BLOQUE 1. LOS NÚMEROS

- Números naturales, enteros y racionales.
- El número real.
- Intervalos.
- Valor absoluto.

Tanto el Cálculo como el Álgebra que estudiaremos en esta asignatura, descansan en los números reales, siendo $\mathbb{R}$ el conjunto fundamental en el estudio de la misma. Resulta, por tanto, obligado introducir este sistema de números.

1. Números naturales, enteros y racionales

Intuitivamente el primer conjunto de números que a uno se le ocurre es el de los *números naturales* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ \dots \}$. Surge a la hora de enfrentarse al problema de contar. Sin embargo, la definición rigurosa de número natural no es trivial.

Números naturales

Una forma de introducir el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es mediante los conocidos *axiomas de Peano*.

La suma $a+b$ y el producto $a \times b$ de dos números naturales a y b también es un número natural, es decir, **el conjunto de los números naturales es cerrado respecto de las operaciones suma y producto**. Además, estas operaciones cumplen las siguientes **propiedades**:

i) *Propiedad conmutativa de la suma.*
ii) *Propiedad asociativa de la suma.*
iii) *Propiedad conmutativa del producto.*
iv) *Propiedad asociativa del producto.*
v) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.*

La operación sustracción de dos números naturales no siempre es un número natural. Por tanto, surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales al conjunto de los *números enteros*.

Números enteros

El conjunto de los números enteros,

$$\mathbf{Z}=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

está formado por los números naturales (o enteros positivos) $\mathbf{N} = \mathbf{Z}^+$, sus opuestos los enteros negativos $\mathbf{Z}^-$ y el 0. Así, se tiene

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^+.$$

Se puede comprobar que las operaciones suma y producto en el conjunto de los números enteros cumplen todas las propiedades que se han visto anteriormente para los números naturales. Además:

i) Existe un elemento neutro para la suma: el 0.
ii) Todo número entero tiene un número opuesto (simétrico respecto de la suma).
iii) Existe un elemento neutro para el producto: el 1.

Como la operación cociente de dos números enteros no siempre es un número entero, surge la necesidad de ampliar dicho conjunto al de los *números racionales*.

Números racionales

Un número racional se obtiene como cociente de dos números enteros (el divisor no debe ser nulo).
En el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales ya se pueden resolver ecuaciones como esta:

$$b \times x = a \text{ para } a \text{ y } b \text{ enteros cualesquiera con } b \neq 0,$$

que llevan a la operación *división* o inversa de la multiplicación.

Además de las propiedades vistas de los números enteros, los números racionales también cumplen la siguiente:

i) Existencia de *inverso*: todo número racional no nulo a tiene su inverso que se denota por a^{-1}, cumpliéndose:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

.

2. El número real

Los números racionales siguen siendo insuficientes para nuestras necesidades de cálculo. Con números de $\mathbf{Q}$ no es posible dar la respuesta adecuada a problemas como el siguiente: calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 metro. Es necesario ampliar dicho conjunto, para que contenga números como $\sqrt{2}$ ó π que no pueden generarse por cociente de números enteros. Estos números son los *números irracionales*. El conjunto de todos los números irracionales se denota por $\mathbf{I}$.

La incorporación de este tipo de números a los anteriores da lugar a un conjunto más completo, constituido por todos los números racionales e irracionales: el conjunto de los *números reales*, $\mathbf{R}$. Disponiendo de este conjunto, **toda magnitud del mundo real está exactamente representada por uno de sus elementos**.

El conjunto de números reales queda perfectamente definido por algunas de sus propiedades, llamadas *axiomas de* $\mathbf{R}$, a partir de las cuales se pueden deducir otras muchas.

Axiomas

($\mathbf{R}$,+,×) es un cuerpo conmutativo, lo que significa que en $\mathbf{R}$ hay definidas dos operaciones + y × que verifican:

i) $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x + y \in \mathbf{R}$ y $x \times y \in \mathbf{R}$.

ii) *Propiedad asociativa*: $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$

$$x+(y+z) = (x+y)+z,\ x\times(y\times z) = (x\times y)\times z.$$

iii) Existe un único elemento $a \in \mathbf{R}$, $a \equiv 0$ tal que $\forall x \in \mathbf{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$ y un único elemento $b \in \mathbf{R}$, $b \equiv 1$, tal que $x \times 1 = 1 \times x = x$. Se trata del *elemento nulo* y *elemento unidad* respectivamente.

iv) $\forall x \in \mathbf{R}$, existe un único elemento $-x \in \mathbf{R}$ tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Es el *elemento opuesto de x*.

v) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$, existe un único elemento $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$ tal que

$$x\times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Es el *elemento inverso de x*.

vi) *Propiedad conmutativa*: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x + y = y + x$; $x \times y = y \times x$.

vii) *Propiedad distributiva*: $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Si además se considera la relación $\leq$, **($\mathbf{R}$, $\leq$) es un cuerpo totalmente ordenado**, es decir:

i) $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ ó $y \leq x$.

ii) $\forall\ x, y \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$.

iii) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

iv) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$ si $x \leq y$, $x + z \leq y + z$.

v) $\forall\ x, y \in \mathbf{R}$ si $0 \leq x$ y $0 \leq y$, entonces $0 \leq x \times y$.

vi) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$, con $x \leq y$, $z>0$, entonces $xz \leq yz$.

vii) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$, con $x \le y$, $z<0$, entonces $xz \ge yz$.

viii) $\forall\ x, y \in \mathbf{R}$, con $0<x<y$, entonces $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Se dice que **R es un cuerpo arquimediano** por verificar el siguiente axioma:

$$\forall\ x,\ y \in IR,\ si\ 0 < x\ y\ 0 \le y,\ \exists n \in IN / y \le n * x$$

Otro axioma de gran importancia se refiere a la densidad de **Q**. Afirma que **Q es denso en R**, lo que significa que:

$$\forall\ x < y \in IR, \exists\ q \in Q / x < q < y$$

Todos estos axiomas junto con el *axioma de completitud* que se enunciará más adelante, permiten deducir todas las propiedades de los números reales. De dichos axiomas se pueden extraer todas las leyes usuales del Álgebra elemental.

Los números reales se pueden representar sobre una recta en la que se haya elegido un punto origen como imagen del número real 0 y una unidad de medida. En esta representación, a todo número real le corresponde un punto de la recta y viceversa, cada punto de la recta es la imagen de un número real. Además, dados dos números reales x, $y \in \mathbf{R}$, es $x < y$ si y solo si la imagen de x está a la izquierda de la imagen de y. Este es el motivo por el que al conjunto **R** también se le llama *la recta real*.

Axioma de completitud

Una vez definida la relación de orden $\le$, sea A un subconjunto cualquiera de **R**. Se definen los siguientes conceptos:

- Se dice que $m \in \mathbf{R}$ es una *cota inferior* del conjunto A, si $\forall x \in$ A, $m \le x$. Del mismo modo, M $\in$ **R** es una *cota superior* del conjunto A, si $\forall x \in$ A, $M \ge x$.
- Se dice que A está *acotado inferiormente* (*superiormente*) en **R** si admite al menos una cota inferior (superior) finita. Si A está acotado superior e inferiormente se dice que está *acotado en* **R**.
- La mayor (menor) de las cotas inferiores (superiores) se denomina *extremo inferior* o *ínfimo* (*superior* o *supremo*) del conjunto A. Si el extremo inferior (superior) pertenece al conjunto A se denomina *mínimo* (*máximo*) de A.

El *axioma de completitud* de **R** afirma que todo subconjunto A $\subset$ **R** no vacío y acotado superiormente (inferiormente) posee en **R** un extremo superior o supremo (extremo inferior o ínfimo).

3. Intervalos

Los subconjuntos más notables de **R** son los intervalos. Sean a, $b \in \mathbf{R}$, se definen los siguientes conjuntos:

- Si $a < b$, se denomina *intervalo abierto* (a, b) al conjunto:

$$(a,b) = \{x \in IR / a < x < b\}$$

- Si $a \leq b$, se denomina *intervalo cerrado* $[a, b]$ al conjunto:

$$[a,b] = \{x \in IR / a \leq x \leq b\}$$

- Para $a < b$, los *intervalos semiabiertos* $[a, b)$ y $(a, b]$ son los conjuntos

$$[a,b) = \{x \in IR / a \leq x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in IR / a < x \leq b\}$$

- Se definen también los siguientes *intervalos no acotados*, con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$[a,+\infty) = \{x \in IR / a \leq x\}$$
$$(a,+\infty) = \{x \in IR / a < x\}$$
$$(-\infty,b] = \{x \in IR / x \leq b\}$$
$$(-\infty,b) = \{x \in IR / x < b\}$$

- El intervalo $(-\infty,+\infty)$ representa la recta real completa.

4. Valor absoluto

Tomando de nuevo como referencia la correspondencia entre el conjunto $\mathbb{R}$ y la recta real, se puede definir el concepto de *valor absoluto de un número real*.

Formalmente, la función valor absoluto de un número real x, $| x |$, se define como:

$$| x | = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto define la distancia entre los puntos de la recta real. La distancia entre los números x e y de la recta real es

$$|y - x| = | x - y|$$

$|x|$ es la distancia del punto x respecto al origen.

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades.

Para dos números reales x e y se verifica:

$i) \; |x| \geq 0$

$ii) \; |-x| = |x|$

$iii) \quad |x|^2 = x^2$

$iv) \; |xy| = |x||y|$

$v) \; \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \; y \neq 0$

$vi) \; Si \; y \geq 0, |x| = y \Leftrightarrow x = \pm y$

$vii) \; Si \; y > 0, |x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$

$viii) \; Si \; y > 0, |x| > y \Leftrightarrow x > y \; ó \; x < -y$

$ix) \; |x + y| \leq |x| + |y|$

La propiedad vi) es útil para resolver ecuaciones en valores absolutos. Las propiedades vii) y viii) son las más importantes para resolver inecuaciones en valores absolutos y también se cumplen para $\leq$ y $\geq$.

Bibliografía

Bradley, G. L. y Smith, K. J. (1998). *Cálculo de una variable, I*. Ed. Prentice Hall.