BLOQUE 3. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL.
LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

- Funciones reales de una variable real.
- Límite de una función real.
- Continuidad de una función real.

Con este tema se inicia el estudio de las funciones reales de una variable, que se manejarán constantemente a lo largo del curso. En concreto, se recordarán las definiciones y operaciones básicas y las funciones elementales.

El concepto de límite es el siguiente paso, y pilar del Cálculo. La consecuencia inmediata es la definición de continuidad de una función.

1. Funciones reales de una variable real

Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera. Una función f definida sobre X es cualquier aplicación que asigne a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$ al que se denomina la *imagen* de x mediante f, y se escribe $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

x se denomina *variable independiente*, e *y variable dependiente*.

Si $X \subseteq IR$ e $Y \subseteq IR$, f es una función real de una variable real. Estas serán las funciones que se estudiarán de ahora en adelante. Funciones de índole económica son la función de utilidad, la de ingresos o la función de costes.

El *dominio* de una función f es el conjunto $D \subseteq IR$ sobre el que está definida, es decir:

$$D = \{x \in IR / \exists\, f(x)\}$$

La *imagen* de f es el conjunto

$$I = \{\, f(x) / x \in D\}$$

También se le denomina *rango* o *recorrido* de f.

Conocidos el dominio y la imagen de una función real de variable real se puede en muchos casos determinar su gráfica. Sea *f* una función cuyo dominio es *D*. Llamaremos gráfica de *f* al conjunto de puntos del plano definido de la siguiente forma:

$$G_f = \{(x, y) \in IR^2 \,/\, x \in D, y = f(x)\}$$

Operaciones

Dadas f: $D \to IR$ y g: $D \to IR$ se definen las siguientes operaciones con funciones:

i) Suma y diferencia de funciones.

$$\begin{aligned} f \pm g : D &\to IR \\ x &\mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \end{aligned}$$

ii) Producto por un escalar. Dado $c \in IR$:

$$\begin{aligned} cf : D &\to IR \\ x &\mapsto (cf)(x) = cf(x), c \in IR \end{aligned}$$

iii) Producto de funciones.

$$\begin{aligned} f * g : D &\to IR \\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(x) * g(x) \end{aligned}$$

iv) Cociente de funciones.

$$\begin{aligned} f / g : D^* &\to IR \\ x &\mapsto (f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

siendo $D^* = \{x \in D \,/\, g(x) \neq 0\}$.

Además de las operaciones anteriormente descritas definimos a continuación la llamada composición de funciones. Sean f: $D_1 \to IR$, g : $D_2 \to IR$ con $g(D_2) \subseteq D_1$. Se define la *composición de g con f*, a la función $f \circ g$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ x \in D_2$$

Es decir:

$$\begin{array}{ccccc} f \circ g : D_2 & \xrightarrow{g} & \operatorname{Im} g \subseteq D_1 & \xrightarrow{f} & IR \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

donde $D_{f \circ g} = \{x \in D_2 / g(x) \in D_1\}$.

En general, $f \circ g \neq g \circ f$, lo que significa que la composición no tiene la propiedad conmutativa. Pero sí verifica la propiedad asociativa, así que es cierto que:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Función inversa

Sea f: $D \rightarrow IR$ una función tal que a distintos valores de x les asigna distintos valores de y, es decir, si $x_1 \neq x_2$, entonces $y_1 \neq y_2$ (función inyectiva) y sea $D_1 = Imf$. Se define la *función inversa* de f como la función f^{-1} definida por:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: D_1 \longrightarrow R \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = x / f(x) = y. \end{aligned}$$

Su dominio y su imagen resultan ser:

$$D_{f^{-1}} = Imf, \quad Imf^{-1} = D_f$$

Dadas f y f^{-1}:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x .$$

Las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$.

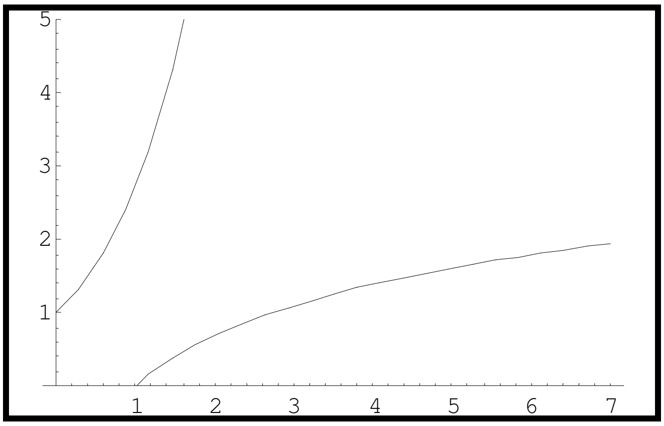

Figura 1: Gráfica de las funciones $y = ln(x)$ y de $y = e^x$.

Simetría, acotación y monotonía

Simetría

Una función f definida en D es *par* si $f(x) = f(-x)$ $\forall$ x $\in$ D. Su gráfica es simétrica respecto al eje OY .

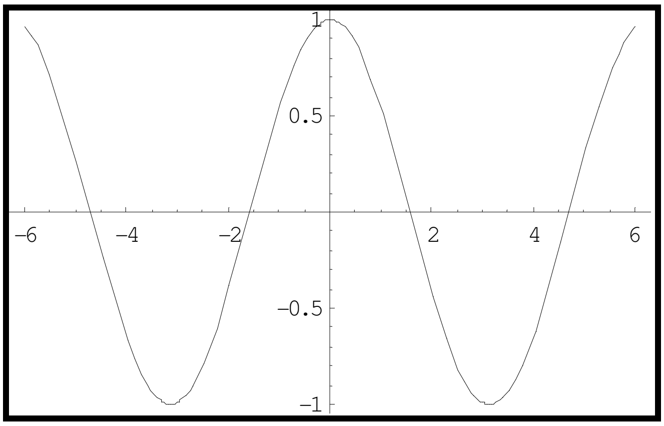

Figura 2: Gráfica de la función *y=cos*(*x*).

Es *impar* si $f(x) = -f(-x)\ \ \forall\, x \in D$. Su gráfica es simétrica respecto al origen.

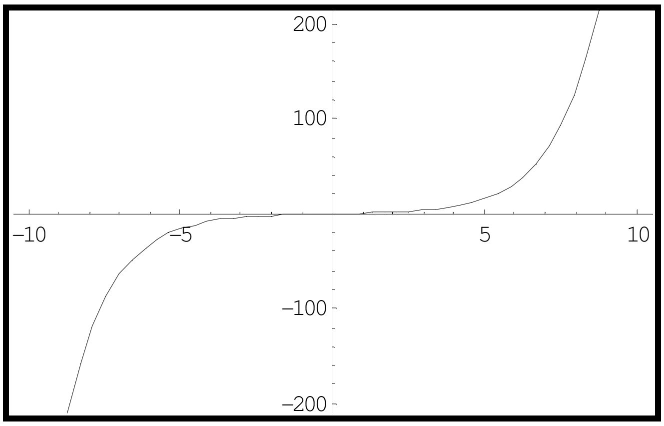

Figura 3: Gráfica de la función *y*=$\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$**, *a=2***

Acotación

Una función *f* definida en *D* es *acotada* si existen valores *m* y $M \in IR$ tales que:

$$m \le f(x) \le M \ \ \forall x \in D$$

Monotonía

Una función *f* definida en *D* es:

i) *monótona creciente* si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$

ii) *monótona decreciente* si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$

iii) estrictamente creciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$

iv) estrictamente decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$

Funciones elementales

A continuación se listan las funciones elementales, que se manejarán a lo largo del curso, analizando su dominio, imagen y características principales y mostrando su gráfica.

Funciones polinómicas

Una función *f* es polinómica si es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n$\in$ *IN* es el grado del polinomio y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in IR$. El dominio de cualquier función polinómica es todo *IR*.

Según el grado tenemos:

- Función constante: $f(x) = a$.
- Función lineal: $f(x) = ax+b$.
- Función cuadrática: $f(x) = ax^2+bx+c$.
- Función cúbica: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.
- Función cuártica: $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
.

Funciones racionales

Son las funciones de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ con } p(x) \text{ y } q(x) \text{ polinomios}$$

Su dominio es todo *IR* salvo las raíces del denominador.

Función exponencial

Sea $a>0$, $a \neq 1$. Se llama *función exponencial de base a*, a la función $f(x) = exp_a x = a^x$. Su dominio es todo *IR* y su imagen es el intervalo $(0,+\infty)$. $f(x)$ es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. Si $a = 1$, es $y = 1$ constante.

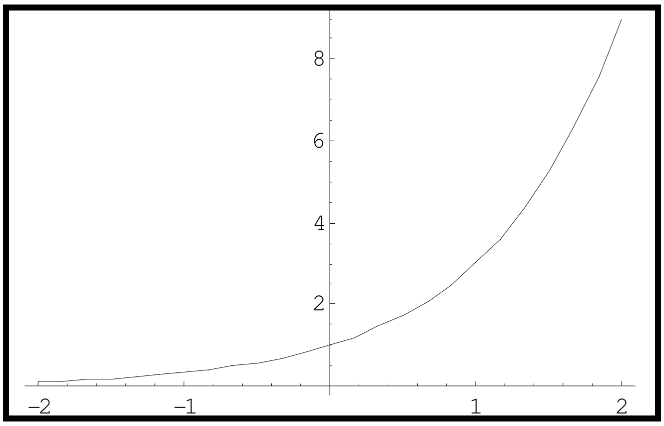

Figura 4: Gráfica de la función *y=3*^{x}.

La función exponencial por excelencia es la de base e: $f(x) = exp(x) = e^x$.

Función logarítimica

Sea $a>0$, $a \neq 1$. Se llama *función logarítmica de base a*, a la función $f(x) = log_a\, x$, inversa de la función exponencial de base a, es decir, definida por $y = log_a\, x \Leftrightarrow a^y = x$.

Su dominio es IR^+. Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.

La función logarítmica por excelencia es la de base e, cuyos valores se llaman *logaritmos neperianos* o *naturales*:

$$f(x) = ln(x) = log_e\, x$$

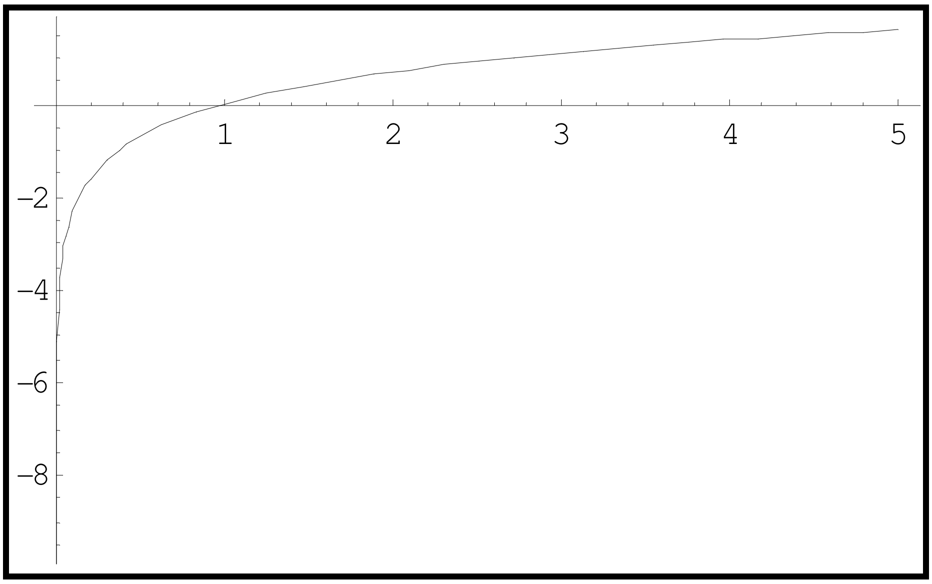

Figura 5: *y= ln*(*x*).

Función potencial

Se llama función potencial a la función $f(x) = x^{\alpha}$, donde α es un número real cualquiera. Esta función queda definida por $x^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$ con $a \neq 1$, $a > 0$.

Su dominio es $[0,+\infty)$. *f*(*x*) creciente si α > 0 y decreciente si α < 0. Es constante si α =0.

2. Límite de una función real

Sea *f*: $D \to IR$ y $x_0 \in IR$.

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in IR,\ L < \infty$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /\ si\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},$

entonces $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si $\forall M \in R^+\ \exists \delta > 0 /$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},$ entonces $f(x) > M$.

iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si $\forall M \in R^-\ \exists \delta > 0 /$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},$ entonces $f(x) < M$.

iv) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in R^+ /$ si $x > N,$ entonces $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

v) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in R^- /$ si $x < N,$ entonces $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

vi) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ si $\forall M \in R^+\ \exists N \in R^+ /$ si $x > N,$ entonces $|f(x)| > M$.

Se dice que el *límite lateral por la derecha* de *f*(*x*) cuando $x \to x_0 \in IR$ es $l_1 \in IR$ y se denota $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_1$, si $\forall \varepsilon > 0$ existe un valor $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, x_0 + \delta),$ entonces $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$.

Se dice que el *límite lateral por la izquierda* de *f*(*x*) cuando $x \to x_0 \in IR$ es $l_2 \in IR$ y se denota $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_2$, si $\forall \varepsilon > 0$ existe un valor $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0),$ entonces $f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$.

En general, el cálculo de límites laterales se puede expresar de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h)$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0 - h)$$

Teorema. Sea *f* una función y $x_0 \in IR$. El límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si y sólo si existen los límites laterales $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y ambos coinciden.

Propiedades

Teorema de unicidad. Si una función tiene límite en un punto, dicho límite es único.

Teorema. Si una función tiene límite finito en un punto x_0, entonces *f* está acotada en un entorno reducido de x_0.

Teorema del límite de la función intermedia. Si en un cierto entorno reducido del punto x_0, las tres funciones *f*, *g*, y *h* están definidas cumpliendo $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo punto del entorno, y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Operaciones con límites finitos

Para realizar el cálculo de límites de forma precisa y en casos de funciones más complejas, nos podemos servir de algunos teoremas sobre límites de funciones reales de variable real que se enuncian a continuación. Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real y $\lambda \in IR$.

i) $\lim_{x \to x_0} \lambda = \lambda$.

ii) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

iii) Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x)$.

iv) Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen,

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

v) Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen,

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$$

vi) Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen y $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

vii) Si $\alpha > 0$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, entonces se cumple que $\lim_{x\to x_0} \alpha^{f(x)} = \alpha^l$. es decir, el límite de una exponencial es igual a la exponencial del límite.

viii) Si *f*(*x*) es una función que toma valores positivos, tiene límite $l > 0$ en el punto x_0 y $\alpha > 0$, se cumple: $\lim_{x\to x_0} \log_\alpha f(x) = \log_\alpha l$. Es decir, el límite del logaritmo de *f*(*x*) es igual al logaritmo del límite de *f*(*x*).

ix) Si *f*(*x*)>0 y existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^\alpha = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^\alpha, \alpha \in IR.$$

Operaciones con límites infinitos. Indeterminaciones

Sean *f* y *g* dos funciones cuyos límites (finitos o infinitos) existen en el punto x_0. Se verifica:

i) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$: $(+\infty) + l = +\infty$.

ii) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

iii) Siguiendo con la notación abreviada, se cumple: $l - (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) + l = -\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, etc. El límite $\infty - \infty$ es desconocido.

iv) Con las operaciones producto y cociente se tienen las igualdades:

$$l \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } l > 0 \\ \text{desconocido} & \text{si } l = 0 \\ -\infty, & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

$$l \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } l > 0 \\ \text{desconocido} & \text{si } l = 0 \\ +\infty, & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,\ (+\infty) * (-\infty) = -\infty,\ (-\infty) * (-\infty) = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{l} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } l > 0 \\ \infty & \text{si } l = 0 \\ -\infty, & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

$$\frac{-\infty}{l} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } l > 0 \\ \infty & \text{si } l = 0 \\ +\infty, & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

$$\frac{l}{\pm\infty}=0,\ \frac{l}{0}=\begin{cases}\infty, & \text{si } l\neq 0\\ \text{desconocido}, & \text{si } l=0\end{cases},\ \frac{\infty}{\infty}\text{desconocido.}$$

v) En el cálculo de límites de potencias, se tiene:

$$0^{l}=\begin{cases}0, & \text{si } l>0\\ +\infty & \text{si } l<0\\ \text{desconocido} & \text{si } l=0\end{cases}$$

$$(+\infty)^{l}=\begin{cases}+\infty, & \text{si } l>0\\ 0 & \text{si } 1<0\\ \text{desconocido}, & \text{si } 1=0\end{cases}$$

$$l^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{si } l>1\\ 0 & \text{si } l<1\\ \text{desconocido}, & \text{si } l=1\end{cases}$$

$$l^{-\infty}=\begin{cases}0, & \text{si } l>1\\ +\infty & \text{si } l<1\\ \text{desconocido}, & \text{si } l=1\end{cases}$$

