Matemáticas para Economistas

Parte II
Optimización Clásica y con Restricciones

Tema 5
Optimización sin Restricciones

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5 Optimización sin Restricciones

5.1 Optimización sin Restricciones con una variable de decisión

5.2 Optimización sin Restricciones con *n* variables de decisión

5.1 Optimización sin Restricciones con una variable de decisión

5.1.1 Condición Necesaria de Óptimo Local

5.1.2 Condición Suficiente de Óptimo Local

5.1.3 Alternativa para Identificar un Óptimo Local

5.1.4 Concavidad y Convexidad en Funciones de una Variable

5.1.5 Optimización Global en Funciones de una Variable

5.1.1 Condición Necesaria de Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R \to R$$

función real de variable real con derivada continua en el abierto *D*

Si *f* admite un óptimo local en el punto $x_0 \in D$ **,**
entonces $f'(x_0) = 0$ **.**

5.1.2 Condición Suficiente de Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R \rightarrow R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*, y x_0 un punto crítico de *f*,

Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ ***f* tiene un máximo local en x_0.**

Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ ***f* tiene un mínimo local en x_0.**

Si $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ **¿?**

5.1.3 Alternativa para Identificar un Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R \rightarrow R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*, y x_0 un punto crítico de *f*,

Si $f''(x) > 0$ **en un intervalo (a, x_0) a la izquierda de x_0**
y $f''(x) < 0$ **en un intervalo (x_0, b) a la derecha de x_0,**
entonces *f* tiene un máximo local en el punto x_0.

5.1.3 Alternativa para Identificar un Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R \rightarrow R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*, y x_0 un punto crítico de *f*,

Si $f''(x) < 0$ **en un intervalo (a, x_0) a la izquierda de x_0**

y $f''(x) > 0$ **en un intervalo (x_0, b) a la derecha de x_0,**

entonces *f* tiene un mínimo local en el punto x_0.

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5.1.3 Alternativa para Identificar un Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R \rightarrow R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*, y x_0 un punto crítico de *f*,

Si $f''(x) > 0$ **en un intervalo (a, x_0) a la izquierda de x_0**

y $f''(x) > 0$ **en un intervalo (x_0, b) a la derecha de x_0,**

entonces *f* no tiene un óptimo local en el punto x_0.

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5.1.3 Alternativa para Identificar un Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R \rightarrow R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*, y x_0 un punto crítico de *f*,

Si $f''(x) < 0$ **en un intervalo (a, x_0) a la izquierda de x_0**
y $f''(x) < 0$ **en un intervalo (x_0, b) a la derecha de x_0,**
entonces *f* no tiene un óptimo local en el punto x_0.

5.1.4 Concavidad y Convexidad: Funciones de una Variable

$$f: \quad D \subseteq R \rightarrow R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*, y $(a,b) \in D$ **un intervalo abierto**

Si $f''(x) < 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ ***f*** **es cóncava en dicho intervalo**

Si $f''(x) > 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ ***f*** **es convexa en dicho intervalo**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5.1.5 Optimización Global en Funciones de una variable

$$f: \quad D \subseteq R \to R$$

función real de variable real con derivadas continuas de orden uno y dos en el abierto *D*

Si *f* es cóncava en el dominio abierto *D*, un máximo local de *f* en *D* es máximo global.

Si *f* es convexa en el dominio abierto *D*, un mínimo local de *f* en *D* es mínimo global.

5.2 Optimización sin Restricciones con *n* variables de decisión

5.2.1 Condición Necesaria de Óptimo Local

5.2.2 Test de las Derivadas Segundas en Funciones de Dos Variables

5.2.3 Óptimos Locales en Funciones de *n* Variables

5.2.4 Optimización Global en Funciones de *n* Variables

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5.2.1 Condición Necesaria de Óptimo Local

$$f: \quad D \subseteq R^n \to R$$

función real de *n* variables reales con derivadas parciales continuas en el abierto *D*

Si *f* admite un óptimo local en el punto $\underline{x}_0 \in D$ **,**
entonces $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$ **.**

5.2.2 Test de las Derivadas Segundas en Funciones de Dos Variables

$$f: \quad D \subseteq R^2 \rightarrow R$$

función real de *dos* variables reales con derivadas parciales continuas hasta orden dos en el abierto *D*, con $\underline{x}_0$ un punto crítico de *f*, y *H* el determinante de la matriz Hessiana en $\underline{x}_0$

- **Si *H>0* y $f_{xx}(\underline{x}_0)<0$, *entonces f tiene un máximo local en* $\underline{x}_0$**
- **Si *H>0* y $f_{xx}(\underline{x}_0)>0$, *entonces f tiene un mínimo local en* $\underline{x}_0$**
- **Si *H<0, entonces f tiene un punto de silla en* $\underline{x}_0$**
- **Si *H=0, entonces* $\underline{x}_0$ puede ser máximo local, mínimo local o punto de silla.**

5.2.3 Óptimos Locales en Funciones de n Variables

$$f: \quad D \subseteq R^n \to R$$

función real de *n* variables reales con derivadas parciales continuas hasta orden dos en el abierto *D*, con $\underline{x}_0$ un punto crítico de *f*, y *Hf*($\underline{x}_0$) *la* matriz Hessiana de f en $\underline{x}_0$

- **Si *Hf*($\underline{x}_0$) es definida positiva*, entonces f tiene un máximo local en* $\underline{x}_0$**
- **Si *Hf*($\underline{x}_0$) *es definida negativa, entonces f tiene un mínimo local en* $\underline{x}_0$**
- **Si *Hf*($\underline{x}_0$) *es indefinida, entonces f tiene un punto de silla en* $\underline{x}_0$**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5.2.4 Optimización Global en Funciones de n Variables

$$f: \quad D \subseteq R^n \to R$$

función real de *n* variables reales con derivadas parciales continuas hasta orden dos en el abierto *D,* y *Hf($\underline{x}$) la* matriz Hessiana en f:

- **f es convexa si *Hf($\underline{x}$)* es semidefinida positiva o definida positiva en todo valor** $\underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{D}$
- **f es estrictamente convexa si *Hf($\underline{x}$)* es definida positiva** $\forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{D}$
- **f es cóncava si *Hf($\underline{x}$)* es semidefinida negativa o definida negativa en todo valor** $\underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{D}$
- **f es estrictamente cóncava si *Hf($\underline{x}$)* es definida negativa** $\forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{D}$

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

5.2.4 Optimización Global en Funciones de n Variables

$$f: \quad D \subseteq R^n \rightarrow R$$

función real de *n* variables reales con derivadas parciales continuas hasta orden dos en el abierto *D*:

- **Si *f* es convexa en el abierto *D*, entonces los mínimos locales de *f* en *D*, en caso de existir, son mínimos globales**
- **Si *f* es estrictamente convexa en el abierto *D*, entonces los mínimos locales de *f* en *D*, en caso de existir, son mínimos globales estrictos**
- **Si *f* es cóncava en el abierto *D*, entonces los máximos locales de *f* en *D*, en caso de existir, son máximos globales**
- **Si *f* es estrictamente cóncava en el abierto *D*, entonces los máximos locales de *f* en *D*, en caso de existir, son máximos globales estrictos**

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Matemáticas para Economistas

Parte II
Optimización Clásica y con Restricciones

Tema 5
Optimización sin Restricciones

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA