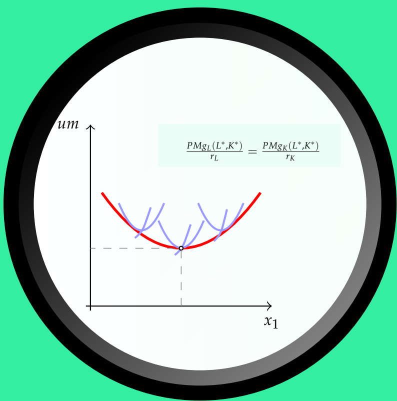
Microeconomía I

Microeconomía I

Tema 7.-
Tecnología y costes de producción: el largo plazo



Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice

En este tema seguimos estudiando los costes de la empresa. Al igual que ocurría en el corto plazo, los costes de producción a largo vienen determinados por las condiciones tecnológicas —en tanto que determinantes de las métodos de producción al alcance de la empresa– y los precios de los factores, sobre los que seguimos suponiendo que la empresa se limita a aceptar los vigentes en los mercados sin tener capacidad alguna de control. En la primera parte del tema se aborda la forma de representar y caracterizar la posibilidades de producción a largo plazo. Utilizando los resultados obtenidos, en la segunda parte se analiza la forma de las funciones de costes a largo plazo, así como su relación con las de corto.

7.1 Posibilidades tecnológicas a largo plazo

7.1.1 La función de producción a largo plazo y las isocuantas

A largo plazo la empresa ya puede ajustar las cantidades empleadas de todos los factores para obtener el volumen de producción deseado. La **función de producción a largo plazo** asigna a cada combinación de factores la máxima cantidad de *output* que se puede obtener con ellos. En nuestro modelo sencillo con dos únicos factores esta función será de la forma:

$$x_1 = f(L, K). \tag{7.1}$$

A partir de dicha función se definen las **funciones de productividad media y productividad marginal** para cada uno de los factores:

$$\boxed{PMe_L(L, K) = \frac{f(L, K)}{L}; \quad PMg_L(L, K) = \frac{\partial f}{\partial L}(L, K);} \tag{7.2}$$

$$\boxed{PMe_K(L, K) = \frac{f(L, K)}{K}; \quad PMg_K(L, K) = \frac{\partial f}{\partial K}(L, K).} \tag{7.3}$$

A diferencia de lo que ocurría a corto plazo, la cantidad de capital es una variable más, cuyo valor elige la empresa. En adelante, si no se dice lo contrario, supondremos siempre que estas funciones son continuas y diferenciables en todos los puntos de su dominio. [1].

Las posibilidades de producción de la empresa también pueden recogerse gráficamente a partir del denominado **mapa de posibilidades de producción**. Este mapa esta formado por un conjunto de curvas de nivel denominadas isocuantas. Cada una de ellas representa las distintas combinaciones de factores que permiten obtener una determinada cantidad de pro-

[1] Al hacer estos supuestos estamos considerando que las cantidades de factores son perfectamente divisibles y que ante pequeños cambios en las cantidades de factores producen pequeños cambios en la producción de forma que la función de producción no tiene *saltos* ni *esquinas*.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

ducto. A partir de la función de producción se define una **isocuanta** como:

$$\boxed{IQ(x_1^0) = \{(L, K) : f(L, K) = x_1^0\}.} \tag{7.4}$$

Las propiedades de la función de producción se reflejarán en la forma de las isocuantas. Además, si suponemos que las empresas producen de manera eficiente desde el punto de vista técnico (no derrochan recursos) sólo será relevante el tramo decreciente de las isocuantas, ya que el tramo creciente de una isocuanta representaría una situación en la que para obtener un mismo nivel de producción se utilizan mayores cantidades de ambos factores. El mismo supuesto de eficiencia técnica implica que las isocuantas no se pueden tocar ni cortar.

La relación marginal de sustitución técnica de capital por trabajo

Supongamos que la empresa esta utilizando inicialmente una determinada combinación de factores (L^1, K^1) y nos preguntamos cuanto capital podrá sustituir (dejar de utilizar) si dispusiese de una determinada cantidad adicional de trabajo. La respuesta a dicha pregunta nos llevaría a un nueva combinación de factores, (L^2, K^2), la cual, por definición, pertenecería a la misma isocuanta que (L^1, K^1). El cociente de incrementos $\frac{\triangle K}{\triangle L} \equiv \frac{K^2 - K^1}{L^2 - L^1}$ nos informa sobre el número medio de unidades de capital que sustituye cada una de las unidades adicionales de trabajo. Si una vez esta utilizando la combinación de factores (L^2, K^2) incrementásemos la cantidad de trabajo hasta L^3 , podríamos calcular de nuevo el número medio de unidades de capital que sustituye cada unidad adicional de trabajo. En ambos casos hemos calculado lo que podríamos llamar **tasa media de sustitución de capital por trabajo**, la cual vendrá determinada por las características de la tecnología. Podemos apreciar que la convexidad de la isocuanta supone que dicha tasa media disminuye a medida nos movemos por la misma hacia abajo y hacia la derecha: a medida que el método de producción utilizado es más intensivo en trabajo, la cantidad de capital que sustituye cada unidad adicional de trabajo es más pequeña.