Indeterminaciones

Hay situaciones en las que no se puede determinar el límite de la función que resulta al realizar algunas operaciones con varias funciones, conociendo solamente los límites de éstas. Estos casos se llaman casos indeterminados o indeterminaciones y con la simbología anterior son los siguientes:

$$\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0},\ 1^{\infty}.$$

En estos casos, para poder calcular el límite correspondiente, si existe, hay que realizar transformaciones en la expresión de la función, para llegar a otra equivalente con límite determinado.

El caso particular de funciones polinómicas y racionales se detalla a continuación:

- Si $p(x)$ es una función polinómica, $\lim_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$.
- Si $f(x)$ es una función racional definida como $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{p(x_0)}{q(x_0)},\text{si } q(x_0)\neq 0$$

y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_h x^h + a_{h-1}x^{h-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad h>k \\ 0 & \text{si} \quad h<k \\ \dfrac{a_h}{b_k} & \text{si} \quad h=k \end{cases}$$

Por otro lado, las indeterminaciones del tipo 1^{∞} son también fáciles de resolver. En primer lugar:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \frac{1}{e}$$

Y en general, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}.$$

Infinitésimos e infinitos

Frecuentemente pueden realizarse transformaciones sencillas en la función, que evitan la aparición de indeterminaciones. Una solución alternativa y muy sencilla que veremos más adelante requiere el uso de derivadas. Es la conocida Regla de L'Hopital. Pero en el siguiente apartado conoceremos otra forma de resolución de indeterminaciones mediante infinitos e infinitésimos equivalentes.

Infinitésimos

Llamaremos *infinitésimo para* $x \to x_0$ a cualquier función *f*(*x*) tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Se cumple que:

i) La suma, diferencia y producto de infinitésimos es un infinitésimo.

ii) El producto de un infinitésimo por una función acotada en un entorno de x_0 es un infinitésimo.

Dados dos infinitésimos *f* y *g* en el punto x_0, sea $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

i) Si *l* es finito, se dice que *f* y *g* son *infinitésimos del mismo orden*.
ii) Si *l* =1, se dice que *f* y *g* son dos infinitésimos *equivalentes*. Se escribe entonces $f \underset{x\to x_0}{\approx} g$

En particular, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\underset{x \to 0}{senx \approx x} \quad ; \quad \underset{x \to 0}{tagx \approx x}$$

$$\underset{x \to 0}{1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \underset{x \to 0}{Ln(1+x) \approx x} \quad ; \quad \underset{x \to 1}{Ln(x) \approx x-1} \quad ; \quad \underset{x \to 0}{e^x - 1 \approx x}$$

Análogamente:

$Si \lim_{x \to x_0} f(x) = 0:$

$$\underset{x \to x_0}{sen\, f(x) \approx f(x)} \quad ; \quad \underset{x \to x_0}{tag\, f(x) \approx f(x)}$$

$$\underset{x \to x_0}{1-\cos f(x) \approx \frac{f(x)^2}{2}} \quad ; \quad \underset{x \to x_0}{Ln(1+f(x)) \approx f(x)} \quad ; \quad \underset{x \to x_0}{e^{f(x)} - 1 \approx f(x)}$$

$Si \lim_{x \to x_0} f(x) = 1:$

$$\underset{x \to x_0}{Ln(f(x)) \approx f(x) - 1}$$

Si en una expresión de un límite **se sustituye un factor o un divisor que sea infinitésimo por otro equivalente, el valor del límite no se ve alterado**.

Infinitos

Resultados similares se tienen para los infinitos. Llamaremos infinito para $x \to x_0$ a cualquier función $f(x)$ tal que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Si $f(x)$ es un infinito para $x \to x_0$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo para $x \to x_0$.

i) Dos infinitos $f(x)$ y $g(x)$ son *del mismo orden* para $x \to x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l,\ l \neq 0,\ \ l < \infty$$

ii) Si l= 1 se dice que son *equivalentes*.

Es lo que ocurre en el siguiente caso:

$$a_b x^b + a_{b-1} x^{b-1} + \cdots a_1 x + a_0 \approx a_b x^b \text{, } si\ x \to \infty$$

3. Continuidad de una función real

Una función $y = f(x)$ es *continua en un punto* $x = x_0$ si

i) f está definida en x_0,

ii) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se puede estudiar si una función es continua en un punto por la derecha o por la izquierda. Se dice que una función f es *continua por la derecha en* x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Se dice que una función f es *continua por la izquierda en* x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Así pues, una función f es continua en x_0 si y sólo si f es continua en x_0 por la derecha y por la izquierda.

Se dice que una función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si f es continua en cada uno de los puntos de dicho intervalo. Para un intervalo cerrado $[a, b]$, el mayor grado de continuidad que podemos esperar (y que por tanto podemos exigir) es que f sea continua en el intervalo abierto (a, b), que f sea continua en el punto a por la derecha y continua en b por la izquierda. Si se verifican estas condiciones, diremos que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. De forma análoga se define la continuidad en otro tipo de conjuntos más generales.

Teorema. Si f y g son dos funciones continuas en x_0, entonces:

i) $f+g$ es una función continua en x_0.

ii) $f-g$ es una función continua en x_0.

iii) $f \cdot g$ es una función continua en x_0.

Además, si $g(x_0) \neq 0$, entonces también se cumple:

iv) f/g es una función continua en x_0.

Discontinuidades

Si una función está definida en un entorno reducido de x_0 y no es continua en x_0, decimos que tiene una *discontinuidad* en ese punto.

- $y = f(x)$ posee una *discontinuidad evitable* en un punto x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y L es finito pero no coincide con $f(x_0)$ bien porque $L \neq f(x_0)$ o porque x_0 no pertenece al dominio de f. En este caso, será posible prolongar la función de forma que sea continua en los puntos problemáticos.
- $y = f(x)$ posee una *discontinuidad inevitable* si se produce alguna de esta situaciones:
  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ o bien, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existen pero al menos uno de ellos es infinito.
  - Existe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ambos son finitos pero no coinciden. Se trata de una *discontinuidad de primera especie o de salto*.
  - Alguno de los dos límites laterales en el punto x_0 no existe. Es una *discontinuidad de segunda especie*.

Propiedades

Sea f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f está acotada en $[a, b]$. Esto es, existe un número $K>0$, tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$.

Teorema de Weierstrass. Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza en el mismo intervalo un máximo y un mínimo.

Teorema de Bolzano. Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe algún punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Teorema (Propiedad de Darboux). Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces f toma en $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre y $f(a)$ y $f(b)$.

Continuidad de la función compuesta

Teorema. Si f: $[a,b] \rightarrow [\alpha,\beta]$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ con valores en $[\alpha,\beta]$ y $g:[\alpha,\beta] \rightarrow IR$ es continua en $[\alpha,\beta]$, entonces la función compuesta $g \circ f : [a,b] \rightarrow IR$ es continua en $[a, b]$.

Continuidad de las funciones elementales

- Como las funciones $f(x) = k$ y $e(x) = x$ son continuas en todo IR, las funciones polinómicas son continuas en todo IR.
- Toda función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo IR salvo en las raíces del denominador $Q(x)$.
- La función exponencial $y = a^x$ (a>0) es continua en todo IR.
- Como $y = a^x$ ($a > 0$) es continua y estrictamente monótona, su función inversa $y = log_a x$, también es continua.
- La función potencial $y = x^\alpha$ con x>0 y $\alpha \in IR$ puede definirse como y=exp(α ln$x$)=$e^{\alpha \ln x}$ compuesta de una función exponencial y una logarítmica. La función potencial es continua en todo su dominio IR^+.

Bibliografía

- Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable, I*. Ed. Prentice Hall.
- Caballero, R. E., Calderón, S. y Galache, T. P. (2000). *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa. 434 ejercicios resueltos y comentados*. Ed. Pirámide.
- Martínez Salas. (1992). *Elementos de matemáticas*. Ed. Lex Nova.
- San Millán, M. A. y Viejo, F. (1992). *Introducción a la economía matemática.* Ed. Pirámide.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice Hall.