BLOQUE 2. ÁLGEBRA LINEAL.
MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (*)

- Matrices.
- Determinantes.
- Rango.
- Sistemas de ecuaciones lineales.

El Álgebra Lineal es una parte de la Matemática de frecuente aplicación en otras áreas de conocimiento. Uno de los elementos estudiados por el Álgebra Lineal más utilizado es el de matriz. Esto es debido a que la Teoría de Matrices ofrece la posibilidad, entre otras, de trabajar cómodamente con modelos de gran dimensión, tanto en número de variables, como de ecuaciones o datos, ya que brinda una notación simple y compacta para designar amplios conjuntos de información. Esto redunda a su vez en una mayor facilidad a la hora de trabajar con estos conjuntos de datos desde un punto de vista computacional.

La Teoría de Matrices tiene, además, gran relevancia teórica, pues una matriz es la representación de determinadas transformaciones entre espacios vectoriales, las aplicaciones lineales.

1. Matrices

Definiciones

Dados $a_{ij} \in \mathbf{R}$ con $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, al rectángulo de $m\times n$ números reales en una tabla con m filas y n columnas de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se le denomina *matriz de dimensión* $m\times n$. Se denota también como:

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}),\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Se denota por a_{ij} al elemento de la matriz que ocupa la i-ésima fila y la j-ésima columna.

En general hablaremos de *línea* para referirnos tanto a filas como a columnas.

Se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto de matrices de dimensión $m\times n$.

- Se denomina *matriz nula* $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ a la que tiene todos sus elementos nulos:

- $$O_{mxn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $n = m$ la matriz es *cuadrada*; en caso contrario, es *rectangular*.

- En una matriz cuadrada, se llama *diagonal principal* a la línea de elementos de la forma a_{ii}.

- Una matriz cuadrada se dice que es *diagonal* si en ella son nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

- Se conoce como *matriz identidad* de orden n a la matriz diagonal:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$

- La matriz *suma* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tiene como elemento (i, j)

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ ,\ i = 1, \dots ,m, j = 1, \dots , n.$$

- La matriz $\lambda \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene como elemento (i, j)

$$\lambda\, a_{ij}\ ,\ i = 1, \dots ,m, j = 1, \dots , n.$$

- La matriz *producto* $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_{p\times n}$, resultado de multiplicar $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{p\times m}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, tiene como elemento (i, j)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj},\ \ i = 1,\dots, p,\ \ j = 1,\dots, n.$$

- Dada $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $i = 1, \dots ,m$, $j = 1, \dots , n$, se dice que

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij})\ , i = 1, \ldots ,m,\ j = 1, \ldots , n$$

es la *matriz traspuesta* de $\boldsymbol{A}$ si las filas de $\boldsymbol{B}$ son las columnas de $\boldsymbol{A}$ o, lo que es igual, las columnas de $\boldsymbol{B}$ son las filas de $\boldsymbol{A}$, es decir,

$$b_{ij} = a_{ji},\ , i = 1, \ldots ,n,\ j = 1, \ldots , m.$$

A la matriz traspuesta de $\boldsymbol{A}$ se la denota por $\boldsymbol{A}^t$.

Las operaciones matriciales poseen las siguientes propiedades:

1. Suma de matrices

   i) *Conmutativa*: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$.
   ii) *Asociativa*: $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$.
   iii) *Elemento neutro*: existe la matriz $\boldsymbol{O} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $\boldsymbol{A}+ \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ para cualquier $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
   iv) *Elemento opuesto*: para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, existe la matriz $-\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$. tal que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$.

2. Producto por un escalar

   i) *Distributiva respecto a la suma de matrices*: $\lambda\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\ \boldsymbol{A} + \lambda\ \boldsymbol{B}$.
   ii) *Distributiva respecto a la suma de escalares*: $(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\ \boldsymbol{A}$.
   iii) *Seudoasociativa*: $(\lambda\ \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\ (\mu\boldsymbol{A})$.
   iv) *Elemento unidad*: el escalar $1 \in \mathbb{R}$ es neutro para el producto: $1\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ para cualquier $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

3. Producto de matrices

Para cualesquiera $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ matrices de números reales cualesquiera tales que $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times p}$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D} \in \mathcal{M}_{q\times n}$ y $\boldsymbol{E} \in \mathcal{M}_{n\times r}$, el producto de matrices cumple:

   i) *Propiedad asociativa*: $\boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\ \boldsymbol{C}$.
   ii) Existen matrices $\boldsymbol{I}_m$ e $\boldsymbol{I}_p$ tales que para todo $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times p}$,

$$\boldsymbol{I}_m\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I}_p = \boldsymbol{A}$$

   iii) El producto de cualquier matriz $\boldsymbol{A}$ por una matriz nula $\boldsymbol{O}$ de la dimensión adecuada es una matriz nula.
   iv) El producto es *distributivo* respecto de la suma de matrices:

$$\boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{D}.$$
$$(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}\ \boldsymbol{E}.$$

El producto de matrices no es conmutativo.

4. Trasposición

Dadas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{M}_{m\times n}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbf{M}_{n\times p}$ y $\alpha \in \mathbf{R}$, se cumple que:

i) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}^t$ y $(\alpha \boldsymbol{A})^t = \alpha\ \boldsymbol{A}^t$
ii) $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{C})^t = \boldsymbol{C}^t \boldsymbol{A}^t$
iii) $(\boldsymbol{A}^t)^t = \boldsymbol{A}$.

Matriz inversa

Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbf{M}_n$, se dice que $\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathbf{M}_n$ es *inversa* de $\boldsymbol{A}$ si se cumple que:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n.$$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz $\boldsymbol{A}$ cuadrada de orden n se dice que es *regular* si posee inversa. En caso contrario, se dice que es *singular*.

Sean $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{M}_n$ matrices regulares. Se cumple que:

i) Si $\boldsymbol{A}$ es regular, su inversa es única.
ii) La matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$ es invertible y se tiene que $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.
iii) La matriz $\boldsymbol{AB}$ tiene inversa y $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
iv) Si $\boldsymbol{A}$ es regular y λ es un escalar no nulo, $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
v) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{t}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}})^{-1}$.

Operaciones elementales

Las *operaciones elementales* por filas en una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}$ permiten, entre otros aspectos, el cálculo de matrices inversas y estudiar el rango.

Se denominan operaciones elementales por filas en una matriz a las siguientes:

- Intercambiar dos filas f_i y f_j.
- Sustituir la fila f_i por ella misma multiplicada por un real $k \neq 0$: $k f_i$.
- Sustituir la fila f_i por $f_i + k f_j$ con $k \in \mathbf{R}$.

De igual forma se definen las operaciones elementales por columnas.

2. Determinantes

Dentro del conjunto de las matrices cuadradas se plantea la existencia de elemento inverso. Es decir, dada una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, ¿existe otra matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$?

Esto sólo es posible para determinadas matrices. Para establecer qué matrices admiten inversa, es necesario el concepto de *determinante*, válido sólo para matrices cuadradas. Permitirá calcular de forma efectiva el rango de una matriz cualquiera de dimensión $m\times n$.

Así, a toda matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden n se le asocia un valor numérico, el determinante de $\boldsymbol{A}$, denotado por det(A) o $|\boldsymbol{A}|$.

A continuación se recuerda cómo calcularlo. Esta definición permitirá abordar otros métodos de cálculo más sencillos. Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, se define el determinante de $\boldsymbol{A}$ como la suma de los $n!$ productos signados de n factores que se obtienen considerando los elementos de la matriz, de forma que cada producto contenga un elemento y sólo uno de cada fila y cada columna de $\boldsymbol{A}$. Es decir

$$|A| = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{s_k} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

donde

- $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ es una de las $n!$ permutaciones de los elementos del conjunto de números naturales $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- s_k es el número de trasposiciones o cambios necesarios para reordenar la permutación $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ en el orden de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Como consecuencia, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ el determinante de la matriz nula de orden n es cero y el de I_n es 1.

El determinante de una matriz cuadrada existe y es único.

Teniendo en cuenta la definición anterior, se calcula a continuación el **determinante de matrices de orden dos**, con lo que así se deducirán fórmulas ya conocidas. Dada

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

aplicando la definición anterior

$$|A| = (-1)^{s_1} a_{1j_1} a_{2j_2} + (-1)^{s_2} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

pues del conjunto $\{1, 2\}$ sólo existen las permutaciones:

$$\{j_1, j_2\} = \{1, 2\} \text{ o } \{j_1, j_2\} = \{2, 1\}.$$

Por tanto:

$$|A| = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

pues $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$ ya que $\{2, 1\}$ se transforma en $\{1, 2\}$ mediante un solo cambio.