Si el cociente de incrementos nos informa sobre la tasa media a la que la empresa puede sustituir capital por trabajo, la derivada, en tanto que límite de dicho cociente, nos informa sobre las posibilidades marginales de sustitución. Dada una combinación de factores cualquiera (L, K), se define la **relación marginal de sustitución de capital por trabajo** en dicho punto, $RMST_L^K(L, K)$, como:

$$\boxed{RMST_L^K(L, K) = \lim_{\triangle L \to 0} -\frac{\triangle K}{\triangle L}\bigg|_{IQ} \equiv -\frac{dK}{dL}\bigg|_{IQ}(L, K).} \tag{7.5}$$

El valor de la $RMST_L^K(L, K)$ nos informa, pues, sobre la **tasa marginal** a la que la empre-

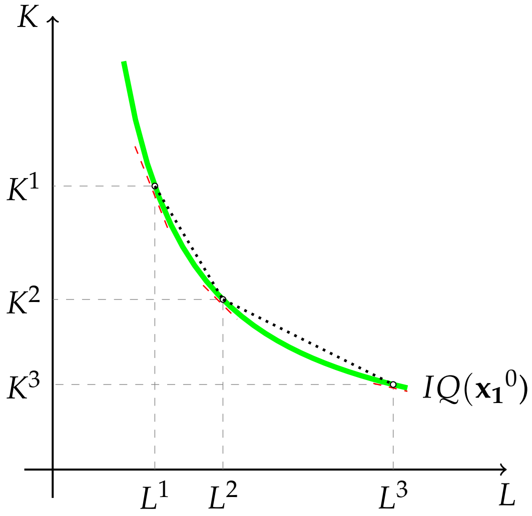


Figura 7.1. ***Convexidad de las isocuantas.*** La cantidad x_1^0 se esta obteniendo inicialmente con la combinación de factores (L^1, K^1). Si aumentamos la cantidad L hasta L^2 la empresa podrá dejar de utilizar $K^2 - K^1$ unidades de capital siendo $\frac{K^2-K^1}{L^2-L^1}$ la tasa media de sustitución de capital por trabajo. Si considerásemos a continuación el paso de producir con (L^2, K^2) a producir con (L^3, K^3) y calculásemos de nuevo la tasa media de sustitución veríamos que esta disminuye. La menor pendiente de la isocuanta a medida que nos desplazamos por ella hacia abajo y hacia la derecha es una forma más directa de apreciar lo mismo: la convexidad de las isocuantas refleja que cuanto más intensivo en trabajo sea el método de producción que estamos empleando, menos capital podremos sustituir con cada unidad adicional de trabajo.

sa puede sustituir capital por trabajo, dada la combinación de factores que esta utilizando actualmente.

Al igual que ocurría en la teoría del consumidor con la $RMS_1^2(x_1, x_2)$, resulta inmediato comprobar que, en términos geométricos, el valor de la $RMST_L^K(L, K)$ no es sino el valor absoluto de la pendiente de la isocuanta en dicho punto. Si las isocuantas son convexas, la pendiente en valor absoluto, y por tanto la $RMST_L^K(L, K)$, disminuye cuando nos movemos por ellas hacia abajo y hacia la derecha. Ya estamos en condiciones de dar sentido económico al axioma de convexidad en términos de la $RMST_L^K(L, K)$. **La convexidad de las isocuantas puede interpretarse en términos de $RMST_L^K(L, K)$ decreciente**: a medida que la empresa esta utilizando métodos de producción más intensivos en trabajo el número de unidades de capital que sustituirá cada unidad adicional de trabajo será cada vez menor.

Ejercicio 7.1.1 *¿Qué forma tendrían las isocuantas si la $RMST_L^K(L, K)$ fuese constante con independencia de la combinación de factores que se estuviese utilizando? ¿Y si fuese creciente?*

El valor de la $RMST_L^K(L, K)$ lo podemos obtener directamente a partir de la función de producción de largo plazo $x_1 = f(L, K)$ como el cociente de productividades marginales. Para demostrarlo, consideremos una combinación de factores inicial (L^1, K^1); si variamos en una cantidad *infinitesimal* la cantidad de ambos factores podemos aproximar la variación en el nivel de producción por el diferencial:

$$dx_1 = \frac{\partial f}{\partial L}(L^1, K^1)dL + \frac{\partial f}{\partial K}(L^1, K^1)dK.$$

Si realizamos los cambios en las cantidades empleadas de factores de tal forma que el nivel de producción no varíe, se deberá cumplir que $dx_1 = 0$, por lo que tendremos que:

$$\boxed{RMST_L^K(L^1, K^1) = \frac{PMg_L(L^1, K^1)}{PMg_K(L^1, K^1)}.} \tag{7.6}$$

7.1.2 Rendimientos a escala

En el apartado anterior analizamos las posibilidades de sustitución de un factor por el otro. La otra característica más importante de la tecnología en el largo plazo es la manera en que responde la producción ante aumentos en las cantidades empleadas de todos los factores, lo que se conoce como cambios de escala. A modo de ejemplo, supongamos que la empresa esta empleando una determinada combinación de factores (L^1, K^1) y nos planteamos como respondería la producción ante un aumento del 10 % en las cantidades empleadas de ambos factores. Si la producción responde con un aumento también del 10 % diríamos que la tecnología presenta rendimientos constantes a escala para ese nivel de producción, si aumentase más del 10 % que presenta rendimientos crecientes a escala y si lo hiciese en menos de ese porcentaje que presenta rendimientos decrecientes a escala.

