

MATEMÁTICAS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Capitalización/Descuento. Simple/Compuesto

Tema 1.3.: Capitalización Compuesta

**Operación Financiera
de Capitalización**

Ley Financiera Simple

Ley Financiera Compuesta

**Operación Financiera
de Descuento**

Ley Financiera Simple

Ley Financiera Compuesta

Tema 1.3.- CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

- Interés compuesto. Fórmula General. Cálculo del Montante. Representación Gráfica.
- Cálculo del interés. Cálculo del tiempo.
Cálculo del tanto de interés.
- Comparación entre interés simple y compuesto.
- Tanto Medio de capitalización compuesta.
- Fraccionamiento del tanto. Tantos equivalentes.
- Convenio lineal y convenio exponencial.

Capitalización Compuesta

Capitalización Compuesta: Los intereses sí son productivos, es decir, los intereses de cada periodo se acumulan al capital principal produciendo nuevos intereses.

Capitalización Compuesta

- Prestamos un capital C_0 por n años al tipo de interés i anual.



Capitalización Compuesta

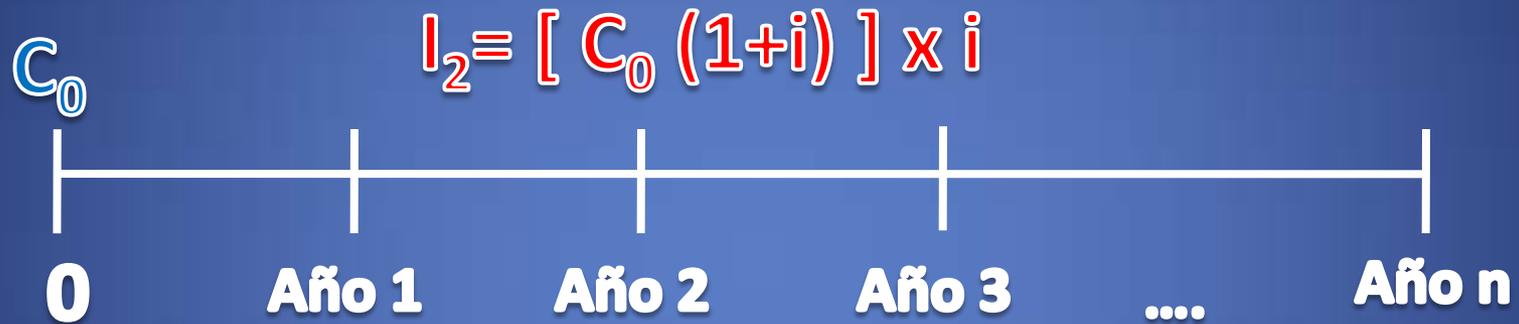
- Tras el primer año, recibimos el primer Interés I_1



Capital acumulado =

Capitalización Compuesta

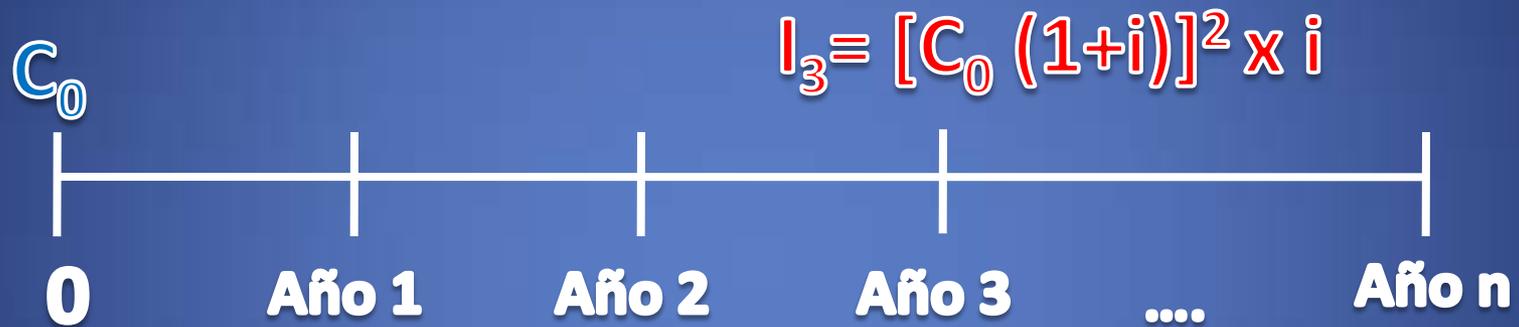
- Tras el segundo año, recibimos el segundo Interés I_2



Capital acumulado =

Capitalización Compuesta

- Tras el tercer año, recibimos el tercer Interés I_3



Capital acumulado =

Capitalización Compuesta

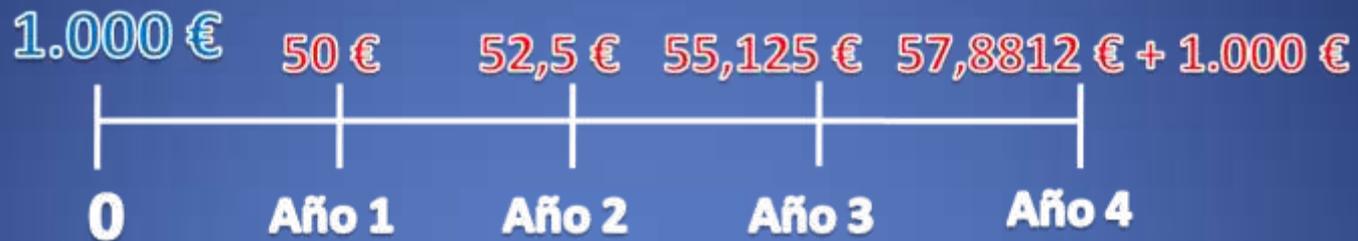
Montante: $C_n = C_0(1 + i)^n$

$$I = C_n - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

Los intereses sí son productivos, es decir, los intereses de cada periodo se acumulan al capital principal produciendo nuevos intereses.



Capitalización Compuesta



Capitalización Compuesta



En Resumen

Capitalización simple: los intereses no son productivos

$$C_n = C_0(1 + i \times n)$$

$$I = C_0 \times i \times n$$

Capitalización compuesta: los intereses son productivos

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$I = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

Ejercicio

Determinar el montante producido por un capital inicial de 1.200 € al 8% anual durante 3 años. (Calcularlo a interés compuesto).



Ejercicio

Hallar el capital que se presto al 9% anual compuesto durante 5 años si alcanzó un montante de 3.606 €.



Tema 1.3.- CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

- Interés compuesto. Fórmula General. Cálculo del Montante. Representación Gráfica.
- Cálculo del interés. Cálculo del tiempo.
Cálculo del tanto de interés.
- Comparación entre interés simple y compuesto.
- Tanto Medio de capitalización compuesta.
- Fraccionamiento del tanto. Tantos equivalentes.
- Convenio lineal y convenio exponencial.

Ejercicio

Calcular el tanto de interés anual al que se prestó un capital de 240 euros durante 6 años si se obtuvo de interés 30 euros. (Realizarlo a interés compuesto).

Ejercicio

Calcular el tanto de interés anual al que se prestó un capital de 240 euros durante 6 años si se obtuvo de interés 30 euros. (Realizarlo a interés compuesto).

$$C_0 = 240 \text{ €}$$

$$I = 30 \text{ €}$$



¿ i % anual? Ley financiera compuesta.

Ejercicio

Calcular el tanto de interés anual al que se prestó un capital de 240 euros durante 6 años si se obtuvo de interés 30 euros. (Realizarlo a interés compuesto).

Ejercicio

Determinar el tiempo que hemos prestado 2.000\$ a un tipo de interés anual del 10% si el montante final ha sido de 2.928\$. Calcular también el interés recibido. (Realizarlo con ley financiera compuesta)

Ejercicio

Determinar el tiempo que hemos prestado 2.000\$ a un tipo de interés anual del 10% si el montante final ha sido de 2.928\$. Calcular también el interés recibido. (Realizarlo con ley financiera compuesta)



$i = 10 \%$ anual

Ley financiera compuesta

Ejercicio

Determinar el tiempo que hemos prestado 2.000\$ a un tipo de interés anual del 10% si el montante final ha sido de 2.928\$. Calcular también el interés recibido. (Realizarlo con ley financiera compuesta)

Tema 1.3.- CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

- Interés compuesto. Fórmula General. Cálculo del Montante. Representación Gráfica.
- Cálculo del interés. Cálculo del tiempo. Cálculo del tanto de interés.
- Comparación entre interés simple y compuesto.
- Tanto Medio de capitalización compuesta.
- Fraccionamiento del tanto. Tantos equivalentes.
- Convenio lineal y convenio exponencial.

Comparativa Capitalización Simple y Compuesta

Capitalización simple: los intereses no son productivos

Capitalización compuesta: los intereses son productivos

$$C_n = C_0(1 + i \times n)$$

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

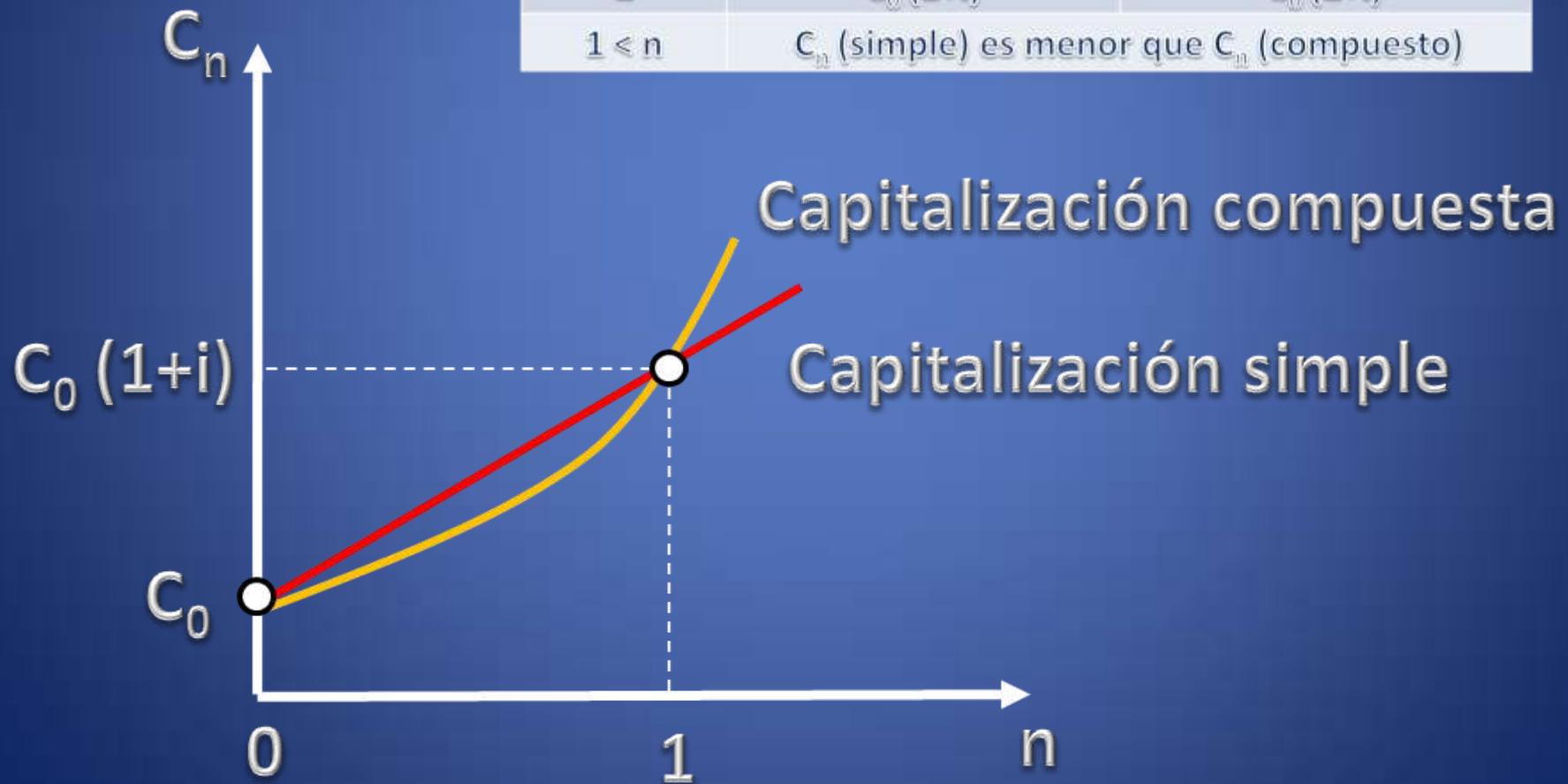
Representamos gráficamente ambas leyes financieras:

