BLOQUE 4. CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

- El concepto de derivada.
- Relación entre continuidad y derivabilidad.
- Función derivada.
- Operaciones con derivadas.
- Derivación de las funciones elementales.
- Propiedades de las funciones derivables.
- Regla de L'Hôpital.

Con este tema comienza el estudio del Cálculo Diferencial. Su idea central es el concepto de derivada, basado a su vez en el límite.

La derivada es una de las nociones fundamentales del Cálculo. Gracias a ella es posible calcular tasas de variación y pendientes de las tangentes a curvas. Otra importante aplicación y de gran importancia, es el dibujo de la gráfica de una función y el cálculo de sus valores extremos.

1. El concepto de derivada

Isaac Newton empleó un método del matemático francés Pierre de Fermat para hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de una función en un punto dado, lo que condujo a la definición de derivada. En general no es sencillo hallar la pendiente de la tangente a una curva en un punto dado $P_0(x_0, y_0)$, pues la fórmula

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

requiere que se conozca otro punto (x_1, y_1) de la recta, distinto al de tangencia (x_0, y_0). Se verá el procedimiento desarrollado por Newton.

Sea $y = f(x)$ una función real de variable real definida en un entorno de un punto x_0. Se quiere hallar la tangente a $y = f(x)$ en el punto P_0 $(x_0, f(x_0))$. Se aproximará la tangente por otras rectas cuyas pendientes se puedan calcular directamente.

Así, se trazan secantes a la curva $y = f(x)$ entre x_0 y una sucesión de puntos $x \in D_f$. (Figura 1).

$$\lim_{x \to x_0} \left(\text{secantes } P_0P\right) = \text{recta tangente a } y = f(x) \text{ en } x_0$$

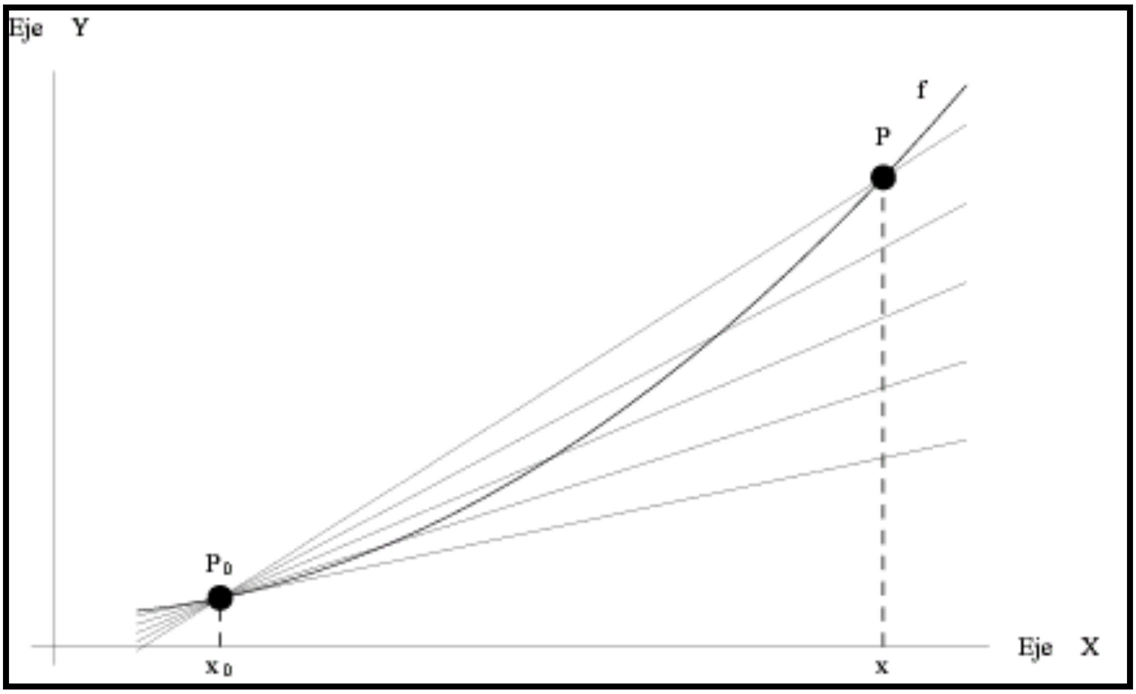

Figura 1: Rectas secantes a la curva *y*=f(*x*).