En los modelos económicos se utilizan en muchas ocasiones funciones de producción que presentan el mismo tipo de rendimientos a escala con independencia de las cantidades de factores que consideremos. Para este tipo de funciones se define[2]:

Rendimientos constantes a escala: $f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L, K)$, para todo $\lambda > 0$;

Rendiemientos crecientes a escala: $f(\lambda L, \lambda K) > \lambda f(L, K)$, para todo $\lambda > 1$;

Rendimientos decrecientes a escala: $f(\lambda L, \lambda K) < \lambda f(L, K)$, para todo $\lambda > 1$.

[2]Alternativamente se puede definir el tipo de rendimientos a escala utilizando el concepto matemático de función homogénea. Dada una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se dice que es una función homogénea de grado r si se cumple que $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $\lambda > 0$ y donde r se conoce como grado de homogeneidad de la función. Puede apreciarse a primera vista que una función de producción homogénea presenterá el mismo tipo de rendimientos a escala en todos sus puntos (sea cual sea la combinación de factores que consideremos) y que el tipo de rendimientos vendrá dado por su grado de homogeneidad: rendimientos constantes si es homogénea de grado 1, crecientes si lo es de grado $r > 1$ y decrecientes si lo es de grado $r < 1$.

7.1.3 Algunos ejemplos de funciones de producción

Función de producción Cobb-Douglas

Adopta la forma general,

$$\boxed{x_1 = AL^{\alpha}K^{\beta},} \tag{7.7}$$

donde A, α y β son constantes positivas. Es muy importante tener que en cuenta que en tanto que función de producción no cumple determinadas propiedades que si tenía como función de utilidad. En concreto, ya no es verdad que una transformación monótona recoja la misma tecnología, por lo que debemos mantener el parámetro A —que sea mayor o menor determinará que la cantidad de producto sea más o menos elevada para unas cantidades dadas de factores— y no podemos hacer transformaciones que lleven a otra función en la que los exponentes sumen la unidad (ya hemos visto en el Ejercicio 7.5 que la suma de los exponentes recoge el tipo de rendimientos a escala).

Las funciones de productividad media y productividad marginal del trabajo serán de la siguiente forma:

$$PMe_L(L,K) = \frac{AL^{\alpha}K^{\beta}}{L} = AL^{\alpha-1}K^{\beta}; \qquad PMg_L(L,K) = \frac{\partial AL^{\alpha}K^{\beta}}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}.$$

Si se deriva parcialmente cada una de estas dos funciones respecto de L se observa que el crecimiento o decrecimiento de las mismas depende únicamente del valor de α. Así, si $\alpha < 1$ ambas funciones serán decrecientes en todo su dominio. Resulta inmediata la obtención de las correspondientes funciones de productividad media y productividad marginal para el capital,

$$PMe_K(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta-1}; \qquad PMg_K(L,K) = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}.$$

En este caso el decrecimiento de ambas funciones en todo su dominio se producirá si $\beta < 1$. Dadas las funciones de productividad marginal, la $RMST_L^K(L,K)$ se obtiene como el cociente entre ambas:

$$RMST_L^K(L,K) = \frac{PMg_L(L,K)}{PMg_K(L,K)} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L}.$$

Haciendo la derivada parcial de esta expresión respecto de L:

$$\frac{\partial RMST_L^K(L,K)}{\partial L} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{dK}{dL}L - K}{L^2} < 0 \quad \forall (L,K),$$

ya que al movernos a lo largo de una isocuanta sabemos que $\frac{dK}{dL}(L,K) = -RMST(L,K) = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K} < 0$. Y ya sabemos que si la $RMST_L^K$ es decreciente las isocuantas serán convexas.

Puede comprobarse también que el valor de dicha $RMST_L^K$ se mantiene constante a lo largo de cualquier *rayo* que parta del origen. Para comprobarlo basta con tener en cuenta que a lo

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

largo de cualquier recta que parta del origen el cociente $\frac{K}{L}$ se mantiene constante. A modo de ejemplo, a lo largo de la diagonal principal $RMST_L^K = \frac{\alpha}{\beta}$, ya que en todos sus puntos $\frac{K}{L} = 1$. Al igual que ocurría en el caso de las funciones de utilidad, cuando una función cumple esta propiedad se dice que es **homotética**. En términos geométricos esto supone que las curvas de indiferencia que genera son *muy regulares*, en el sentido de que su pendiente permanece constante si nos movemos por una recta que parta del origen (Figura **??**).

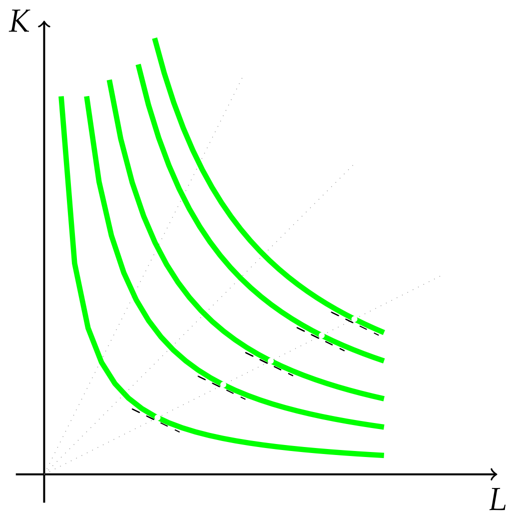


Figura 7.2. ***La función Cobb-Douglas genera un mapa de isocuantas homotético.*** Todas las isocuantas generadas por una función de producción Cobb-Douglas tienen la misma pendiente a lo largo de un radiovector.

Función de producción de coeficientes fijos o *de Leontieff*

Como ya sabemos de la teoría del consumidor, este tipo de función recoge la complementariedad perfecta, en este caso entre los factores L y K. Adopta la forma general,

$$\boxed{x_1 = \text{mín}\{\alpha L, \beta K\},} \tag{7.8}$$

en donde α, β son constantes positivas. Sabemos también que se trata de una tecnología *no regular*, en el sentido de que las isocuantas no presentarán la forma habitual (no serán decrecientes y convexas). El grado de sustituibilidad entre los factores es nulo, siendo necesario combinar cada unidad de trabajo con $\dfrac{\alpha}{\beta}$ unidades de capital.

Ejercicio 7.1.2 *Determine la forma de las isocuantas que genera la función de producción* $x_1 = \text{mín}\{2L, K\}$

Función de producción con factores sustitutivos perfectos

Se trata de otro caso de tecnología no regular, en el cual la función de producción recogería la situación, poco realista, en que los factores fuesen perfectamente sustitutivos entre sí. La

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

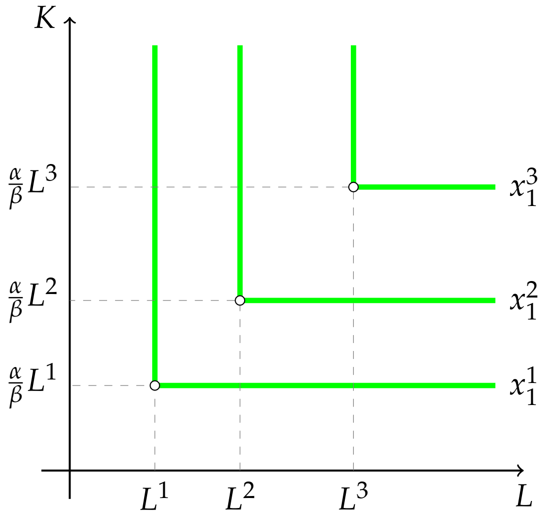


Figura 7.3. ***Tecnología Leontieff o de coeficientes fijos.*** Con este tipo de tecnología no existe posibilidad alguna de sustituir un factor por otro, cada unidad de L siempre ha de ir acompañada por $\frac{\alpha}{\beta}$ unidades de capital.

función de producción adoptaría la forma,

$$\boxed{x_1 = aL + bK,} \tag{7.9}$$

siendo a y b constantes positivas que recogen la productividad marginal (constante) del trabajo y del capital, respectivamente. Las isocuantas que genera serían líneas rectas paralelas con pendiente $-\frac{a}{b}$.

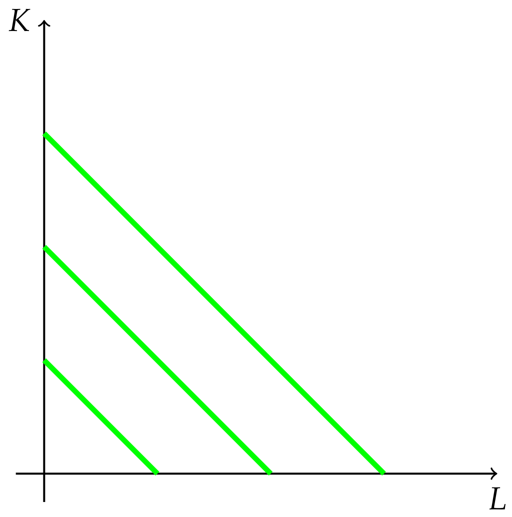


Figura 7.4. ***Sustitución perfecta entre los factores.*** Con este tipo de tecnología existiría siempre la posibilidad de sustituir unidades de L por unidades de K a una tasa igual al valor absoluto de la pendiente de las isocuantas.

Ejercicio 7.1.3 *Determine la forma de las isocuantas que genera la función de producción* $x_1 = 2L + K$.

7.2 Los precios de los factores y la trayectoria de expansión de la empresa

7.2.1 Las líneas isocoste y la elección de la combinación óptima de factores

Sea cual sea el volumen de producción que desee producir la empresa, x_1^a, la maximización de beneficios tiene como condición necesaria el que dicho volumen de producción sea obtenido al menor coste posible. Bajo el supuesto de que los precios de los factores están dados, la minimización del coste necesario para obtener un determinado volumen de producción requiere la elección de la combinación de factores más barata de entre todas aquellas que permiten obtener dicho nivel de producción. En términos más formales podemos plantear el problema de elección al que se enfrenta la empresa como:

$$\min_{L,K} r_L L + r_K K \tag{7.10}$$

$$\text{s.a.} \quad f(L,K) = x_1^a, \tag{7.11}$$

donde x_1^a es el volumen de producción que desea obtener la empresa.

Al igual que hacíamos en la teoría del consumidor, podemos intentar caracterizar la solución de este programa en términos geométricos. Para ello es necesario recurrir a la representación de la función objetivo mediante curvas de nivel, a las cuales denominaremos isocostes. Como su propio nombre indica, una isocoste recogerá todas aquellas combinaciones de factores que suponen el mismo coste para la empresa:

$$\boxed{IC(c^0) = \{(L,K) : r_L L + r_K K = c^0\} = \{(L,K) : K = \frac{c^0}{r_K} - \frac{r_L}{r_K} L\}.} \tag{7.12}$$

La determinación de la combinación de factores óptima supone buscar el punto de la isocuanta correspondiente a un nivel de producción x_1^a que permite situarnos en la isocoste más próxima al origen posible.

Como puede apreciarse en la Figura 7.5 la minimización de costes supone la tangencia entre la isocuanta correspondiente a x_1^a y una isocoste, condición que podemos poner como:

$$\boxed{\left.\frac{dK}{dL}\right|_{IQ}(L^*,K^*) = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{IC}(L^*,K^*) \Leftrightarrow RMST_L^K(L^*,K^*) = \frac{r_L}{r_K}.} \tag{7.13}$$

La condición de tangencia equivale, por tanto, a afirmar que la empresa elegirá una combinación de factores tal que se cumplirá la igualdad entre la tasa a la que se pueden cambiar los factores en el mercado, dada por el cociente $\frac{r_L}{r_K}$, y la tasa marginal de sustitución determinada por la tecnología, dada por la $RMST_L^K(L^*,K^*)$. La condición anterior también se

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

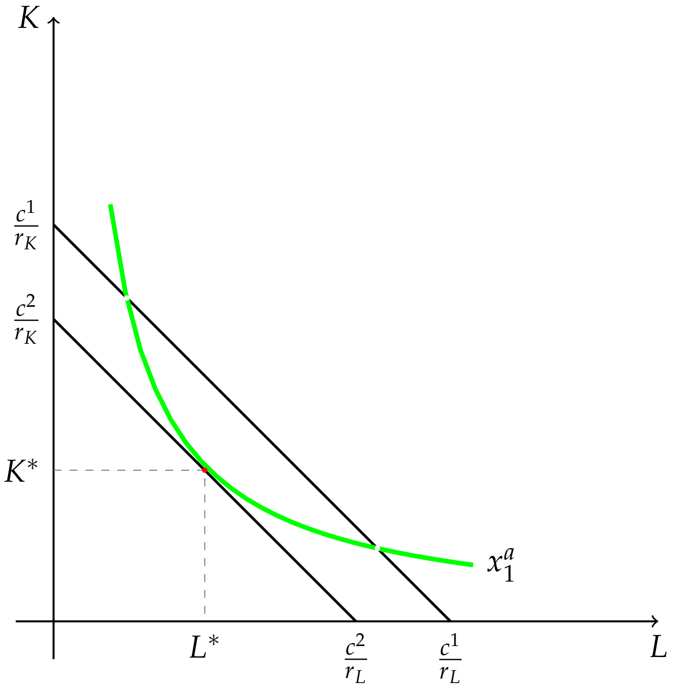


Figura 7.5. ***Combinación de factores que minimiza el coste de obtener x_1^a.*** Si la empresa desea producir la cantidad x_1^a, la combinación de factores es la que le permite situarse en la isocoste más próxima al origen: (L^*, K^*) minimiza el coste de obtener x_1^a.

puede expresar como $\dfrac{PMg_L(L^*,K^*)}{PMg_K(L^*,K^*)} = \dfrac{r_L}{r_K}$ o, más habitualmente, como:

$$\boxed{\frac{PMg_L(L^*,K^*)}{r_L} = \frac{PMg_K(L^*,K^*)}{r_K}.} \tag{7.14}$$

La interpretación de esta última expresión es que la productividad marginal de la última unidad monetaria invertida en cada uno de los factores debe ser la misma.

Al igual que ocurría en el caso de la elección de la cesta de bienes óptima por parte del consumidor, la condición de tangencia constituye una condición necesaria y suficiente siempre que la tecnología sea regular (isocuantas convexas) y la solución sea interior (se empleen cantidades de los dos factores).

Ejercicio 7.2.1 *Dada la función de producción $x_1 = 10LK - L^2 - 5K^2$ y suponiendo que $r_K = 10$ um y $r_L = 2$ um , se pide:*

1. *El coste mínimo de producir 160.000 unidades del bien 1.*
2. *La cantidad máxima de producto que se puede obtener si se dispone de 320 um .*

También podríamos resolver el programa 7.2.1 aplicando el método de Lagrange.

Ejercicio 7.2.2 *Compruebe que la aplicación del método de Lagrange al programa 7.2.1 es equivalente a la aplicación de la condición de* tangencia *entre una isocoste y la isocuanta correspondiente al nivel de producción que se desea obtener.*

Por último, podríamos plantearnos como sería la elección óptima en el caso de tecnologías no regulares, en particular la tecnología tipo Leontieff y el caso de factores sustitutivos perfectos, para lo cual nos remitimos al Ejercicio 7.2.3

Ejercicio 7.2.3 *Determine la combinación de factores óptima de la empresa cuando los precios de los mismos son r_L y r_K y las posibilidades tecnológicas vienen dadas por:*

1. $x_1 = \min\{\alpha L, \beta K\}$
2. $x_1 = aL + bK$

7.2.2 La trayectoria de expansión

La condición $RMST_L^K(L^*, K^*) = \frac{r_L}{r_K}$ ha de cumplirse sea cual sea el nivel de producción deseado por la empresa. A las combinaciones óptimas de factores para cada posible nivel de producción se le denomina **trayectoria de expansión** de la empresa.

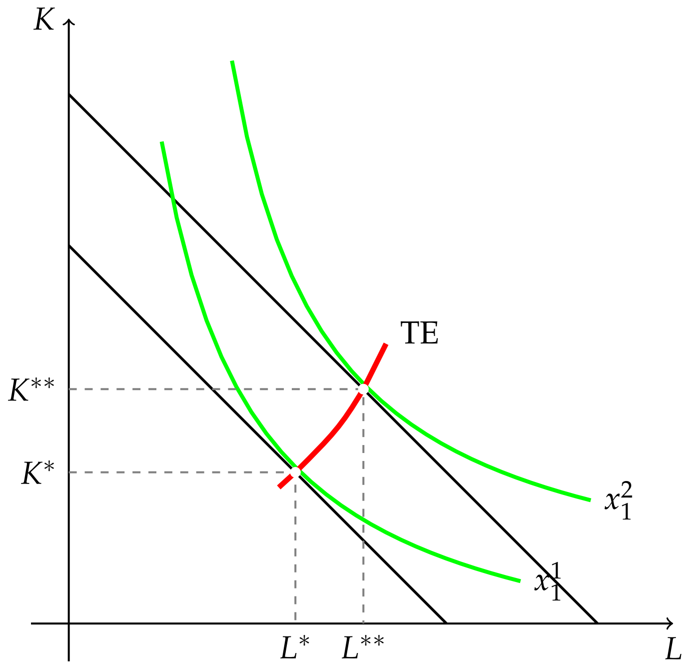


Figura 7.6. ***La trayectoria de expansión de la empresa (TE).*** La combinación óptima de factores para cada posible nivel de producción, manteniendo constantes los precios de los factores r_L y r_K, se denomina trayectoria de expansión de la empresa.

Dado que consideramos los precios de los factores como constantes, la forma de la trayectoria de expansión depende únicamente de la tecnología.

Ejercicio 7.2.4 *Recoja en un gráfico el efecto sobre la trayectoria de expansión de la empresa de un aumento de r_L.*

Ejercicio 7.2.5 *Determine la forma de la trayectoria de expansión para el caso de la función de producción Cobb-Douglas.*

7.3 Los costes de producción a largo plazo

7.3.1 Economías y deseconomías de escala

En la pregunta anterior hemos caracterizado las posibilidades tecnológicas de la empresa a largo plazo. En dicho horizonte temporal la empresa puede, por definición, ajustar las cantidades empleadas de todos los factores. Puede considerarse el **largo plazo**, por tanto, como un **horizonte de planificación**, en el cual l**a empresa toma decisiones sobre su escala o *tamaño de planta***. Una vez elegido un determinado tamaño de planta, la empresa a corto plazo sólo podra ajustar la producción mediante cambios en las cantidades empleadas de los factores variables. En términos de nuestro modelo con dos factores, podríamos decir que la variable K representa el tamaño de planta y la variable L la cantidad de factores variables.

Resulta natural, por tanto, comenzar el estudio de los costes a largo plazo preguntándonos por la relación existente entre la escala de producción que elija la empresa y sus costes por unidad. Para hacer referencia a la relación entre el coste medio y el tamaño de la empresa se utiliza en economía el concepto de **economías (deseconomías) de escala**[3]. Un determinado proceso productivo se dice que presenta economías (deseconomías) de escala cuando los aumentos del tamaño de la empresa van asociados con disminuciones (aumentos) del coste medio de producción. La influencia del tamaño de la empresa sobre su coste unitario de producción puede darse a través de distintos canales:

1. Economías de escala de orígen tecnológico:
   - Ventajas derivadas de la división del trabajo y especialización productiva, facilitadas ambas por la producción a gran escala;
   - Ventajas derivadas de la existencia de factores cuasifijos y de indivisibilidades en el uso de la maquinaria y el equipo;
   - Disminución de los costes por unidad asociados a la presencia de costes cuasifijos (asociados a la gestión, la comercialización,. . .);
   - Disminución de los costes por unidad como resultado del aprendizaje («learning by doing»).
   - . . .
2. Economías de escala pecuniarias: el mayor tamaño de la empresa se puede traducir en un mayor poder de negociación lo que le permitirá obtener mejores precios para sus

[3]No se deben confundir los conceptos de rendimientos a escala y de economías de escala. El primero de ellos hace referencia a la tecnología de producción, mientras que el segundo es más general y hace referencia a la relación entre la escala de producción y el coste medio. Podríamos decir que la presencia de rendimientos a escala es una fuente de economías de escala, pero no la única.

inputs, mejores condiciones de financiación,...

El crecimiento de las empresas también puede tener efectos negativos sobre sus costes. La presencia de deseconomías de escala suele asociarse al aumento de las dificultades organizativas a medida que su tamaño aumenta (problemas de incentivos, mayores dificultades de comunicación, ...).

Ejercicio 7.3.1 *Elija tres sectores productivos y describa como es la distribución por tamaño de las empresas. Trate de explicar a continuación cuáles son los determinantes de la misma.*

Ejercicio 7.3.2 *Suponga que decide crear una empresa que se dedica a elaborar menús que ofrece a colegios, centros de trabajo,... y haga un esquema con las fuentes de economías de escala que cree que podría aprovechar a medida que su empresa creciese.*

Ejercicio 7.3.3 *El economista británico Ronald Coase, premio Nobel de Economía en 1991, se preguntaba en su conocido artículo «La naturaleza de la empresa» por las razones por las que una empresa no continuaba creciendo indefinidamente hasta abastecer la totalidad del mercado, trate de dar usted mismo alguna respuesta a dicha pregunta.*

Además de estas fuentes de economías (deseconomías) de escala que surgen en el interior de la empresa (**internas**), el aumento de la producción en el conjunto de la industria también puede afectar a los costes de cada empresa individual, denominándose en este caso **economías (deseconomías) externas o de aglomeración**. A modo de ejemplo, un aumento del número de empresas en un determinado sector productivo puede hacer que resulte más barato acceder a determinados inputs (suministro de piezas específicas, mano de obra especializada,...), facilitar el uso conjunto por parte de varias empresas de determinadas infraestructuras,....

Ejercicio 7.3.4 *Considere el proceso de producción de automóviles eléctricos y haga un esquema con el tipo de economías de escala que pueden surgir, valorando su influencia sobre el coste medio de producción.*

Ejercicio 7.3.5 *Ejercicio sobre economías de escala en la producción de leche.*

7.3.2 La función de coste total largo plazo

Volviendo de nuevo a nuestro modelo sencillo con dos únicos factores, la función de coste total a largo plazo nos daría el coste mínimo al que la empresa podría producir una determinada cantidad x_1, dados los precios actuales de los factores.

$$CT_{lp} = CT_{lp}(x_1; r_L, r_K).$$

Supongamos que el volumen de producción planeado por la empresa fuese x_1^a unidades del producto por periodo de tiempo. En la pregunta anterior hemos visto como se determina la combinación de factores (L^*, K^*) que minimizaría el coste de obtener obtener dicho volumen

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

de producción. La función de coste total asignaría, por tanto, a x_1^a el resultado de multiplicar dichas cantidades por sus precios actuales de mercado:

$$C_{lp}(x_1^a) = r_L L^*(x_1^a; r_L, r_K) + r_K K^*(x_1^a; r_L, r_K).$$

En general, vimos que la trayectoria de expansión recoge la combinación de factores óptima para los distintos niveles de producción x_1. Por tanto, podemos afirmar que la función de costes totales a largo plazo nos informa sobre el coste de cada uno de los puntos de la trayectoria de expansión:

$$C_{lp}(x_1; r_L, r_K) = r_L L^*(x_1; r_L, r_K) + r_K K^*(x_1; r_L, r_K),$$

donde $L^*(x_1)$ y $K*(x_1)$ son las cantidades que permiten obtener la cantidad x_1 a un coste mínimo, esto es, pertenecen a la trayectoria de expansión de la empresa.

7.3.3 Funciones de coste medio y coste marginal a largo plazo

Al igual que en el caso del corto plazo, partir de la función de costes totales podemos definir las funciones de coste por unidad, esto es, la de coste medio:

$$CMe_{lp}(x_1; r_L, r_K) = \frac{CT_{lp}(x_1; r_L, r_K)}{x_1},$$

y la de coste marginal:

$$CMg_{lp}(x_1; r_L, r_K) = \frac{dCT_{lp}}{dx_1}(x_1; r_L, r_K).$$

Para analizar la forma de las funciones de costes a largo plazo debemos recurrir de nuevo al concepto de economías de escala. En el marco de nuestro modelo, existirán economías de escala para un determinado nivel de producción x_1 si la función de coste medio es decreciente para dicho nivel de producción, esto es, $\frac{dCMe_{lp}}{dx_1}(x_1) < 0$. Dado que estamos considerando que las empresas son precio aceptantes en el mercado de factores, la presencia o no de economías de escala quedará determinada únicamente por la tecnología, más concretamente, por el tipo de rendimientos a escala que presente. A modo de ejemplo, si el proceso productivo presentase rendimientos constantes a escala, hemos visto que para variar el output en una determinada proporción $\lambda > 0$ deberíamos variar en esa misma proporción las cantidades empleadas de factores, por lo tanto se cumpliría que:

$$CT_{lp}(\lambda x_1) = r_L(\lambda L(x_1)) + r_K(\lambda K(x_1)) = \lambda CT_{lp}(x_1).$$

Por tanto, si la empresa tuviese rendimientos constantes a escala para cualquier volumen de producción, su curva de costes totales sería una línea recta cuya pendiente reflejaría tanto el coste medio como el coste marginal, ambos constantes para cualquier volumen de producción (Figura 7.7).