n	C_n (Capitalización Simple)	C_n (Capitalización Compuesta)
0	C_0	C_0
$0 < n < 1$	C_n (simple) es mayor que C_n (compuesto)	
1	$C_0(1+i)$	$C_0(1+i)$
$1 < n$	C_n (simple) es menor que C_n (compuesto)	

Comparativa Capitalización Simple y Compuesta

Gráficamente,

n	C_n (Capitalización Simple)	C_n (Capitalización Compuesta)
0	C_0	C_0
$0 < n < 1$	C_n (simple) es mayor que C_n (compuesto)	
1	$C_0 (1+i)$	$C_0 (1+i)$
$1 < n$	C_n (simple) es menor que C_n (compuesto)	



Comparativa Capitalización Simple y Compuesta

- En el momento inicial $n=0$ y en el momento $n=1$, C_n tiene el mismo valor tanto en capitalización simple como compuesta.
- Para valores de “ n ” inferiores a la unidad, C_n es mayor en capitalización simple que en capitalización compuesta.
- Para valores de “ n ” superiores a la unidad, C_n es menor en capitalización simple que en capitalización compuesta.

Inciso:

- Si el tipo de interés es i % anual o i anual, 1 es 1 año.
- Si el tipo de interés es i % diario o i diario, 1 es 1 día.

Comparativa Capitalización Simple y Compuesta

Ejercicio

Si vas a realizar como prestamista una operación financiera referenciada a un tipo de interés anual, y la duración de dicha operación financiera es de 5 meses, ¿qué intentarás conseguir en la negociación, capitalización simple o compuesta?

Comparativa Capitalización Simple y Compuesta

Ejercicio

Si vas a realizar como prestatario una operación financiera referenciada a un tipo de interés mensual, y la duración de dicha operación financiera es de 5 meses, ¿qué intentarás conseguir en la negociación, capitalización simple o compuesta?

Comparativa Capitalización Simple y Compuesta

Ejercicio

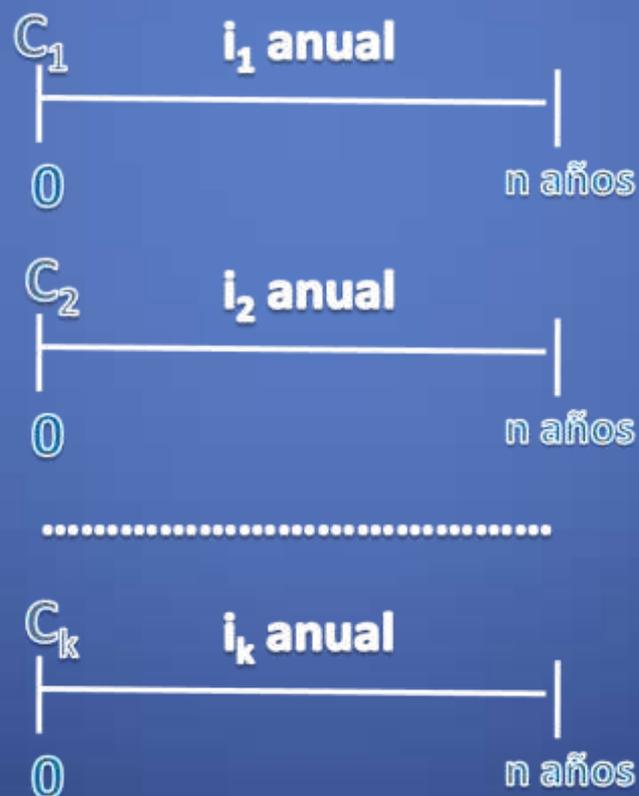
Si vas a conceder una hipoteca para una vivienda, de duración 30 años, la cual va a estar referenciada a un tipo de interés anual. ¿Qué tipo de capitalización piensas te será más beneficiosa?

Tema 1.3.- CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

- Interés compuesto. Fórmula General. Cálculo del Montante. Representación Gráfica.
- Cálculo del interés. Cálculo del tiempo. Cálculo del tanto de interés.
- Comparación entre interés simple y compuesto.
- Tanto Medio de capitalización compuesta.
- Fraccionamiento del tanto. Tantos equivalentes.
- Convenio lineal y convenio exponencial.

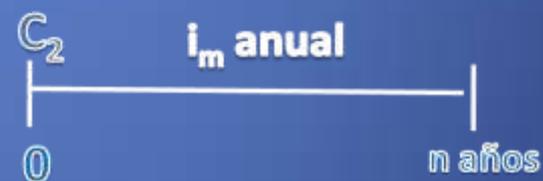
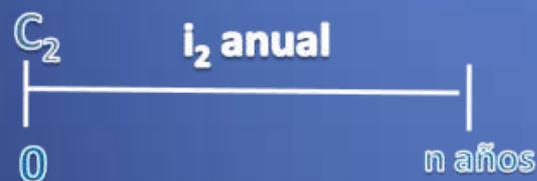
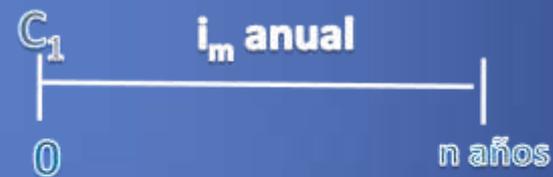
Tanto Medio de Capitalización Compuesto

Si tenemos invertidos k capitales (C_1, C_2, \dots, C_k) a los tantos de interés compuesto anuales (i_1, i_2, \dots, i_k) respectivamente, durante un tiempo de n años.



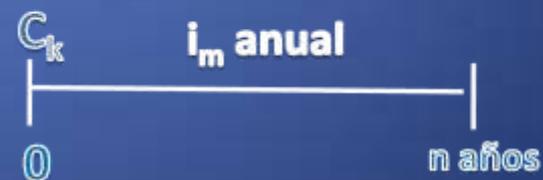
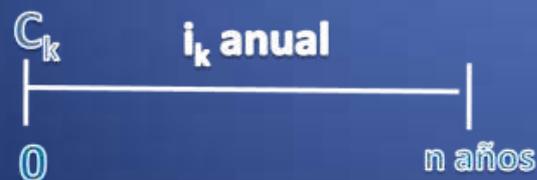
Tanto Medio de Capitalización Compuesta

El tanto medio de capitalización compuesta es aquel tipo de interés que aplicado a los capitales (C_1, C_2, \dots, C_k) durante el tiempo n , nos ofrezca el mismo montante o nos produzca el mismo interés.



.....

.....

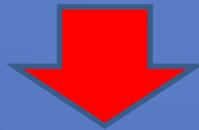


Tanto Medio de Capitalización Compuesto

Por tanto, deberá de cumplirse que sean iguales:

$$C_n = C_1(1+i_1)^n + C_2(1+i_2)^n + \dots + C_k(1+i_k)^n$$

$$C_n = C_1(1+i_m)^n + C_2(1+i_m)^n + \dots + C_k(1+i_m)^n = (C_1 + C_2 + \dots + C_k)(1+i_m)^n$$



$$C_1(1+i_1)^n + C_2(1+i_2)^n + \dots + C_k(1+i_k)^n = (C_1 + C_2 + \dots + C_k)(1+i_m)^n$$



Y se despeja i_m ...

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

Tenemos invertidos los siguientes capitales (2000€, 1000 €, 7000 €, 5000 €) a los tantos de interés simple anuales (5%, 4%, 4%, 6%) respectivamente, durante un tiempo de 5 años. Determinar el tanto medio de capitalización compuesto.

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

+

+

+

=

+

+

+

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

Tenemos invertidos los siguientes capitales (2000€, 1000 €, 7000 €, 5000 €) a los tantos de interés simple anuales (5%, 4%, 4%, 6%) respectivamente, durante un tiempo de 5 años. Determinar el tanto medio de capitalización compuesto.

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

El resultado ha sido diferente a cuando lo hicimos con ley financiera simple:

(simple)

(compuesto)

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

Hemos invertido 3.000 € a 7 años con un tanto de interés simple anual del 5% los primeros 3 años y del 4% los restantes 4 años. Determinar el tanto medio de capitalización compuesto.

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

$$3000 (1 + 0,05)^3 (1 + 0,04)^4$$

3000 €

$i_1 = 5\%$ anual

$i_2 = 4\%$ anual

0

3 años

7 años



Tanto Medio de Capitalización Compuesto

$$3000 (1 + 0,05)^3 (1 + 0,04)^4 = 3000 (1+i_m)^7$$

diferente de:

Tanto Medio de Capitalización Compuesto

Ejercicio propuesto



Tema 1.3.- CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

- Interés compuesto. Fórmula General. Cálculo del Montante. Representación Gráfica.
- Cálculo del interés. Cálculo del tiempo. Cálculo del tanto de interés.
- Comparación entre interés simple y compuesto.
- Tanto Medio de capitalización compuesta.
- Fraccionamiento del tanto. Tantos equivalentes.
- Convenio lineal y convenio exponencial.

Tantos Equivalentes

Dos tantos son equivalentes cuando aplicados al mismo capital (C_0) durante el mismo periodo de tiempo (n) producen los mismos intereses (I).

Tantos Equivalentes en Capitalización Compuesta

Ejemplo para entender el concepto de tanto equivalente, en el caso de capitalización compuesta.

Sea $C_0 = 1.000$ euros.

Sea $n = 2$ años.

Los tipos (tantos) de interés 10% anual y 0,8% mensual son equivalentes en capitalización compuesta., ¿porqué?

Tantos Equivalentes en Capitalización Compuesta

Sea capital inicial C_0 , tipo de interés i anual, duración n años.

Sea i_k el tanto equivalente al tipo de interés (i) anual, siendo k el número de veces que el año contiene al nuevo periodo temporal de referencia.

(Ejemplo: i_2 % semestral, i_4 % trimestral, i_{12} % mensual, etc.)

Tantos Equivalentes en Capitalización Compuesta

Se cumple, por definición de tanto equivalente:

$$I = C_0 \left[(1 + i)^n - 1 \right] = C_0 \left[(1 + i_k)^{n \times k} - 1 \right]$$


$$(1 + i)^n - 1 = (1 + i_k)^{n \times k} - 1$$


$$(1 + i)^n = (1 + i_k)^{n \times k}$$


$$(1 + i) = (1 + i_k)^k$$


$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1$$

Tantos Equivalentes en Capitalización Compuesta

Ejercicio Capitalización Compuesta:

Sea $C_0=6.000$ €, $i=12\%$ anual, $n=3$ años.

¿Tanto equivalente mensual del tipo de interés (i)?

TAE - TIN

TAE:

Tanto Anual Efectivo,
Tasa Anual Equivalente.

TIN:

Tanto Nominal,
Tanto Proporcional Anual,
Tipo de Interés Nominal.

TAE - TIN

TAE

TIN

k: Frecuencia de Capitalización

TAE - TIN

El capital final en una operación financiera, con capitalización compuesta, expresado según las tres formas de tipo de interés vistas son:

TAE - TIN

Una operación financiera con TAE del 5% con capitalización mensual, obtener el interés mensual y el tanto nominal de dicha operación.

Reflexión:

¿Porqué es obligatoria la inclusión del TAE en los contratos de operaciones financieras, por ejemplo, de las hipotecas?

TAE - TIN

Realizamos un depósito a plazo fijo de 3 años en una entidad financiera por un importe de 1.200€.

Determinar el montante siendo:

- a) T.A.E = 5%

- b) Tipo de interés nominal = 5%, con capitalización semestral.

Tantos Equivalentes. Capitalización **SIMPLE**

Sea $C_0=300\text{€}$ y $n=6$ años. Comparemos un 8% anual y un 4% semestral, en capitalización simple:

En general:

Tantos Equivalentes. Capitalización **COMPUESTA**

Sea $C_0=300\text{€}$ y $n=6$ años. Comparemos un 10,25% anual y un 5% semestral, capitalización compuesta:

En general:

TAE, i_k , J_k

1.- TAE

Tanto Anual Efectivo o Tasa Anual Equivalente.

