Matemáticas para Economistas

Parte I
Cálculo Diferencial en Varias Variables

Tema 2
Funciones Escalares y Vectoriales:
Derivadas Parciales y Diferenciabilidad

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Tema 2
Funciones Escalares y Vectoriales: Derivadas Parciales y Diferenciabilidad.

2.1 Derivadas Parciales, Vector Gradiente y Diferencial Total

2.2 Funciones Homogéneas

2.3 Regla de la Cadena

2.4 Derivadas de Orden Superior

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

2.1. Derivadas Parciales, Vector Gradiente y Diferencial Total

2.1.1 Derivadas Parciales

2.1.2 Aproximaciones de las Derivadas Parciales

2.1.3 Derivadas Parciales y Continuidad en Varias Variables

2.1.4 Vector Gradiente

2.1.5 Diferencial Total de una Función

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

2.1.1 Derivadas Parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\underline{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n\right)-f\left(\underline{x}\right)}{h}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\underline{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\underline{x}+h\underline{e}_i\right)-f\left(\underline{x}\right)}{h}}$$

2.1.2 Aproximación Derivadas Parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx f(x+1,y) - f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \approx f(x,y+1) - f(x,y)$$

2.1.3 Derivadas Parciales y Continuidad

En funciones de varias variables no existe relación entre la existencia de las derivadas parciales y la continuidad en un punto.

2.1.4 Vector Gradiente

$$\nabla f\left(\underline{x}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\underline{x}\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\underline{x}\right)\right)^T$$

2.1.5 Diferencial Total de una Función

$$\boxed{df(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}$$

La diferencial total de una función aproxima el incremento de una función.

$$\Delta f(x,y) = f_x(x,y)\,\Delta x + f_y(x,y)\,\Delta y$$

2.2. Funciones Homogéneas

$$f: \quad D \subseteq R^n \to R$$

Se dice que *f* es homogénea de grado *r*

si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ **y** $\forall \underline{x} \in D$.

tales que $\forall \lambda \underline{x} \in D$ **se verifica que**

$$\boxed{f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\right) = \lambda^r f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}$$

2.2. Funciones Homogéneas

$$f: \quad D \subseteq R^n \to R$$

con derivadas parciales continuas.

Teorema de Euler

a) f es homogénea de grado r

b) se verifica que

$$\boxed{x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = rf}$$

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

2.3. Regla de la Cadena

$$z = F(x, y)$$
$$x = f(t)$$
$$y = f(t)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = F_x(x, y)\frac{dx}{dt} + F_y(x, y)\frac{dy}{dt}}$$

2.4. Derivadas de Orden Superior

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}$$

2.4. Derivadas de Orden Superior

Matriz Hessiana

$$Hf\left(\underline{x}\right)=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Matemáticas para Economistas

Parte I
Cálculo Diferencial en Varias Variables

Tema 2
Funciones Escalares y Vectoriales:
Derivadas Parciales y Diferenciabilidad

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA