Bloque II. Crecimiento económico: el modelo de Ramsey

Virginia Sánchez Marcos
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria

Notas clase Macroeconomía III, LE

1 Introducción

2 El modelo

3 El modelo

4 Caracterización de Asignaciones

5 Primer Teorema Economía Bienestar

6 Referencias

- el modelo de Solow-Swan está sujeto a la crítica de Lucas
- decisión intertemporal microfundamentada: tasa de ahorro endógena
- modelo de Ramsey (1927) y Cass y Koopmans (1965)
- ¿cambian las conclusiones de Solow respecto al crecimiento?
- análisis de bienestar
- extensión del modelo de Diamond con J=2: individuos altruistas hacia sus descendientes (altruismo intergeneracional).

Problema de los hogares

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0,\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$c_t + a_{t+1} \leq w_t + a_t(1 + r_t), \quad t = 0, 1, 2...$$

$$a_t \geq -B$$

$$a_o \text{ dado}$$

- B es suficientemente grande para que la restricción no se satisfaga con igualdad. Evita juegos de Ponzi.

Las condiciones de primer orden (soluciones interiores)

$$c_t : \beta u'(c_t) - \lambda_t = 0$$

$$a_{t+1} : -\lambda_t + (1 + r_{t+1})\lambda_{t+1} = 0$$

$$\lambda_t : -c_t - a_{t+1} + w_t + a_t(1 + r_t) = 0$$

de donde

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1})\beta u'(c_{t+1})$$

La condición de transversalidad es la que garantiza la existencia de un óptimo

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t a_{t+1} = 0$$

Problema de las empresas

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, L_t) - (r_t + \delta)K_t - w_t L_t$$

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = F(\frac{K_t}{L_t}, 1) = f(k_t)$$

$$\max f(k_t) - (r_t + \delta)k_t - w_t$$

Por tanto, en el equilibrio (beneficios son cero)

$$r_t + \delta = f'(k_t)$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Equilibrio General Competitivo

Un equilibrio competitivo para esta economía es una secuencia de de asignaciones de consumo y ahorro para el individuo representativo $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0,\infty}$, una secuencia de asignaciones de factores para la empresa$\{k_t\}_{t=0,\infty}$y precios $\{r_t, w_t\}_{t=1,\infty}$ tales que dado k_0:

1. dados $\{r_t, w_t\}_{t=1,\infty}$ la decisión óptima de los hogares es $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0,\infty}$
2. dados $\{r_t, w_t\}_{t=1,\infty}$ la decisión óptima de las empresas es $\{k_t\}_{t=0,\infty}$
3. se vacían los mercados

$$\text{Capitales: } a_{t+1}N_t = K_{t+1}$$

$$\text{Trabajo: } L_t = N_t$$

$$\text{Bienes: } C_t + K_{t+1} - K_t(1-\delta) = F(K_t, L_t)$$

Equilibrio General Competitivo

De donde

$$C_t + K_{t+1} = K_t(1-\delta) + F(K_t, L_t)$$

$$S_t = a_{t+1}N_t = K_{t+1}$$

$$C_t + a_{t+1}N_t = K_t(1-\delta) + F(K_t, L_t)$$

$$C_t + a_{t+1}N_t - K_t(1-\delta) = F(K_t, L_t)$$

$$C_t + I_t = F(K_t, L_t)$$

Dinámica en la economía

- Entonces, la ecuación que describe la dinámica de esta economía viene dada por

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{(1+r_{t+1})}{(1+n)}$$

$$r_{t+1} + \delta = f'(k_{t+1})$$

$$w_t = f(k_t) - (r_t + \delta)k_t$$

$$c_t + k_{t+1}(1+n) - k_t(1-\delta) = f(k_t)$$

sustituyendo la condición de viabilidad en la Ecuación de Euler

$$\frac{u'(f(k_t) - k_{t+1}(1+n) + k_t(1-\delta))}{\beta u'(f(k_{t+1}) - k_{t+2}(1+n) + k_{t+1}(1-\delta))} = \frac{1 + f'(k_{t+1}) - \delta}{(1+n)}, \quad t = 0, 1, 2...$$

que es una secuencia de ecuaciones en diferencias de segundo orden, $\varphi(k_t, k_{t+1}, k_{t+2}) = 0, \quad t = 0, 1, 2...$

- ASIGNACIÓN FACTIBLE. Dado un capital inicial k_0 una asignación $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0,\infty}$ es factible si cumple la condición de factibilidad en cada momento del tiempo

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) \leq f(k_t) \forall t$$

- ASIGNACIÓN EFICIENTE. Una asignación $\left\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1}\right\}_{t=0,\infty}$ es eficiente en el sentido de Pareto si:
  - $\left\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1}\right\}_{t=0,\infty}$ es factible
  - si no existe una asignación $\{c'_t, k'_{t+1}\}_{t=0,\infty}$ que es factible y además:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c'_t) > \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\tilde{c}_t)$$

Teorema: En la economía anteriormente descrita podemos demostrar que el equilibrio competitivo es eficiente en el sentido de Pareto.

- Solucionamos el problema del Planificador Social, dado k_0

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0,\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta) \leq f(k_t) \text{ , } t = 0, 1, 2...$$

- Las condiciones de primer orden son

$$u'(c_t) = (1 + f'(k_t) - \delta)\beta u'(c_{t+1})$$

que junto con la condición de transversalidad $\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_{t+1} = 0$ son condiciones suficientes. De donde

$$\frac{u'(f(k_t) - k_{t+1} + k_t(1-\delta))}{\beta u'(f(k_{t+1}) - k_{t+2} + k_{t+1}(1-\delta))} = 1 + f'(k_{t+1}) - \delta, \quad t = 0, 1, 2...$$

Novales y Sebastián (2001), Capítulo 8.
Romer (2005), Capítulo 2.
Sala-i-Martín (1999), Capítulo 3.
Wickens, M. (2008), Capítulo 4.