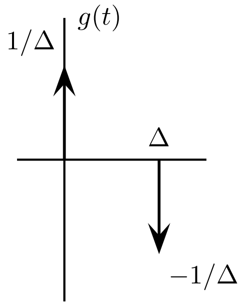
Señales y sistemas.

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria

19 de septiembre de 2000

1. *(2.5 puntos)* Un sistema LTI tiene la respuesta impulsiva $g(t)$ de la figura



   i) Exprese $y(t)$, la salida del sistema $g(t)$, en función de la entrada $x(t)$. Identifique la operación que lleva a cabo el sistema en el límite cuando $\Delta \to 0$. *(0.5 puntos)*

   ii) Calcule $G(j\omega)$ y deduzca $G_0(j\omega) = \lim_{\Delta \to 0} G(j\omega)$. *(0.5 puntos)*

   iii) Según la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier, una señal $x(t)$ puede interpretarse como una combinación lineal de componentes frecuenciales. Comente el efecto de hacer pasar una señal $x(t)$ a través del sistema $G_0(j\omega)$ desde el punto de vista de la frecuencia. ¿Cómo afecta a las frecuencias altas y bajas? ¿Cómo se traduce esto en la salida en el dominio del tiempo? *(0.5 puntos)*

   iv) Se construye un nuevo sistema $h(t)$ colocando en serie dos sistemas $g(t)$ idénticos. Dibuje la respuesta impulsiva del nuevo sistema. *(0.5 puntos)*

   v) Exprese $z(t)$, la salida del sistema $h(t)$, en función de la entrada $x(t)$. Identifique la operación que lleva a cabo el sistema en el límite cuando $\Delta \to 0$. *(0.5 puntos)*

2. *(3 puntos)* La vibración de una cuerda tensa ideal emite un sonido que puede considerarse sinusoidal puro —de una única frecuencia y que no sufre amortiguamiento a lo largo del tiempo—. La frecuencia de vibración es proporcional al inverso de su longitud, $f = c/l$. Como la constante de proporcionalidad depende de las características de la cuerda (grosor, rigidez, tensión a la que se encuentra sometida, …), suponga $c = 1$ m/s.

   Suponga que es usted capaz de construir un dispositivo constituido por un conjunto de N cuerdas ideales con las longitudes que necesite y de dotarlo de un sistema de control que permita poner a vibrar cada una de las cuerdas con la amplitud y en el instante requeridos.

   En base a este dispositivo, usted pretende lanzar al mercado un producto que constituya una alternativa a los sistemas actuales de reproducción de alta fidelidad. Sabiendo que los discos compactos (CD) contienen 44100 muestras por segundo de la señal de audio:

   i) ¿Cuántas cuerdas debería tener su dispositivo para ser capaz de reproducir un segundo de música almacenada en un CD? *(0.75 puntos)*

ii) ¿Cuánto valen las longitudes y las frecuencias de vibración de la cuerda más corta y de la más larga? *(0.5 puntos)*

iii) Responda a las dos preguntas anteriores para el caso de que su dispositivo deba ser capaz de reproducir diez segundos. *(0.25 puntos)*

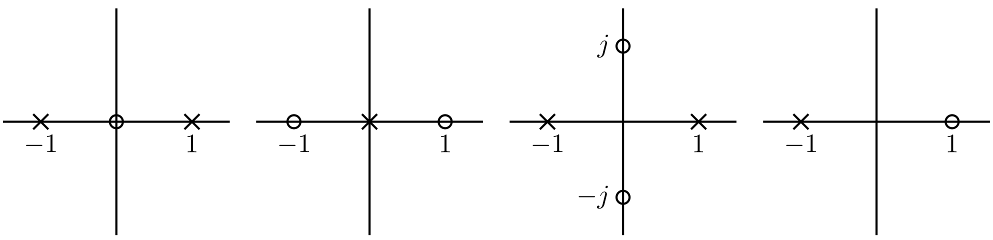
iv) Indique por qué es necesario poder controlar tanto la amplitud de la vibración de las cuerdas como el instante de comienzo. *(0.5 puntos)*

v) Si su dispositivo es capaz de reproducir la música de un CD durante diez segundos y el dispositivo permanece encendido durante un minuto, ¿qué se escucharía durante los cincuenta segundos restantes? *(1 punto)*

3. *(2.5 puntos)* Resuelva los siguientes apartados:

i) Demuestre que si $x(t)$ es par, entonces su transformada de Laplace bilateral verifica $X(s) = X(-s)$; y que si $x(t)$ es impar, entonces $X(s) = -X(-s)$. *(0.5 puntos)*

ii) Determine si alguno de los patrones de polos y ceros de $X(s)$ de la figura podría corresponder a una función temporal par. Indique en su caso la región de convergencia requerida. *(2 puntos)*



4. *(1 punto)* Calcule[1] la transformada z de la secuencia causal definida mediante la relación de recurrencia

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ x[n-1] + 2x[n-2] + \cdots + nx[0], & n > 0. \end{cases}$$

5. *(1 punto)* Obtenga[2] una expresión explícita para el término general de la secuencia $x[n]$ cuya función generatriz es

$$X(z) = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}.$$

[1] Sugerencia: $z^{-n} = z^{-n+k}z^{-k}, \qquad \sum_k kz^k = \frac{z}{1-z^2}.$

[2] Sugerencia: $X(z) = X(0) + zX'(0) + \frac{z^2}{2!}X''(0) + \cdots, \qquad \binom{p}{q} = \frac{p!}{(p-q)!q!}.$

Soluciones al examen de Señales y sistemas

7 de septiembre de 2000

Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación
Universidad de Cantabria
Luis Vielva

Ejercicio 1

I) A partir de la figura, $g(t) = (\delta(t) - \delta(t - \Delta))/\Delta$. La salida del sistema es $y(t) = x(t) * g(t) = (x(t) - x(t - \Delta))/\Delta$. Cuando $\Delta \to 0$,

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta)}{\Delta} = \frac{dx(t)}{dt};$$

es decir, en el límite el sistema se comporta como el operador derivada.

II) Utilizando la propiedad de desplazamiento frecuencial de la transformada de Fourier, la respuesta frecuencial del sistema es

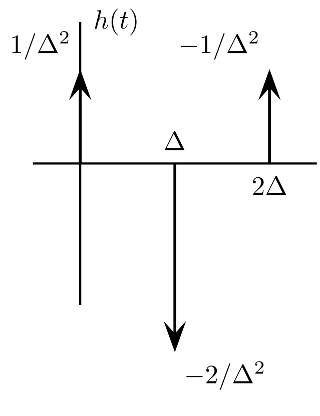
$$G(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\Delta}}{\Delta} = \frac{1 - \cos(\omega\Delta)}{\Delta} + j\frac{\operatorname{sen}(\omega\Delta)}{\Delta}. \quad (1)$$

Para calcular $G_0(j\omega)$, o bien puede aplicarse trivialmente la propiedad de derivada temporal de la transformada de Fourier o bien calcular explícitamente el límite de (1)

$$G_0(j\omega) = \lim_{\Delta \to 0} G(j\omega) = 0 + j\omega = \omega e^{j\pi/2}.$$

III) El sistema $G_0(j\omega)$ introduce un desfase de noventa grados y una ganancia que varía linealmente con la frecuencia. Por tanto, las componentes de baja frecuencia se ven atenuadas —en particular elimina la componente de continua— y las de alta frecuencia reforzadas. En el dominio del tiempo se traduce en un incremento del rizado de la señal.

IV) La respuesta impulsiva del sistema compuesto puede obtenerse gráficamente sumando dos copias —una desplazada y ambas escaladas— de $g(t)$



V) Como $h(t) = g(t) * g(t) = (\delta(t) - 2\delta(t - \Delta) + \delta(t - 2\Delta))/\Delta^2$, la salida del sistema compuesto es

$$z(t) = x(t) * h(t) = \frac{x(t) - 2x(t - \Delta) + x(t - 2\Delta)}{\Delta^2}.$$

VI) En el límite $\Delta \to 0$,

$$z(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t) - 2x(t - \Delta) + x(t - 2\Delta)}{\Delta^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Ejercicio 2 Tenemos una secuencia discreta en el dominio del tiempo que queremos representar por un conjunto discreto de señales sinusoidales en el dominio de la frecuencia. Como ambas señales son discretas, la herramienta apropiada para la transformación es la *serie de Fourier discreta en el tiempo (DTFS)*, también conocida como *transformada discreta de Fourier (DFT)*.

Una secuencia $x[n]$ de N muestras puede representarse como

$$x[n] = \sum_{k=<N>} X[k]e^{jk\Omega_0 n},$$

donde $\Omega_0 = 2\pi/N$, y la sintáxis $n =< N >$ indica que n recorre un conjunto de N enteros consecutivos. Los coeficientes $X[k]$ vienen dados por

$$NX[k] = \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}.$$

Las dos secuencias constituyen un par transformado y ambas son periódicas de periodo N. Es decir, N muestras cualesquiera en el tiempo pueden representarse como una combinación de N exponenciales complejas. Sin embargo, en el problema no disponemos de exponenciales complejas para realizar la síntesis, sino de sinusoidales puras (los sonidos emitidos por las cuerdas vibrantes).

Para soslayar esta dificultad, basta con que observemos que $x[n]$ es una secuencia real —las muestras almacenadas en el CD— y por lo tanto se verifica $X[k] = X^*[-k]$. Si separamos el sumatorio de la ecuación de síntesis en términos positivos y negativos y aplicamos que $x[n]$ es real,

$$x[n] = \sum_{k=<N^+/2>} X[k]e^{jk\Omega_0 n} + \sum_{k=<N^-/2>} X[k]e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=<N^+/2>}^{X} [k]e^{jk\Omega_0 n} + X^*[k]e^{-jk\Omega_0 n}.$$

Expresando el coeficiente complejo como módulo y fase, $X[k] = |X[k]|e^{j\phi[k]}$,

$$x[n] = 2 \sum_{k=<N^+/2>} \mathtt{Re}\{X[k]e^{jk\Omega_0 n}\} = 2 \sum_{k=<N^+/2>} |X[k]| \cos(k\Omega_0 n + \phi[k]).$$

Como vemos, la secuencia temporal real de N muestras puede representarse por $N/2$ señales sinusoidales puras en las que hay que controlar la amplitud $|X[k]|$ y la fase $\phi[k]$ de cada una.

Por tanto, las respuestas al problema son:

I) En un segundo hay $N = 44100$ muestras, por lo que son necesarias $N/2 = 22050$ cuerdas.

II) La frecuencia de la más corta es 22050 Hercios y la de la más larga de 1 Hercio.

III) En diez segundos hay $N = 441000$ muestras, por lo que se necesitan $N/2 = 220500$ cuerdas. La frecuencia de la más corta es de 22050 Hercios y la de la más larga 0,1 Hercios.

IV) Para poder controlar la amplitud y la fase de cada armónico.

V) Se repetirían periódicamente los diez primeros segundos.

Ejercicio 3

I) Según la definición de transformada de Laplace,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt, \quad X(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{st}\,dt.$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = -t$ en la definición de $X(s)$,

$$X(s) = -\int_{\infty}^{-\infty} x(-\tau)e^{s\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{st}\,dt.$$

Comparando la última expresión con $X(-s)$ se deducen inmediatamente los resultados buscados para los casos $x(t) = x(-t)$ y $x(t) = -x(-t)$.

II) Para que una señal $x(t)$ sea par debe verificarse que o bien es bilateral, o bien es de duración finita. Por tanto, si $X(s)$ tiene polos, la región de convergencia debe ser una banda en el plano s.

a) Del patrón de polos y ceros, se deduce que

$$X(s) = \frac{As}{(s+1)(s-1)};$$

por tanto, $X(-s) = -X(s)$ y $x(t)$ debe ser impar.

b) No puede escogerse ninguna región de convergencia que sea una banda, por lo que $x(t)$ no puede ser par.

c) A partir del dibujo,

$$X(s) = \frac{A(s-j)(s+j)}{(s+1)(s-1)} = \frac{A(s^2+1)}{s^2-1};$$

por tanto, $X(-s) = X(s)$ y $x(t)$ puede ser par si se escoge como región de convergencia la banda $|\mathrm{Re}(s)| < 1$.

d) El patrón de polos y ceros no es compatible con una función par.

