Matemáticas de las Operaciones Financieras

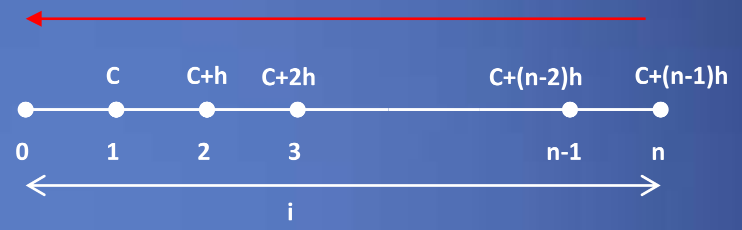
Tema 2.3. Rentas Variables

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Rentas Variables en Progresión Aritmética

Valor Actual**: Renta **variable en progresión aritmética**, **entera**, **pospagable**, **temporal** e **inmediata

¿ $A_{(C,h)\overline{n|}i}$?



C_1=C

C_2=C+h

C_3=C+2h

C_n=C+((n-1)·h)

$$VA = A_{(C,h)\overline{n|}i} = C\cdot(1+i)^{-1} + (C+h)\cdot(1+i)^{-2} + (C+2h)\cdot(1+i)^{-3} + \ldots + (C+(n-1)\cdot h)\cdot(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{A_{(C,h)\overline{n|}i} = \left(C + \frac{h}{i} + nh\right)\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h}{i}}$$

Rentas Variables en Progresión Aritmética

$$VA = C\cdot(1+i)^{-1} + (C+h)\cdot(1+i)^{-2} + (C+2h)\cdot(1+i)^{-3} + \ldots + (C+(n-1)\cdot h)\cdot(1+i)^{-n}$$

Cambio de variable: $(1+i)^{-1} = v$

$$- \left\{ \begin{array}{l} VA = C\cdot v + (C+h)\cdot v^{2} + (C+2h)\cdot v^{3} + \ldots + (C+(n-1)h)\cdot v^{n} = \\ VA\cdot v = C\cdot v^{2} + (C+h)\cdot v^{3} + (C+2h)\cdot v^{4} + \ldots + (C+(n-2)h)\cdot v^{n} + (C+(n-1)h)\cdot v^{n+1} \end{array} \right.$$

$$VA(1-v) = C\cdot v + h\cdot v^{2} + h\cdot v^{3} + \ldots + h\cdot v^{n} - (C+(n-1)h)\cdot v^{n+1} =$$

$$VA(1-v) = C\cdot v + h\cdot v^{2} + h\cdot v^{3} + \ldots + h\cdot v^{n} - Cv^{n+1} - n\cdot h\cdot v^{n+1} + h\cdot v^{n+1} =$$

$$VA(1-v) = C\cdot v(1-v^{n}) + h\cdot v^{2} + h\cdot v^{3} + \ldots + h\cdot v^{n} + h\cdot v^{n+1} - n\cdot h\cdot v^{n+1} =$$

Teniendo en cuenta que :1- $(1+i)^{-1}$= 1- v= 1- (1/(1+i))= (1+i-1)/(1+i)=i/(1+i)= i·v

$$VA\cdot \overbrace{i\cdot v} = C\cdot v(1-v^{n}) + h\cdot v(v + v^{2} + \ldots + v^{n}) - n\cdot h\cdot v^{n+1} = C\cdot v(1-v^{n}) + h\cdot v\cdot a_{\overline{n|}i} - n\cdot h\cdot v^{n+1}$$

$$v + v^{2} + \ldots + v^{n} = \frac{v^{n}\cdot v - v}{v-1} = \frac{v^{n}\cdot \cancel{v} - \cancel{v}}{-i\cdot \cancel{v}} = \frac{1-v^{n}}{i} = a_{\overline{n|}i}$$

Rentas Variables en Progresión Aritmética

$$VA\cdot i\cdot v = C\cdot v(1-v^{n}) + h\cdot v\cdot a_{\overline{n|}i} - n\cdot h\cdot v^{n+1}$$

$$VA = \frac{C\cdot v(1-v^{n})}{i\cdot v} + \frac{h\cdot v}{i\cdot v}\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h\cdot v^{n+1}}{i\cdot v}$$

$$= \frac{C\cdot(1-v^{n})}{i} + \frac{h}{i}\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h\cdot v^{n}}{i} = C\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{h}{i}\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h\cdot(1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= C\cdot a_{\overline{n|}i} + \frac{h}{i}\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h}{i}\cdot(1+i)^{-n} = \boxed{\left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h}{i}\cdot(1+i)^{-n} =}$$

$$= \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot a_{\overline{n|}i} \overbrace{- \frac{n\cdot h}{i}\cdot(1+i)^{-n} + \frac{n\cdot h}{i}} - \frac{n\cdot h}{i} = \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot a_{\overline{n|}i} + n\cdot h\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h}{i} =$$

$$-\frac{n\cdot h}{i}\cdot(1+i)^{-n} + \frac{n\cdot h}{i} = \frac{n\cdot h}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right] = n\cdot h\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = n\cdot h\cdot a_{\overline{n|}i}$$

$$\boxed{=\left(C+\frac{h}{i}+n\cdot h\right)\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h}{i} = A_{(C,h)\overline{n|}i}}$$

Rentas Variables, Términos en Progresión Aritmética, Inmediatas, Temporales, Pospagables.

$$A_{\overline{(C,h)n|},i} = \left(C + \frac{h}{i} + nh \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{nh}{i}$$

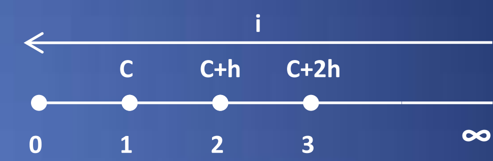
$$S_{\overline{(C,h)n|},i} = A_{\overline{(C,h)n|},i} \, (1+i)^n$$

CONSTANTES	VARIABLES ARIT.	VARIABLES GEOM.
TEMPORALES	PERPETUAS	
POSPAGABLES	PREPAGABLES	
INMEDIATAS	DIFERIDAS	ANTICIPADAS

Rentas Variables en Progresión Aritmética

Renta Variable en Progresión Aritmética, Inmediata Entera, Perpetua:

-Pospagable: Valor Actual:



$$A_{(C,h)\overline{n|}i} = \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot a_{\overline{n|}i} - \frac{n\cdot h}{i}\cdot(1+i)^{-n} \quad si\ n \to \infty$$

L'Hopital

$$A_{(C,h)\overline{\infty|}i} = \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} - \frac{h}{i}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(1+i)^n}\right) = \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot\frac{1}{i} - \frac{h}{i}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+i)^n\cdot\ln(1+i)}\right)$$

$$\frac{k}{\infty}=0$$

$$= \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot\frac{1}{i} - \cancel{\frac{h}{i\cdot\ln(1+i)}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+i)^{\infty}}\right)} \longrightarrow \boxed{A_{(C,h)\overline{\infty|}i} = \left(C+\frac{h}{i}\right)\cdot\frac{1}{i}}$$

Rentas Variables, Términos en Progresión Aritmética, Inmediatas, Perpetuas, Pospagables.

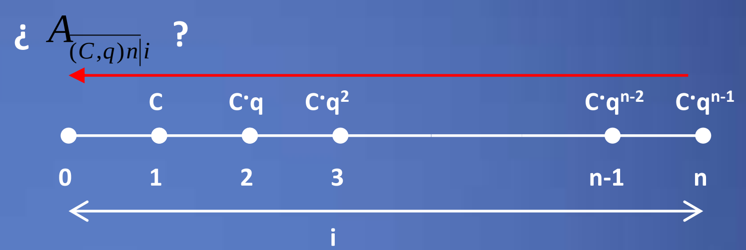
$$A_{\overline{(C,h)\infty|},i} = \left(C + \frac{h}{i} \right) \frac{1}{i}$$

CONSTANTES	VARIABLES ARIT.	VARIABLES GEOM.
TEMPORALES	PERPETUAS	
POSPAGABLES	PREPAGABLES	
INMEDIATAS	DIFERIDAS	ANTICIPADAS

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Rentas Variables en Progresión Geométrica

Valor Actual**: Renta **variable en progresión geométrica**, **entera**, **pospagable**, **temporal** e **inmediata



$C_1=C$

$C_2=C\cdot q$

$C_3=C\cdot q^2$

$C_n=C\cdot q^{n-1}$

$$A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i}=C\cdot(1+i)^{-1}+C\cdot q\cdot(1+i)^{-2}+C\cdot q^{2}\cdot(1+i)^{-3}+\ldots+C\cdot q^{n-1}\cdot(1+i)^{-n}=$$

$$\boxed{A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i}=C\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}}$$