Dada una **matriz de orden 3** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ son seis y, por tanto, el valor de $|\boldsymbol{A}|$ se calcula a partir de seis sumandos:

$$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - (a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31})$$

que se obtienen también aplicando la *regla de Sarrus*.

Para el caso de una **matriz de orden n > 3**, se definen previamente los siguientes conceptos. Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n

- Se denomina *menor complementario del elemento a_{ij}* de $\boldsymbol{A}$ para cada $i, j = 1, 2, \ldots, n$ al determinante de la matriz $\boldsymbol{M}_{ij}$ de orden $n - 1$ que resulta de $\boldsymbol{A}$ al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima.
- El *adjunto del elemento a_{ij}* para cada $i, j = 1, 2, \ldots, n$ que se denota por A_{ij} se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j} \mid \boldsymbol{M}_{ij} \mid$.

En el caso de una matriz de orden 3:

$$\begin{aligned}
|A| &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) = \\
&= a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) = \\
&= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}
\end{aligned}$$

También se tiene:

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = \\
&= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}
\end{aligned}$$

Se obtiene así la expresión del determinante en función del llamado desarrollo por adjuntos de una fila o de una columna. En general, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden n,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,,\ \textit{desarrollo por adjuntos de la fila } i$$

o

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\,,\ \textit{desarrollo por adjuntos de la columna } j$$

Independientemente de la fila o columna escogida, el valor obtenido no varía. Por tanto, el cálculo de $|A|$ se reduce a hallar el valor de n determinantes de orden $n-1$, lo que lleva sucesivamente a calcular finalmente determinantes de orden 2 ó 3.

Como el valor del determinante de una matriz es único**, es conveniente calcularlo efectuando el desarrollo por la línea de la matriz que tenga mayor número de ceros.**

A continuación se enumeran una serie de propiedades respecto a las operaciones entre líneas. Sea $A \in \mathbf{M}_n$ y $\lambda \in \mathbf{R}$. Se cumple:

i) Si en la matriz $\boldsymbol{A}$ se intercambian dos líneas paralelas, el determinante de la matriz obtenida es igual a $-|\boldsymbol{A}|$.

ii) Si se multiplican los elementos de una línea de la matriz $\boldsymbol{A}$ por un escalar λ, el valor del determinante también queda multiplicado por λ.

iii) Si $\boldsymbol{A}$ tiene todos los elementos de una línea nulos, el valor de $|\boldsymbol{A}|$ es cero.

iv) Si la matriz **A** tiene dos líneas paralelas proporcionales o iguales, $|\boldsymbol{A}| = 0$.

v) La suma de los productos de los elementos de una línea de $\boldsymbol{A}$ por los adjuntos de una línea paralela diferente es igual a cero.

vi) Si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha_{1j}+\beta_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha_{2j}+\beta_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_{nj}+\beta_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \beta_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Análogamente, si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{i1}+\beta_{i1} & \cdots & \alpha_{in}+\beta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \beta_{i1} & \cdots & \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vii) Si los elementos de una línea de $\boldsymbol{A}$ son combinación lineal de las otras paralelas a ella, $|\boldsymbol{A}| = 0$.

viii) Si en una matriz $\boldsymbol{A}$, a una de sus líneas se le suma una combinación lineal de las líneas paralelas, el determinante de la matriz resultante es también $|\boldsymbol{A}|$.

En lo que respecta a las operaciones matriciales, sean $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{M}_n$ y $\lambda \in \mathbf{R}$.

i) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

ii) Para cualquier $k \in \mathbf{N}$, $k \neq 0$, $|\boldsymbol{A}^k| = |\boldsymbol{A}|^k$.

iii) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$.

iv) $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^t|$.

En general no es cierto que $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ sea igual a $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$ ni que $|\lambda\ \boldsymbol{A}|$ coincida con $\lambda|\boldsymbol{A}|$.

De todo lo visto hasta ahora se puede deducir el siguiente teorema de suma importancia en el cálculo del rango de una matriz.

Teorema. Dada una matriz $A\in \mathcal{M}_n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es regular.

ii) $|A| \neq 0$.