2.- J_k

Tanto Nominal Anual o Tipo de Interés Nominal o Tanto Proporcional Anual.

3.- i_k

Tipo de Interés de un Periodo Fraccionado.

$$i_k = (1 + T.A.E.)^{1/k} - 1$$

$$i_k = \frac{J_k}{k}$$

TAE, i_k , J_k

Depósito a 3 meses: 4% T.A.E - 3,94% nominal.

Capitalización: Trimestral $\rightarrow k=4$.

Depósito a 6 meses: 4,10% T.A.E - 4,06% nominal

Capitalización: Semestral $\rightarrow k=2$.

TAE, i_k , J_k

Invertimos 1.000€ en el Depósito a 3 meses:

4% T.A.E / 3,94% nominal cap. trim./0,9853% trimestral

¿Cuánto tendremos al final de los tres meses?

TAE, i_k , J_k

Invertimos 1.000€ en el Depósito a 6 meses:

4,1% T.A.E / 4,06% nominal cap. sem./ 2,03% semestral

¿Cuánto tendremos al final de los seis meses?

TAE, i_k , J_k

Queremos comprarnos un ordenador que vale 1.247 euros pero sólo tenemos 1.000 euros.

Invertimos 1.000€ en el Depósito a 6 meses:

4,1% T.A.E / 4,06% nominal cap. sem. / 2,03% semestral

¿Cuánto tiempo hace falta para tener 1.247€ ?

TAE, i_k , J_k

Invertimos 1.000€ en el Depósito a 6 meses:

4,1% T.A.E / 4,06% nominal cap. sem./ 2,03% semestral

¿Cuánto tiempo hace falta para tener los 1.247€?

TAE, i_k , J_k

Invertimos 1.000€ en el Depósito a 6 meses:

4,1% T.A.E / 4,06% nominal cap. sem./ 2,03% semestral

¿Cuánto tiempo pasará hasta compraros el ordenador?

11 semestres (5,5 años)

¿Cuántas veces tendréis que renovar el depósito a 6 meses anterior?

10 veces

TAE, i_k , J_k

Invertimos 1.000€ en el Depósito a 6 meses:

4,1% T.A.E / 4,06% nominal cap. sem./ 2,03% semestral

¿Cuánto tiempo hace falta para tener los 1.247€?

Tema 1.3.- CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

- Interés compuesto. Fórmula General. Cálculo del Montante. Representación Gráfica.
- Cálculo del interés. Cálculo del tiempo. Cálculo del tanto de interés.
- Comparación entre interés simple y compuesto.
- Tanto Medio de capitalización compuesta.
- Fraccionamiento del tanto. Tantos equivalentes.
- Convenio lineal y convenio exponencial.

Ejercicio

Determinar el valor final de un capital de 6.000 € al 10% anual durante 3 años y 3 meses. (Calcularlo a interés compuesto).

Ejercicio

Determinar el valor final de un capital de 6.000 € al 10% anual durante 3 años y 3 meses. (Calcularlo a interés compuesto).



Ley financiera compuesta

Ejercicio

Determinar el valor final de un capital de 6.000 € al 10% anual durante 3 años y 3 meses. (Calcularlo tanto a interés simple como compuesto).

A interés compuesto, dos convenios de cálculo:

- 1.- Convenio Exponencial: capitalización compuesta tanto en la parte entera como en la parte fraccionada.
- 2.- Convenio Lineal: capitalización compuesta en la parte entera y capitalización simple en la parte fraccionada.

Ejercicio

Determinar el valor final de un capital de 6.000 € al 10% anual durante 3 años y 3 meses. (Calcularlo tanto a interés simple como compuesto).

1.- Convenio Exponencial: capitalización compuesta tanto en la parte entera como en la parte fraccionada.

Ejercicio

Determinar el valor final de un capital de 6.000 € al 10% anual durante 3 años y 3 meses. (Calcularlo tanto a interés simple como compuesto).

2.- Convenio Lineal: capitalización compuesta en la parte entera y capitalización simple en la parte fraccionada.