Rentas Variables en Progresión Geométrica

$$VA = C\cdot(1+i)^{-1} + C\cdot q\cdot(1+i)^{-2} + C\cdot q^{2}\cdot(1+i)^{-3} + \ldots + C\cdot q^{n-1}\cdot(1+i)^{-n}$$

Cambio de variable: $(1+i)^{-1} = v$

$$VA = C\cdot v + C\cdot q\cdot v^{2} + C\cdot q^{2}\cdot v^{3} + \ldots + C\cdot q^{n-1}\cdot v^{n} =$$

$$VA = C\cdot v\cdot(1+\cdot q\cdot v + q^{2}\cdot v^{2} + \ldots + q^{n-1}\cdot v^{n-1}) = C\cdot v\cdot\frac{q^{n-1}\cdot v^{n-1}\cdot q\cdot v - 1}{q\cdot v - 1} =$$

$$= C\cdot v\cdot\frac{q^{n}\cdot v^{n} - 1}{q\cdot v - 1} = C\cdot v\cdot\frac{1-q^{n}\cdot v^{n}}{1-q\cdot v} = C\cdot v\cdot\frac{(1-q^{n}\cdot v^{n})v}{(1-q\cdot v)v} = C\cdot\frac{(1-q^{n}\cdot v^{n})}{(1-q\cdot v)v^{-1}}$$

$$= C\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{(1-q\cdot(1+i)^{-1})(1+i)} = C\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{(1+i)-q\cdot(1+i)^{-1}(1+i)}$$

$$\boxed{= C\cdot\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q} = A_{(C,q)\overline{n|}i}}$$

Rentas Variables, Términos en Progresión Geométrica, Inmediatas, Temporales, Pospagables.

$$A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i} = C\,\frac{1-q^{n}(1+i)^{-n}}{1+i-q}, \quad q \neq (1+i)$$

$$S_{(C,q)\,\overline{n|}\,i} = A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i}\,(1+i)^{n}$$

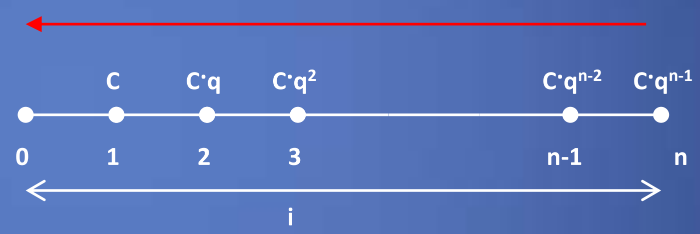
CONSTANTES	VARIABLES ARIT.	VARIABLES GEOM.
TEMPORALES	PERPETUAS	
POSPAGABLES	PREPAGABLES	
INMEDIATAS	DIFERIDAS	ANTICIPADAS

Rentas Variables en Progresión Geométrica

Caso especial del Valor Actual**: Renta **variable en progresión geométrica**, **entera**, **pospagable**, **temporal** e **inmediata

Si q=(1+i) →

$$A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i} = C\cdot(1+i)^{-1} + C\cdot q\cdot(1+i)^{-2} + C\cdot q^{2}\cdot(1+i)^{-3} + \ldots + C\cdot q^{n-1}\cdot(1+i)^{-n}$$



$$A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i} = C\cdot(1+i)^{-1} + C\cdot(1+i)\cdot(1+i)^{-2} + C\cdot(1+i)^{2}\cdot(1+i)^{-3} + \ldots + C\cdot(1+i)^{n-1}\cdot(1+i)^{-n}$$

$$A_{(C,q)\,\overline{n|}\,i} = C\cdot(1+i)^{-1} + C\cdot(1+i)^{-1} + C\cdot(1+i)^{-1} + \ldots + C\cdot(1+i)^{-1} = \frac{n\cdot C}{1+i}$$

Rentas Variables, Términos en Progresión Geométrica, Inmediatas, Temporales, Pospagables.