Además, en cada recta secante (véase la Figura 2):

$$\text{pendiente}_{P_0P} = tg\ \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

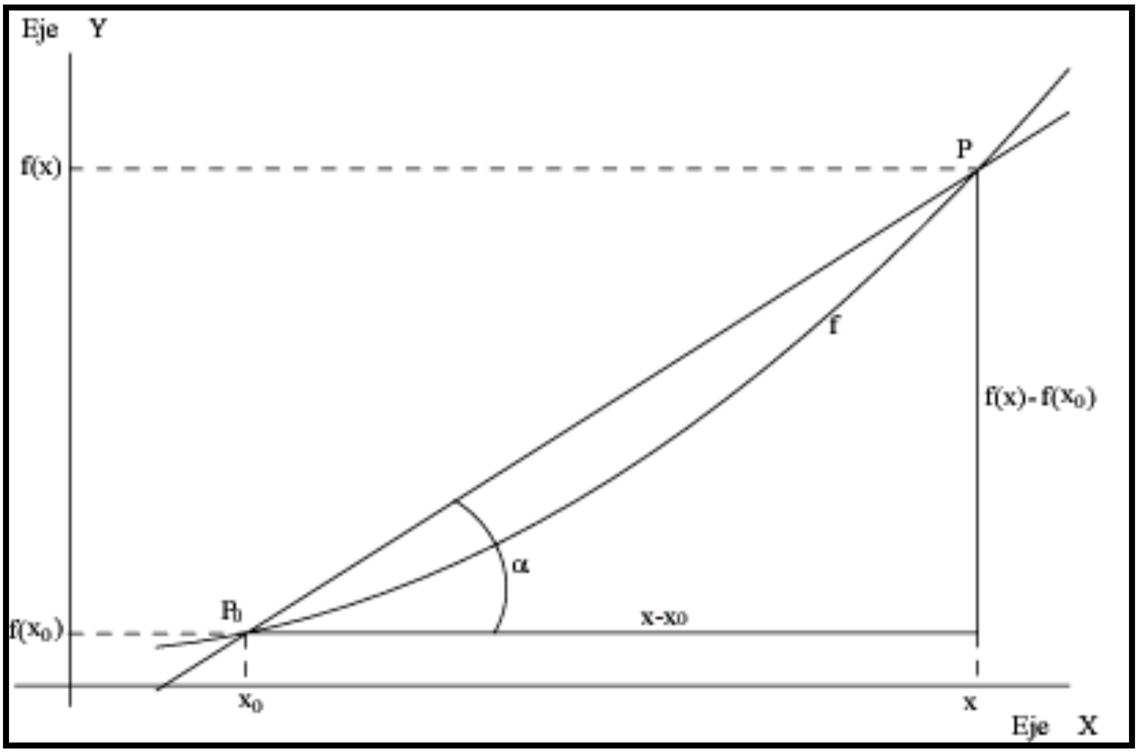

Figura 2: Pendiente de una recta secante.

Finalmente

$$\lim_{x \to x_0} \text{pendiente}_{P_0 P} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_{tgte\ a\ y=f(x)\ en\ x_0}$$

Por tanto, dada $y = f(x)$ una función real de variable real y $x_0 \in D_f$, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0 es:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre y cuando exista ese límite.

La expresión $\dfrac{f(x+h) - f(x\ )}{h}$ se denomina el *cociente incremental de f*. Su límite,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x\ )}{h} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x\ )}{\Delta x}$$

se denomina *derivada de f en el punto x*. Se denota por

$$f'(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)_x = \left.\frac{dy}{dx}\right|_x .$$

Dada $y = f(x)$ una función definida en D y $x \in D$, es *derivable en x* si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x\ )}{h}$$

y es finito. $y = f(x)$ *es derivable en D* si lo es en todo $x \in D$.

Si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x\ )}{h}$ no existe o diverge a ∞, se dirá que la función *no es derivable en x*. **El caso en el que el cociente incremental diverge a ∞ refleja la situación en la que la función tiene tangente vertical en el punto considerado**.

Si f es derivable en un punto x_0, la gráfica de la función $y = f(x)$ posee tangente en el punto P_0 $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ y ecuación

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

La derivada posee muchas aplicaciones que se verán más adelante: el estudio de tasas de variación, el cálculo de los valores máximos y mínimos de una función, la obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y de concavidad y convexidad, etc.