Y si A es regular $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

El cálculo de determinantes permite obtener la inversa de una matriz regular $A\in \mathcal{M}_n$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}$$

donde $Adj\left(A^t\right)$ es la matriz formada por los adjuntos de los elementos de la matriz traspuesta de A.

3. Rango

Previamente a la definición de rango de una matriz, es necesario el siguiente concepto:

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Se llama *menor de orden r* de A al determinante de una submatriz cuadrada de A de orden r.

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define *rango de A*, rg(A), al máximo de los órdenes de sus menores no nulos.

Por otro lado sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Supóngase que A posee un menor de orden r no nulo. rg(A)=r si y sólo si todos los menores de orden r+1 que lo contienen son nulos.

Con la ayuda de este último resultado, se describe cómo calcular el rango de una matriz dada con la ayuda de los menores de la matriz.

Sea la matriz $\boldsymbol{A}$ de dimensión $m \times n$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Los pasos a seguir son los siguientes.

- Si $\boldsymbol{A}$ es la matriz nula, rg($\boldsymbol{A}$)=0.
- Si $\boldsymbol{A}$ es no nula, rg($\boldsymbol{A}$) $\geq$ 1.
- Si todos los menores de orden 2 de la matriz son nulos, rg($\boldsymbol{A}$) = 1. En caso, contrario, se escoge uno distinto de cero.
- Se amplía con una fila fija f_i y con sucesivas columnas. Si todos los menores de orden 3 así obtenidos son nulos, se sustituye f_i y se repite el proceso con otras filas. Si todos los menores de orden tres así construidos son nulos, rg($\boldsymbol{A}$) = 2. En caso contrario, existe al menos algún menor de orden 3 no nulo y se escoge para efectuar el siguiente paso.
- Se amplía el menor de orden 3 escogido con una fila fija y con sucesivas columnas, repitiendo el mismo proceso.
- Al final de todo el proceso se llega a un menor no nulo del mayor orden posible. Dicho menor se llama *menor principal de* $\boldsymbol{A}$ y su orden es el rango de $\boldsymbol{A}$.

Una definición alternativa de rango involucra el concepto de dependencia lineal de las líneas de la matriz.

- En una matriz $\boldsymbol{A}$ de dimensión $m \times n$, una fila f_i no nula *depende linealmente* de las filas $f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_m$ si

  $$f_i = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{i-1} f_{i-1} + \alpha_{i+1} f_{i+1} + \ldots + \alpha_m f_m,$$

  con $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{R}$.

- Las filas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son *linealmente independientes* si ninguna depende linealmente de las demás.

El rango de una matriz A de dimensión $m \times n$ es el número máximo de filas o de columnas linealmente independientes.

Se cumplen las siguientes propiedades:

i) El rango de una matriz permanece invariante por operaciones elementales.
ii) rg($\boldsymbol{A}$) = rg($\boldsymbol{A}^t$).
iii) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada de orden n
rg($\boldsymbol{A}$) < n si y sólo si $|\boldsymbol{A}| = 0$.
rg($\boldsymbol{A}$) = n si y sólo si $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

4. Sistemas de ecuaciones lineales

En las situaciones en las que se utilicen sistemas de ecuaciones lineales o no lineales linealizables, interesará conocer si dicho sistema tiene o no solución y, en caso de que exista, si ésta es o no única.

Por tanto, ante un sistema de ecuaciones lineales las dos cuestiones fundamentales a plantear son:

- Conocer si tiene solución y las características de la misma.
- Calcular la solución cuando existe.

Un *sistema de ecuaciones se dice que es lineal* si todas las ecuaciones que lo componen son lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es decir, son de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta \in \mathbf{R}$. Así pues, un sistema de m ecuaciones lineales y n variables o incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O abreviadamente:

$$\boldsymbol{Ax=b}$$

donde:

- $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensión $m \times n$, llamada la *matriz de coeficientes* del sistema,
- $\boldsymbol{x}$ es una matriz de dimensión $n \times 1$, la *matriz de variables o incógnitas*,
- $\boldsymbol{b}$ es una matriz de dimensión $m \times 1$, la *matriz de términos independientes* del sistema.

y todos ellos formados por números reales.