$$A_{\overline{(C,q)n|},i} = \frac{nC}{1+i}, \quad q = (1+i)$$

$$S_{\overline{(C,q)n|},i} = A_{\overline{(C,q)n|},i}\,(1+i)^n$$

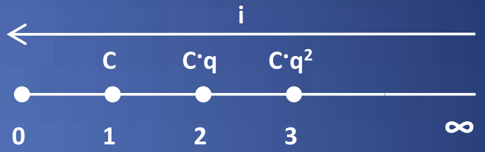
CONSTANTES	VARIABLES ARIT.	VARIABLES GEOM.
TEMPORALES	PERPETUAS	
POSPAGABLES	PREPAGABLES	
INMEDIATAS	DIFERIDAS	ANTICIPADAS

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Rentas Variables en Progresión Geométrica

Renta Variable en Progresión Geométrica, Inmediata Entera, Perpetua:

-Pospagable: Valor Actual:



$$A_{(C,q)\overline{n|}i} = C \cdot \frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q} \quad si\ n \to \infty$$

$$A_{(C,q)\overline{\infty|}i} = C \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q} = C \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n}\cdot\frac{1}{(1+i)^{n}}}{1+i-q} = C \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{q^{\infty}}{(1+i)^{\infty}}}{1+i-q}$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

Si q <(1+i) $\rightarrow$ $$\boxed{A_{(C,q)\overline{\infty|}i} = \frac{C}{1+i-q}}$$

Si q=(1+i) $\rightarrow$ $\frac{k}{0} = \infty$

Si q >(1+i) $\rightarrow$ ***no tiene valor financiero***

Rentas Variables, Términos en Progresión Aritmética, Inmediatas, Perpetuas, Pospagables.

$$A_{\overline{(C,q)\infty|},i} = \frac{C}{1+i-q}, \quad q < (1+i)$$

CONSTANTES	VARIABLES ARIT.	VARIABLES GEOM.
TEMPORALES	PERPETUAS	
POSPAGABLES	PREPAGABLES	
INMEDIATAS	DIFERIDAS	ANTICIPADAS

Rentas Enteras, Pospagables, Inmediatas

	Valor Actual (en el origen)	**Valor Final** (en el vencimiento del último término)
Temporal **Términos Constantes**	$A_{\overline{n}\vert i} = c\, a_{\overline{n}\vert i} = c\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$S_{\overline{n}\vert i} = c\, s_{\overline{n}\vert i} = c\,\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i}$
Perpetua **Términos Constantes**	$A_{\overline{\infty}\vert i} = c\, a_{\overline{\infty}\vert i} = \dfrac{c}{i}$	-----
Temporal **Términos en Progresión Aritmética**	$A_{\overline{(C,h)n}\vert i} = \left(C + \dfrac{h}{i} + nh\right)\cdot a_{\overline{n}\vert i} - \dfrac{n\cdot h}{i}$	$S_{\overline{(C,h)n}\vert i} = (C + \dfrac{h}{i})\cdot s_{\overline{n}\vert i} - \dfrac{n\cdot h}{i}$
Perpetua **Términos en Progresión Aritmética**	$A_{\overline{(C,h)\infty}\vert i} = (C + \dfrac{h}{i})\cdot \dfrac{1}{i}$	-----
Temporal **Términos en Progresión Geométrica**	$A_{\overline{(C,q)n}\vert i} = C\cdot\dfrac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$ $A_{\overline{(C,q)n}\vert i} = \dfrac{n\cdot C}{1+i}\quad si\ q=(1+i)$	$S_{\overline{(C,q)n}\vert i} = C\cdot\dfrac{(1+i)^{n}-q^{n}}{1+i-q}$ $S_{\overline{(C,q)n}\vert i} = n\cdot C\cdot(1+i)^{n-1}\quad si\ q=(1+i)$
Perpetua **Términos en Progresión Geométrica**	$A_{\overline{(C,q)\infty}\vert i} = \dfrac{C}{1+i-q}$	-----

Equivalencia entre Rentas Enteras			
Obtenemos:	**Valor Actual Pospagable** **por**	**Valor Final Pospagable** **por**	**Tipo de Renta**
Valor Final	$(1+i)^{n}$		Renta Pospagable Temporal
Valor Actual		$(1+i)^{-n}$	Renta Pospagable Temporal
Valor Prepagable	$(1+i)$	$(1+i)$	Cualquier Renta **Prepagable**
Valor Diferido	$(1+i)^{-d}$	=	Cualquier Renta **Diferida**
Valor Anticipado	=	$(1+i)^{k}$	Cualquier Renta **Anticipada,**