Derivadas laterales

Si consideramos la función $y = |x|$ en el punto $x = 0$, se observará cómo no es posible trazar una recta tangente a la curva en dicho punto, pues, de hecho, la pendiente por la izquierda no coincide con la pendiente por la derecha. (Véase la Figura 3).

Efectivamente

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Es necesario considerar los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

que en este caso no coinciden. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

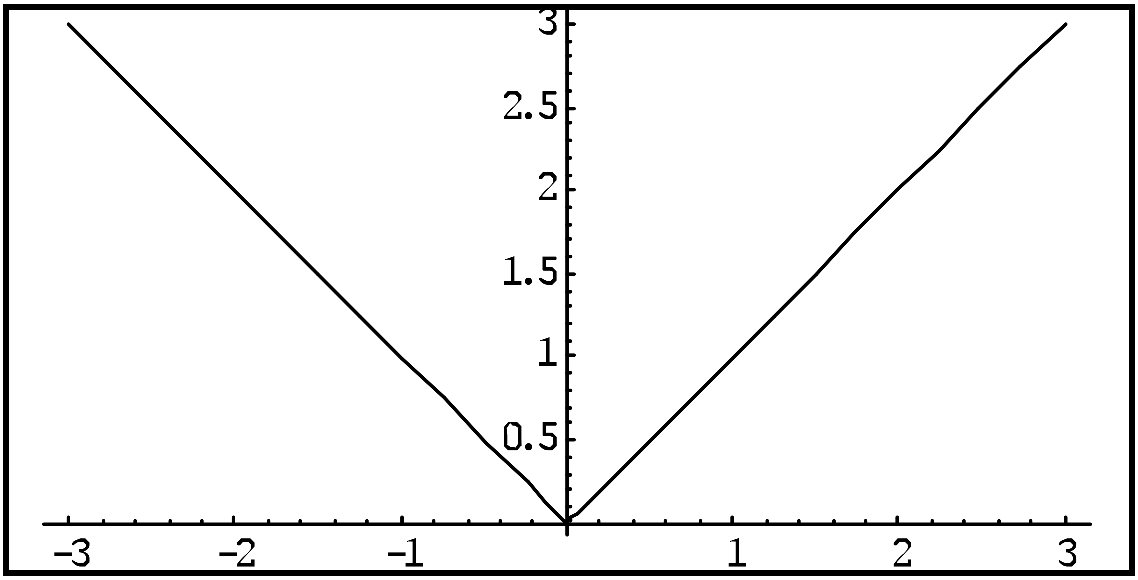

Figura 3: Gráfica de la función *y*=|*x*|.

Se introduce así el concepto de derivada lateral. La función $y = f(x)$ es *derivable por la derecha en* x_0 si existe la *derivada lateral por la derecha*:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv f'(x_0^+).$$

Análogamente, $y = f(x)$ es *derivable por la izquierda en* x_0 si existe la *derivada lateral por la izquierda*:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv f'(x_0^-)$$

y=*f*(*x*) es derivable en x_0 si y solamente si es derivable por la derecha y por la izquierda en x_0 y además, ambas derivadas laterales coinciden.

Diferencial

Se verá a continuación cómo hacer ciertas aproximaciones por medio de la derivada. Un caso particular de aproximación será el concepto de *análisis marginal*.

Sea $y = f(x)$ una función derivable. A un incremento dado, Δx, de la variable independiente, le corresponde un incremento Δy de *f*, que puede ser aproximado por el incremento de la recta tangente. A esta aproximación de Δy se le llama *diferencial de y* o *diferencial primera de f*. Se tiene:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Aplicando este concepto a la función identidad $e(x) = x$, tenemos:

$$dx = e'(x)\Delta x = 1\,\Delta x = \Delta x\,.$$

Así que $dx = \Delta x$, por lo que podemos escribir:

$$dy = f'(x)dx$$

Esta igualdad justifica la expresión de la derivada de *f* de la forma

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

2. Relación entre continuidad y derivabilidad

Si la gráfica de una función posee tangente en un punto, es de esperar que la función sea continua en dicho punto. El siguiente teorema confirma este hecho para tangentes no verticales.

