E.T.S.I.I. y de Telecomunicación, UC
Ingeniería de Telecomunicación
29 de enero de 2003

Señales y sistemas, 2º Curso (tiempo: 4h)

Apellidos:	P1
Nombre:	P2
DNI:	P3
Firma:	P4
	P5
	T

Lab.	Compañero
Lab1/1	
Lab1/2	
Lab2/1	
Lab2/2	
Lab3	

1. Al sistema descrito por la ecuación en diferencias

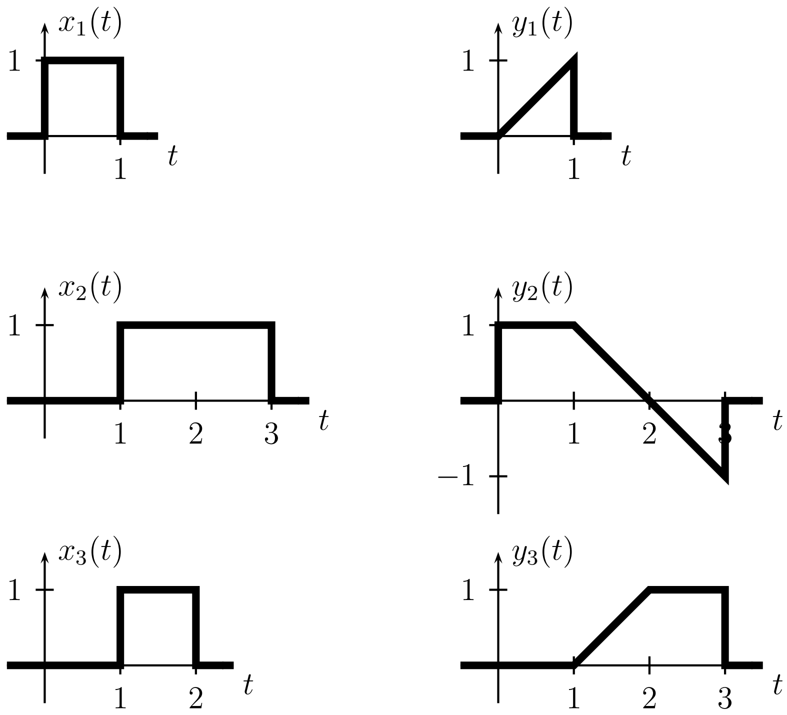
$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1],$$

cuyas condiciones iniciales son $y[-1] = 2$ e $y[-2] = -1$, se le aplica la entrada $x[n] = 2^n u[n]$.

i) Calcular las respuestas natural, forzada y completa resolviendo la ecuación en diferencias en el dominio del tiempo. *(1 punto)*

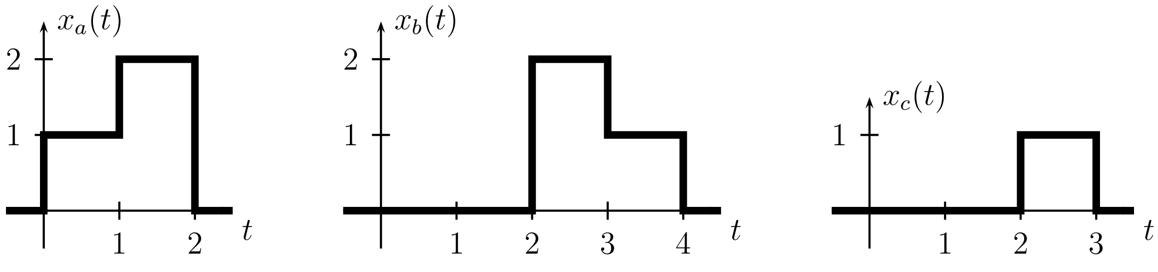
ii) Idem mediante la transformada z unilateral. *(1 punto)*

2. Un sistema lineal tiene las parejas de entradas—salidas ($x_i(t)$—$y_i(t)$, $i = 1, 2, 3$) que se muestran en la figura.

