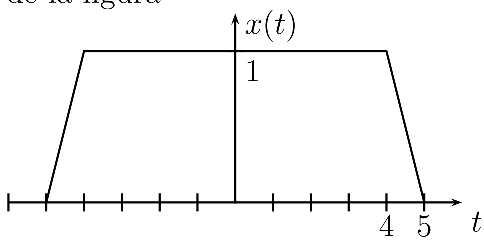
E.T.S.I.I. y de Telecomunicación, UC
Ingeniería de Telecomunicación
Septiembre 2002

Señales y sistemas, 2º Curso (tiempo: 4h)

Apellidos:	P1
Nombre:	P2
DNI:	P3
Firma:	P4
	P5
	T

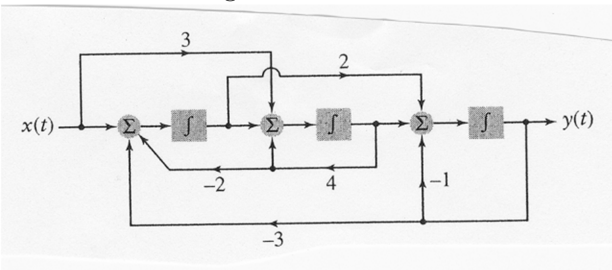
1. Dado el pulso trapezoidal $x(t)$ de la figura



   a) Calcule la energía de $x(t)$ *(0.5 puntos)*

   b) Si se aplica el pulso $x(t)$ a un diferenciador, definido por $y(t) = \dot{x}(t)$, calcule y dibuje la salida y evalúe su energía. *(0.5 puntos)*

2. Dado el sistema continuo de la figura



I) Determine una representación matricial mediante variables de estado. *(1 punto)*

II) Calcule la implementación directa de tipo II equivalente. *(1 punto)*

3. La entrada a un sistema discreto es

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}n\right).$$

Utilice la DTFT para calcular la salida del sistema $y[n]$, si la respuesta al impulso es

I) *(1 punto)*

$$h[n] = \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

II) *(1 punto)*

$$h[n] = (-1)^n \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

4. La operación

$$x[n] = \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau)\, d\tau$$

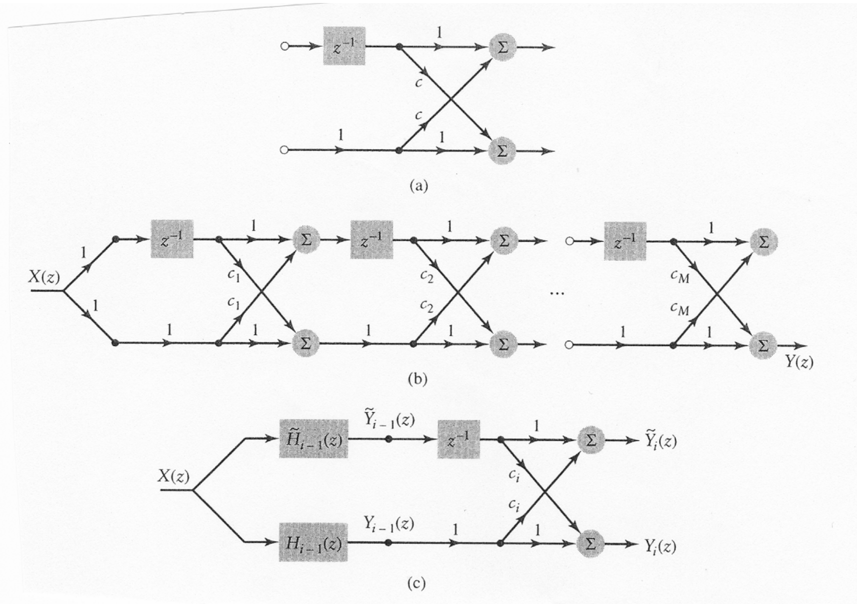
puede considerarse como un muestreo no ideal de periodo T de la señal continua $x(t)$.

I) Demostrar que esta operación puede expresarse como un muestreo ideal de una señal filtrada $y(t) = x(t) * h(t)$ (es decir, $x[n] = y(nT)$) y calcular $h(t)$. *(1 punto)*

II) Expresar $X(e^{j\omega})$ en términos de $X(j\Omega)$, $Y(j\Omega)$ y T. *(0.5 puntos)*

III) Suponga que $x(t)$ está limitada en banda de forma que $|\Omega| < 3\pi/(4T)$. Determine la respuesta frecuencial de un sistema discreto que corrija la distorsión introducida en $x[n]$ como consecuencia del muestreo no ideal. *(1 punto)*

5. La estructura en celosía es una implementación muy útil de sistemas no recursivos. La celosía se construye como una conexión en serie de secciones con dos entradas y dos salidas, tal y como se muestra en la figura (a). Observe que en la primera sección se utiliza tan sólo una entrada y en la última tan sólo una salida. En la figura (b) se muestra una celosía de orden M.



I) Calcular la función de transferencia, $H(z)$, de una celosía de segundo orden ($M = 2$). *(1 punto)*

II) Se pretende examinar el efecto sobre la función de transferencia de añadir una sección a la estructura. Tal y como se muestra en la figura (c), denominamos $H_i(z)$ a la función de transferencia entre la entrada y la salida de la rama inferior de la sección i-ésima, y $\tilde{H}_i(z)$ a la función de transferencia entre la entrada y la salida de la rama superior de la sección i-ésima.

La relación entre las funciones de transferencia de las etapas $i-1$-ésima e i-ésima puede denotarse por

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_i(z) \\ H_i(z) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(z) \begin{bmatrix} \tilde{H}_{i-1}(z) \\ H_{i-1}(z) \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{T}(z)$ es una matriz 2×2. Exprese $\mathbf{T}(z)$ en términos de los coeficientes c_i y de z^{-1}. *(1 punto)*

Soluciones al examen de Señales y sistemas

septiembre de 2002

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

I) La energía la señal $x(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = 2 \int_0^5 x^2(t) \, dt = 2(4 + 0{,}5) = 9.$$

II) Al derivar, se obtiene la señal $y(t) = [-5 < t < -4] - [4 < t < 5]$,

cuya energía es

$$2 \int_4^5 y^2(t) \, dt = 2.$$

Ejercicio 2 En general, la representación matricial mediante variables de estado de un sistema continuo es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= A\mathbf{q}(t) + Bx(t), \\ y(t) &= C\mathbf{q}(t) + Dx(t), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \dots q_N(t)]^T$ es un vector columna con las N variables de estado.

I) Las ecuaciones entre las variables de estado, entrada y salida son

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= x(t) - 2q_2(t) - 3q_3(t), \\ \dot{q}_2(t) &= 3x(t) + q_1(t) + 4q_2(t), \\ \dot{q}_3(t) &= q_2(t) - q_3(t) + 2q_1(t), \\ y(t) &= q_3(t); \end{aligned}$$

que proporcionan las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

II) Para encontrar la representación de tipo II equivalente, calcularemos la ecuación diferencial del sistema eliminando las variables de estado (vamos a mostrar dos métodos).

Una forma de abordar el problema es eliminar las variables de estado en el dominio del tiempo. Para ello, si derivamos la ecuación de salida $\dot{y}(t) = \dot{q}_3(t)$ y sustituimos $\dot{q}_3(t)$ según la tercera ecuación de estado y $q_3(t)$ según la ecuación de salida reducimos el sistema a

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= q_2(t) - y(t) + 2q_1(t),\\ \dot{q}_1(t) &= x(t) - 2q_2(t) - 3y(t),\\ \dot{q}_2(t) &= 3x(t) + q_1(t) + 4q_2(t).\end{aligned}$$

De la primera ecuación podemos despejar $q_2(t) = \dot{y}(t) + y(t) - 2q_1(t)$ y, derivando, $\dot{q}_2(t) = \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2\dot{q}_1(t)$. Sustituyendo estas dos ecuaciones en las dos últimas del sistema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) - 4y(t) &= -7q_1(t) + 2\dot{q}_1(t) + 3x(t),\\ \dot{q}_1(t) &= x(t) + 4q_1(t) - 5y(t) - 2\dot{y}(t).\end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{q}_1(t)$ de la segunda ecuación en la primera, despejamos de la ecuación resultante $q_1(t) = \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 6y(t) - 5x(t)$. Sustituyendo esta ecuación y su derivada en la segunda ecuación del sistema anterior obtenemos por último

$$\dddot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 19y(t) = 5\dot{x}(t) - 19x(t).$$

Otra posibilidad, es calcular la transformada de Laplace de la ecuación matricial de estado

$$\begin{aligned}s\mathbf{Q}(s) &= A\mathbf{Q}(s) + BX(s),\\ Y(s) &= C\mathbf{Q}(s),\end{aligned}$$

y eliminar $\mathbf{Q}(s)$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]X(s) = \frac{5s - 19}{s^3 - 3s^2 + 4s - 19},$$

de donde se obtiene directamente la ecuación en diferencias anterior.

Una vez conocida la ecuación en diferencias, la implementación de tipo II equivalente es

Ejercicio 3 La salida de un sistema discreto con respuesta al impulso (RI) cuando se aplica la entrada $x[n]$ es el producto de sus transformadas de Fourier discretas en el tiempo (DTFT).

La DTFT de la entrada $x[n]$ es una señal periódica de periodo 2π, que en el intervalo fundamental $[-\pi, \pi]$ viene dada por

$$X(e^{j\omega}) = \pi\left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\pi}{j}\left(\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right) - \delta\left(\omega\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

I) La DTFT de la RI es $H(e^{j\omega}) = [|\omega| < \pi/2]$, por tanto

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \pi\left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad \longrightarrow \qquad y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

II) Como

$$h[n] = (-1)^n \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right) = e^{j\pi n}\frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

la DTFT de la RI es $H(e^{j\omega}) = [|\omega - \pi| < \pi/2]$, por tanto

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j}\left(\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right) - \delta\left(\omega\frac{3\pi}{4}\right)\right) \qquad \longrightarrow \qquad y[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}n\right).$$

Ejercicio 4

I) Si $x[n]$ puede considerarse la señal obtenida al muestrear idealmente $y(t)$, tendremos

$$x[n] = y(nT) = y(t)|_{t=nT} = \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau)\, d\tau,$$

por tanto

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Si, por otra parte, nos dicen que $y(t)$ es el producto de convolución de $x(t)$ y $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

comparando (1) y (2) se deduce inmediatamente que

$$h(t-\tau) = [t - T \geq \tau \geq t] \qquad \longrightarrow \qquad h(t) = [0 \geq t \geq T].$$

II) Como la DTFT de la secuencia discreta $y[n]$ son muestras de la TF de $y(t)$, $Y(j\Omega)$,

$$y[n] \stackrel{\mathcal{DTFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(j(\Omega - k2\pi/T)),$$

y, según (2), las TF de las señales continuas verifican $Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$, entonces

$$x[n] \stackrel{\mathcal{DTFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - k2\pi/T))H(j(\Omega - k2\pi/T)).$$

III) Si $x(t)$ está limitada en banda a

$$|\Omega| < \frac{3\pi}{4T} < \frac{2\pi}{T},$$

podemos utilizar como filtro de reconstrucción uno que verifique

$$H_r(j\Omega) = \frac{T}{H(j\Omega)}[|\Omega| < 3\pi/(4T)]. \tag{3}$$

Para calcular $H(j\Omega)$, tenemos en cuenta que $h(t) = [0 \leq t \leq T]$ y que

$$h(t + T/2) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\,\mathrm{sen}(\Omega T/2)}{\Omega},$$

por lo que

$$H(j\Omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\Omega T/2)}{\Omega}\exp(-j\Omega t/2).$$

Sustituyendo en (3) obtenemos como filtro reconstructor

$$H_r(j\Omega) = \frac{\Omega T \exp(j\Omega T/2)}{2\,\mathrm{sen}(\Omega T/2)}\left[|\Omega| \leq \frac{3\pi}{4T}\right].$$

Ejercicio 5

I) Si denominamos $A(z)$ y $B(z)$ a las salidas de los dos sumadores de salida de la primera etapa tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}Y(z) &= -\frac{1}{4}A(z)z^{-1} + B(z),\\ A(z) &= X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}X(z),\\ B(z) &= \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + X(z),\end{aligned}$$

de donde podemos obtener directamente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + \frac{3}{8}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}.$$

II) De la figura (c) del enunciado se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned}\tilde{H}_i(z) &= \tilde{H}_{i-1}(z)z^{-1} + c_i H_{i-1}(z),\\ H_i(z) &= \tilde{H}_{i-1}(z)z^{-1}c_i + H_{i-1}(z);\end{aligned}$$

que pueden expresarse matricialmente como

$$\begin{bmatrix}\tilde{H}_i(z)\\ H_i(z)\end{bmatrix} = \mathbf{T}(z)\begin{bmatrix}\tilde{H}_{i-1}(z)\\ H_{i-1}(z)\end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & c_i\\ z^{-1}c_i & 1\end{bmatrix}.$$