Ejercicio 4 Teniendo en cuenta el caso especial $n = 0$, la secuencia obedece a la siguiente recurrencia infinita

$$x[n] = x[n-1] + 2x[n-2] + 3x[n-3] + \cdots + nx[0] + \delta[n]. \tag{2}$$

El problema puede resolverse de diversas maneras. Vamos a mostrar dos de ellas:

1. Podemos tratar eliminar la recurrencia infinita de modo análogo al utilizado en clase para deducir la fórmula cerrada de $\sum n\alpha^n$. Desplazando la recurrencia en una unidad

$$x[n-1] = x[n-2] + 2x[n-3] + 3x[n-4] + \cdots + (n-1)x[0] + \delta[n-1],$$

y restando ambas expresiones, se obtiene

$$x[n] - x[n-1] = x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + \cdots + x[0] + \delta[n] - \delta[n-1]. \tag{3}$$

Análogamente, desplazando (2) en dos unidades y restando se obtiene

$$x[n] - x[n-2] = x[n-1] + 2x[n-2] + 2x[n-3] + \cdots + 2x[0] + \delta[n] - \delta[n-2]. \tag{4}$$

Multiplicando por dos la ecuación (3) y restando (4) se obtiene

$$x[n] = 3x[n-1] - x[n-2] + \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2],$$

que en el dominio transformado es

$$X(z) = 3z^{-1}X(z) - z^{-2}X(z) + 1 - 2z^{-1} + z^{-2},$$

con lo que

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + z^{-2}}.$$

2. Si condensamos la suma de la ecuación (2) —incluyendo, por comodidad, el término en $k = 0$ que es nulo—

$$x[n] = \sum_{k=0}^{n} kx[n-k] + \delta[n]$$

y pasamos al dominio transformado

$$X(z) \equiv \sum_n x[n]z^{-n} = \sum_n \sum_{k=0}^{n} kx[n-k]z^{-n} + 1.$$

Haciendo el cambio que se sugería en el enunciado ($z^{-n} = z^{-n+k}z^{-k}$)

$$X(z) = \sum_n \sum_k [k \leq n]x[n-k]z^{-(n-k)}kz^{-k} + 1,$$

donde $[a]$ vale 1 si la expresión a es cierta y 0 en caso contrario. Agrupando los términos puede ponerse

$$X(z) = \sum_{n=k}^{\infty} x[n-k]z^{-(n-k)} \sum_k kz^{-k} + 1 = \sum_m x[m]z^{-m} \sum_k kz^{-k} + 1.$$

Utilizando la expresión de la suma infinita sugerida en el enunciado se obtiene

$$X(z) = X(z)\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + 1,$$

de donde puede despejarse $X(z)$ como

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-3z^{-1}+z^{-2}}.$$

Ejercicio 5 Tal y como se sugiere en el enunciado, desarrollaremos $X(z)$ en serie de potencias de z, para lo que calculamos las derivadas sucesivas y las evaluamos en el origen

$$\begin{aligned}
X(z) &= (1-z)^{-m-1}, & X(0) &= 1,\\
X'(z) &= (m+1)(1-z)^{-m-2}, & X'(0) &= m+1,\\
X''(z) &= (m+2)(m+1)(1-z)^{-m-3}, & X''(0) &= (m+2)(m+1),\\
&\vdots & &\vdots\\
X^{n)}(z) &= (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)(1-z)^{-m-n-1}, & X^{n)}(0) &= \frac{(m+n)!}{m!}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el desarrollo de Taylor

$$X(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(m+n)!}{m!\,n!} z^n$$

y utilizando la expresión sugerida para los coeficientes binomiales,

$$x[n] = \binom{m+n}{m}.$$