La matriz de dimensión $m\times(n+1)$ que se obtiene de $\boldsymbol{A}$ añadiendo como columna $n+1$ la matriz $\boldsymbol{b}$ se denomina *matriz ampliada del sistema* y se denota por $(\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{b})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Un sistema lineal se dice que es *homogéneo* cuando la matriz $\boldsymbol{b}$ de términos independientes es nula. En particular al sistema

$$\boldsymbol{Ax}= \boldsymbol{0}$$

se le conoce como *sistema homogéneo asociado* al sistema de la forma general

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} \neq 0.$$

Dado un sistema lineal, se dice que $\boldsymbol{x}^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ es solución del mismo si al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por los valores $x^*_1, \ldots, x^*_n$ se satisfacen las m ecuaciones, es decir,

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}.$$

Existencia de solución

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

es:

- *compatible* si admite al menos una solución.
- *incompatible* si no tiene solución.

En caso de existir solución para el sistema, éste es:

- *compatible determinado* si la solución es única.
- *compatible indeterminado* cuando hay infinitas soluciones.

Obsérvese que **todo sistema homogéneo es siempre compatible**, pues una solución es la llamada *solución trivial*:

$$x_1=x_2= \ldots = x_n=0$$

Es **compatible indeterminado si posee alguna solución no nula**. Además toda combinación lineal de soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo.

Dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si y sólo si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Sea el sistema lineal compatible

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\boldsymbol{x}^t \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. Se cumple que este sistema es equivalente al sistema

$$\boldsymbol{BAx} = \boldsymbol{Bb},$$

siendo $\boldsymbol{B}$ cualquier matriz regular de orden m.

Esta operación nos permite transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente que, eligiendo adecuadamente la matriz $\boldsymbol{B}$, puede resultar más sencillo que el inicial. En particular las modificaciones de un sistema lineal de ecuaciones que consisten en:

- permutar dos ecuaciones,
- multiplicar una ecuación por un escalar no nulo,
- sustituir una ecuación cualquiera, por la suma de ella misma con una combinación lineal de las restantes ecuaciones del sistema,

pueden realizarse premultiplicando ambos miembros del sistema de ecuaciones por una matriz regular de orden adecuado. Estas operaciones elementales dan lugar a sistemas de ecuaciones equivalentes.

Teorema de Rouché-Fröbenius. Dado un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, donde la matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ es de dimensión $m\times n$ y la matriz ampliada $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ es $m\times(n+1)$, se cumple que:

i) El sistema es incompatible si y sólo si $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.
ii) El sistema es compatible si y sólo si $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$; siendo, además, compatible determinado si y sólo si $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$ e indeterminado si y sólo si $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$.

Si el sistema lineal es homogéneo y $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = n$, su única solución es la trivial. Si $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) < n$, el sistema tiene infinitas soluciones, siendo siempre una de ellas $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$.

Métodos de resolución

Una vez estudiadas las condiciones necesarias y suficientes de existencia y unicidad de las soluciones de un sistema lineal, así como el comportamiento de dichas soluciones, el siguiente objetivo es el análisis de diferentes reglas o métodos de cálculo de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales.

Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se llama un *sistema de Cramer* si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero. Un sistema de Cramer es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Llamando $\boldsymbol{A}$ a la matriz de los coeficientes, $\boldsymbol{x}$ a la matriz columna de las incógnitas y $\boldsymbol{b}$ a la matriz columna de términos independientes,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

el sistema dado es equivalente a la ecuación matricial $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Puesto que $\boldsymbol{A}$ es regular por hipótesis, tiene inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$, y multiplicando a la izquierda por $\boldsymbol{A}^{-1}$, de la igualdad anterior resulta

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b},$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\left(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}\right) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

.....

$$x_n = \frac{1}{|A|}\left(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}\right) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Sistema general de ecuaciones lineales

Consideremos ahora un sistema general de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y consideremos sus matrices asociadas de coeficientes y ampliada con los términos independientes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A'} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La demostración del Teorema de Rouché-Fröbenius nos propociona un método de resolución.

Si el sistema es compatible, existe alguna solución $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$,… $x_n = \alpha_n$, en cuyo caso, la columna de términos independientes es combinación lineal de las restantes columnas de la matriz ampliada (con los coeficientes iguales a los valores de las incógnitas). Por lo tanto, se puede prescindir de la columna de términos independientes para calcular el rango de la matriz ampliada, resultando éste por lo tanto, igual al rango de la matriz de los coeficientes.