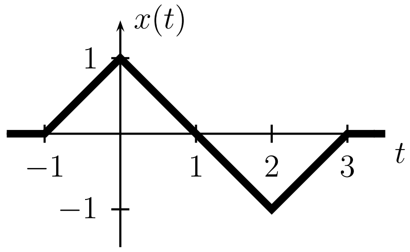


I) Determina si el sistema presenta las siguientes propiedades y justifica tu respuesta: causalidad, invarianza temporal y memoria *(0.75 puntos)*.

II) Si puedes, dibuja las salidas asociadas a las entradas $x_a(t)$, $x_b(t)$ y $x_c(t)$ que se muestran a continuación. Si no puedes, explica el motivo *(0.75 puntos)*.



3. Para la señal $x(t)$ que se muestra en la figura, evalúa las cantidades siguientes sin calcular explícitamente su transformada de Fourier $X(j\Omega)$.



I) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\, d\Omega$ *(0.5 puntos).*

II) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2\, d\Omega$ *(0.5 puntos).*

III) $\arg(X(j\Omega))$, donde $\arg(\cdot)$ indica la fase de un número complejo, *(0.5 puntos).*

IV) $X(0)$ *(0.5 puntos).*

4. Si tomamos muestras de una señal continua $x_0(t)$ cada T segundos, obtenemos la señal discreta $x_0[n] = x_0(nT)$ (T se denomina periodo de muestreo y $\Omega_s = 2\pi/T$ frecuencia angular de muestreo).

   I) Supón que $x_0(t)$ es una exponencial compleja de pulsación Ω_0, $x_0(t) = e^{j\Omega_0 t}$. Calcula la expresión general de Ω para que, si muestreamos la exponencial compleja $x(t) = e^{j\Omega t}$, entonces $x[n] = x_0[n]$. Representa dichas frecuencias sobre la recta real (dibuja el eje Ω y marca sobre éste, mediante puntos, los valores de la expresión general encontrada) *(0.5 puntos)*.

   II) Idem si $x_0(t) = \cos(\Omega_0 t)$ *(0.5 puntos)*.

5. Responde a las siguientes preguntas:

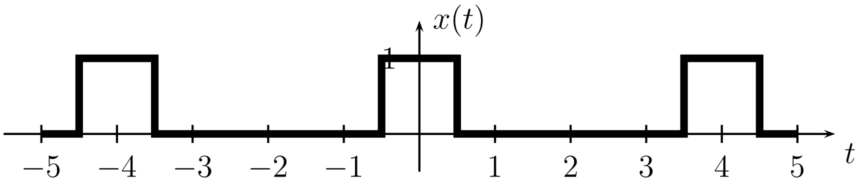
  I) Dada la señal periódica $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, y los coeficientes de su serie de Fourier, $a[k]$, $k = -\infty, \ldots, \infty$, esboza las señales $\hat{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a[k] e^{j\Omega_0 t}$, donde $\Omega_0 = 2\pi/T$ para $N = 1, 10, 100, \infty$. No hagas ningún cálculo analítico y explica tus dibujos *(0.5 puntos)*.

  II) Esboza los espectrogramas de las siguientes composiciones musicales:

    a) Tres notas consecutivas, cada una de ellas de frecuencia el doble y duración la mitad de la anterior, separadas por un silencio de duración igual a la duración de la última nota *(0.25 puntos)*.

    b) Una nota de una cierta frecuencia y duración, una transición lineal continua hasta la frecuencia doble de la anterior que dura el mismo tiempo que la primera nota, una nota con la frecuencia doble de la primera y la misma duración que aquella. Sin silencios entre las notas *(0.25 puntos)*.

  III) Dada la señal $x(t)$ de la figura (no es periódica, sino de extensión finita),



esboza aproximadamente la función $y(t) = x(t) * x(t)$ (sin calcularla analíticamente) *(0.5 puntos)*.