Teorema. Toda función *y*=*f*(*x*) derivable en x_0 es continua en x_0.

Dicho de otro modo, **si *y*=*f*(*x*) *es discontinua en* x_0, no puede ser derivable en dicho punto**.

Sí puede ocurrir que una función sea continua y no sea derivable en algún punto.

3. Función derivada

Si $y=f(x)$ es una función definida y derivable en D, la función que a cada $x \in D$ le asigna $f'(x)$ es la *función derivada de f en D*.

$$\begin{aligned} f' &: D \to IR \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$

4. Operaciones con derivadas

Centrándonos ya en el cálculo de la derivada de una función real de variable real, se comenzará recordando las reglas fundamentales de derivación y las derivadas elementales más frecuentes.

Sean f y g funciones derivables en x_0 y $k \in IR$.

i) kf es derivable en x_0 y $(k\,f)'(x_0) = k\; f'(x_0)$.

ii) $f \pm g$ es derivable en x_0 y $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

iii) $f * g$ es derivable en x_0 y $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$.

iv) Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

Regla de la cadena

En muchas situaciones prácticas se da una magnitud como función de una variable, la cual es, a su vez, función de una segunda variable. Es decir, nos encontramos de nuevo con la composición de funciones. La *regla de la cadena* afirma lo siguiente.

Teorema (Regla de la cadena). Sean f y g funciones reales de variable real y supongamos que f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\; f'(x_0)$$

5. Derivación de las funciones elementales

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0		
x	1		
x^n	nx^{n-1}	$f(x)^n$	$nf(x)^{n-1} f'(x)$
Lx	$\frac{1}{x}$	$L[f(x)]$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
a^x	$a^x La$	$a^{f(x)}$	$f'(x)a^{f(x)}La$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$

6. Propiedades de las funciones derivables

Enunciaremos a continuación tres importantes teoremas:

- *Teorema de Rolle*, que permitirá demostrar el *Teorema del Valor Medio*, de gran importancia en el Cálculo.

- *Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy*, que permitirá obtener la conocida *Regla de L'Hôpital* que soluciona el cálculo de límites de funciones en caso de indeterminación.

- *Teorema del Valor Medio*, también conocido como *Teorema de Lagrange*. Es la más importante herramienta teórica del Cálculo Diferencial y posee importantes aplicaciones prácticas, de las cuales se desarrollarán más adelante:

  - el estudio del comportamiento de una función,
  - la resolución de problemas de optimización.

Teorema de Rolle. Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y además, $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$ donde la derivada se anula: $f'(\alpha) = 0$.

Geométricamente, el teorema afirma que bajo las condiciones expuestas, existe un valor $\alpha \in (a,b)$ tal que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en α es paralela al eje OX.

Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b), entonces existe algún punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$.

Teorema del Valor Medio o de los Incrementos Finitos de Lagrange. Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geométricamente, esto significa que la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa α es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, es decir, ambas rectas son paralelas.

Consecuencias del Teorema de Lagrange

i) Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ y tiene derivada nula en todos los puntos del intervalo (a, b), entonces la función es constante en el intervalo $[a, b]$.

ii) Si dos funciones f y g son continuas en el intervalo $[a, b]$, derivables en (a, b) y $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f y g difieren tan solo en una constante (en $[a, b]$).

7. Regla de L'Hôpital

Teorema (Regla de L'Hôpital). Si en un entorno del punto x_0 son derivables las funciones $f(x)$ y $g(x)$, siendo $g'(x) \neq 0$, para $x \neq x_0$ y además existen los límites

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces también existe el límite en x_0 de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y es igual a l, es decir:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Las generalizaciones a la Regla de L'Hôpital son las siguientes:

i) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y existe $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l finito o infinito), entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l .$$

ii) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Bibliografía

- Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable, I.* Ed. Prentice Hall.
- Caballero, R. E., Calderón, S. y Galache, T. P. (2000). *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa. 434 ejercicios resueltos y comentados*. Ed. Pirámide.
- Hoffmann, L. D. y Bradley, G.L. (1998). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. Ed. McGraw-Hill.
- Martínez Salas. (1992). *Elementos de matemáticas*. Ed. Lex Nova.
- San Millán, M. A. y Viejo, F. (1992). *Introducción a la economía matemática.* Ed. Pirámide.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice Hall.