Recíprocamente, si las dos matrices ***A*** y ***A'*** tienen el mismo rango h, el máximo número de columnas linealmente independientes en ***A*** y en ***A'*** es h. Consideremos h columnas linealmente independientes de ***A*** (y de ***A'***). Las restantes columnas de ***A'*** (y de ***A***) son entonces combinaciones lineales de dichas h linealmente independientes. En particular, la columna de términos independientes es combinación lineal de esas h columnas de $\boldsymbol{A}$ y por lo tanto combinación lineal de todas las columnas de $\boldsymbol{A}$, esto es, el sistema admite solución.

Supongamos ahora que el sistema es compatible y por tanto rg($\boldsymbol{A}$) = rg($\boldsymbol{A}$') = h, y sea Δ un menor principal de $\boldsymbol{A}$, formado por la intersección de h filas y h columnas de $\boldsymbol{A}$. A las ecuaciones correspondientes a dichas filas las llamaremos ecuaciones principales; igualmente llamaremos incógnitas principales a las correspondientes a las h columnas del menor principal.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las ecuaciones principales son las h primeras, y también las incógnitas principales son las h primeras, pues alterando el orden de ellas se puede conseguir esa circunstancia.

Puesto que las filas no principales de la matriz $\boldsymbol{A}$' son combinaciones lineales de las principales, las ecuaciones no principales son consecuencia de las principales y podemos prescindir de ellas. Eliminadas dichas ecuaciones no principales nos queda un sistema equivalente al primero con h ecuaciones y n incógnitas. Si h=n, el sistema ahora obtenido será un sistema de Cramer y por lo tanto compatible determinado. Si $h < n$, existirán n-h incógnitas no principales a las que podemos asignar valores arbitrarios

$$x_{h+1} = \lambda_1 ; x_{h+2} = \lambda_2 ; \ldots ; x_n = \lambda_{n-h}$$

y pasando los términos así obtenidos al segundo miembro nos queda el sistema de h ecuaciones con h incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1h}x_h = b_1 - a_{1h+1}\lambda_1 - \cdots - a_{1n}\lambda_{n-h} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2h}x_h = b_2 - a_{2h+1}\lambda_1 - \cdots - a_{2n}\lambda_{n-h} \\ \vdots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \cdots + a_{hh}x_h = b_h - a_{hh+1}\lambda_1 - \cdots - a_{hn}\lambda_{n-h} \end{cases}$$

que tiene por determinante de la matriz de los coeficientes el menor principal $\Delta \neq 0$, por lo que es un sistema de Cramer que admite una solución. Tomando nuevos valores para las incógnitas no principales variarían los términos independientes del último sistema, y por tanto su solución. Como los valores de las incógnitas no principales se pueden tomar de infinitas formas, obtendremos infinitas soluciones, expresadas en función de los parámetros λ_1, λ_2, . . . , λ_{n-h} en que se convierten las incógnitas no principales. Así que el sistema será entonces compatible indeterminado.

Bibliografía

- Barbolla, R. y Sanz, P. (1998). *Álgebra lineal y teoría de matrices*. Ed. Prentice Hall.
- Caballero, R. E., Calderón, S. y Galache, T. P. (2000). *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa. 434 ejercicios resueltos y comentados*. Ed. Pirámide.
- Grossman, S. I. (1997). *Álgebra lineal*. Ed. McGraw-Hill.

- Haeussler Jr., Ernest F. y Paul, Richard S. (1987). *Matemáticas para administración y economía*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hernández, E. (1999). *Álgebra y geometría*. Ed. Addison-Wesley/U.A.M.
- Kolman, B. (1999). *Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab*. Ed. Prentice Hill.
- Martínez Salas. (1992). *Elementos de matemáticas*. Ed. Lex Nova.
- Sanz, P., Vázquez, F. J. y Ortega, P. (1998). *Álgebra lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive*. Ed. Prentice Hall.

(*) En este tema se ha utilizado como fuente, tanto para la estructuración de los contenidos como en la inclusión de algunos párrafos, el siguiente libro: *Álgebra lineal y teoría de matrices*. R. Barbolla y P. Sanz. Ed. Prentice Hall. (1998).