Soluciones al examen de Señales y sistemas

enero de 2003

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

Solución en el dominio del tiempo: la ecuación característica $r^2 - r/4 - 1/8 = 0$ tiene como raíces $1/2$ y $-1/4$. Por lo tanto, la respuesta natural es de la forma

$$y^n[n] = a(1/2)^n + b(-1/4)^n.$$

Imponiendo las condiciones de contorno $y[-1] = 2$ e $y[-2] = -1$ obtenemos $a = 7/12$ y $b = -5/24$.

La respuesta forzada, considerando que la entrada es $x[n] = 2^n u[n]$ será de la forma

$$y^f[n] = (c(1/2)^n + d(-1/4)^n + e2^n)u[n].$$

Para determinar estas tres constantes, necesitamos tres valores de $y^f[n]$. Éstos se obtienen a partir de la ecuación en diferencias tomando como condiciones iniciales nulas $y[-1] = y[-2] = 0$. Es decir, calculamos recurrentemente la salida de

$$y[n] = 1/4y[n-1] + 1/8y[n-2] + x[n] + x[n-1], \qquad y[-1] = y[-2] = 0;$$

obteniendo la siguiente tabla:

n	-2	-1	0	1	2	...
$x[n]$	0	0	1	2	4	...
$y[n]$	0	0	1	13/4	111/16	...

Por tanto, haciendo que $y^f[n]$ verifique los valores de la tabla anterior para $n = 0, 1, 2$, obtenemos $c = -2/3$, $d = -1/9$ y $e = 16/9$.

Solución mediante transformada z: aplicando la transformada z unilateral —que tiene en cuenta las condiciones iniciales no nulas— a la ecuación en diferencias obtenemos

$$Y(z) - \frac{1}{4}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) - \frac{1}{8}(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]) = X(z) + z^{-1}X(z) + x[-1].$$

Ejercicio 2: para saber si el sistema tiene las propiedades enumeradas, nos fijaremos en sus relaciones entrada–salida:

- El sistema no es causal, ya que $y_2(t)$ es no nula antes de que la entrada $x_2(t)$ lo sea.
- El sistema no es invariante en el tiempo, ya que $x_3(t) = x_1(t-1)$ pero $y_3(t) \neq y_1(t-1)$.
- Un sistema continuo sin memoria debe tener una respuesta al impulso de la forma $h(t) = a\delta(t)$, por lo que debería verificarse $y_1(t) = ax_1(t)$. Como no es cierto, el sistema tiene memoria.

Como el sistema es lineal, la salida asociada a una combinación lineal de entradas es la combinación lineal de salidas correspondientes:

- Como $x_a(t) = x_1(t) + 2x_3(t)$, entonces $y_a(t) = y_1(t) + 2y_3(t)$.
- Como no es posible poner $x_b(t)$ como una combinación lineal de entradas conocidas, no puedo calcular $y_b(t)$ (si bien es cierto que $x_b(t) = x_2(t-1) + x_3(t-1)$, como el sistema no es invariante en el tiempo, no puedo calcular $y_b(t)$ por este camino).
- Como $x_c(t) = x_2(t) - x_3(t)$, entonces $y_c(t) = y_2(t) - y_3(t)$.

Ejercicio 3: se trata de evaluar las expresiones pedidas sin calcular explícitamente la transformada de Fourier. Las ecuaciones de análisis y síntesis de la transformada de Fourier son:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\,dt, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega.$$

i) De la ecuación de síntesis, $2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\,d\Omega = 2\pi$.

ii) Según la relación de Parseval, $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2\,d\Omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = 8\pi/3$.

iii) $x(t)$ es una señal real e impar retrasada una unidad: $x(t) = x_0(t-1)$. Por lo tanto, $X(j\Omega) = X_0(j\Omega)e^{-j\Omega}$. Como $x_0(t)$ es real e impar, su transformada de Fourier es imaginaria; es decir, $\arg(X(j\Omega)) = \pi/2 - \Omega$.

iv) Según la ecuación de síntesis, $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$.