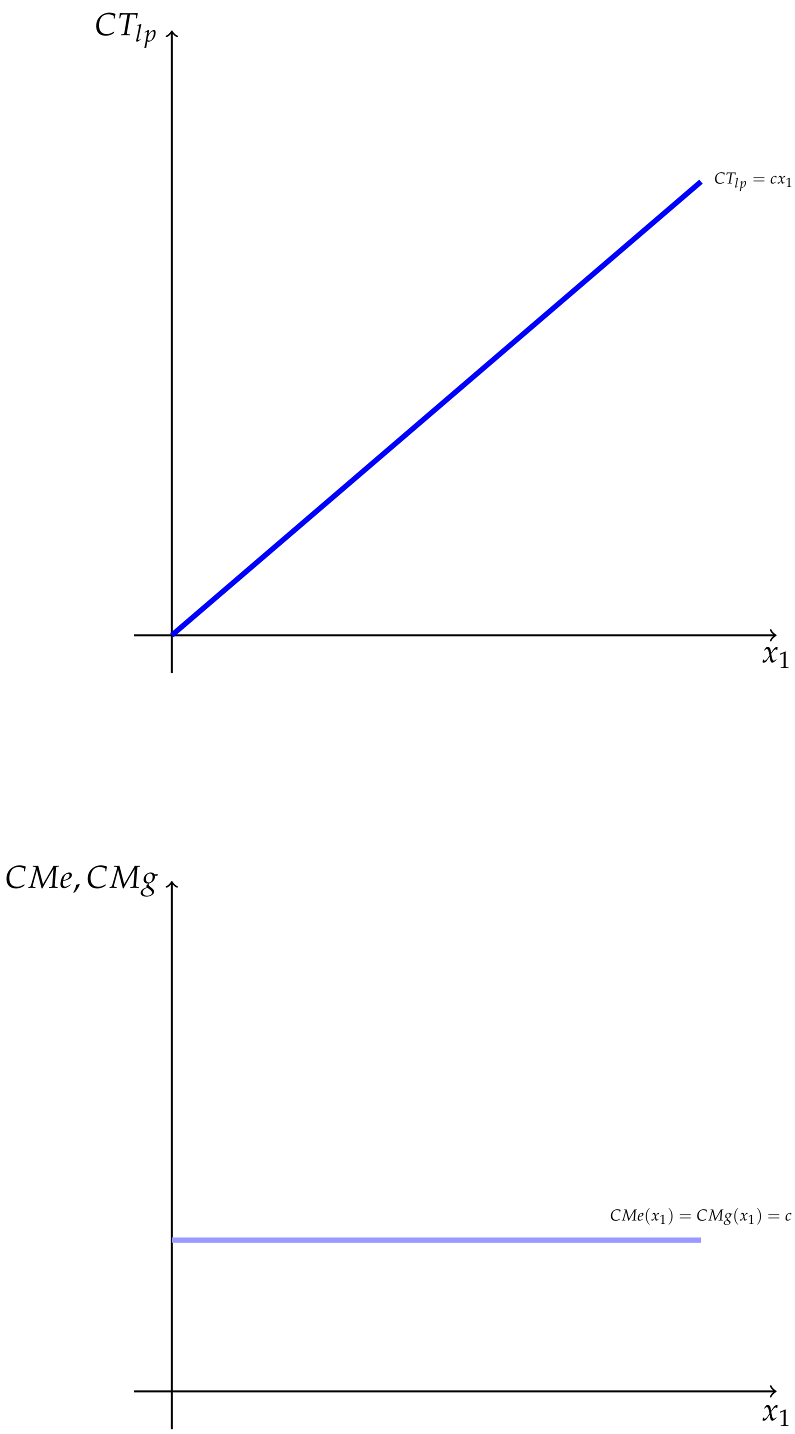


Figura 7.7. ***Forma de las curvas de coste a largo plazo con rendimientos constantes a escala.*** Si la tecnología presentase rendimientos constantes a escala para cualquier nivel de producción la función de coste total a largo plazo sería una línea recta. En términos de las funciones de coste por unidad, las funciones de coste medio y coste marginal a largo plazo coincidirían siendo su valor constante e igual a la pendiente c de la función de costes totales.

De la misma manera, si la tecnología presentase rendimientos crecientes (decrecientes) a escala para cualquier volumen de producción, la función de costes totales sería cóncava (convexa) en todo su dominio. Por su parte las funciones de coste medio y coste marginal serían decrecientes (crecientes) estando siempre la función de coste marginal por debajo (por encima) de la de coste medio.

Ejercicio 7.3.6 *Represente gráficamente la forma de las funciones de coste total, coste medio y coste marginal a largo plazo para cada uno de los siguientes casos:*

- *existen rendimientos crecientes a escala para cualquier nivel de producción;*
- *existen rendimientos decrecientes a escala para cualquier nivel de producción.*

Ejercicio 7.3.7 *Dada la función $CT_{lp}(x_1)$ se pide:*

1. *Defina la elasticidad del coste al output, $\varepsilon_{C/x_1}(x_1)$.*
2. *Determine el valor de dicha elasticidad para el caso en que la tecnología presenta rendimientos constantes a escala para todos los posibles niveles de producción.*

Una tecnología que presente el mismo tipo de rendimientos a escala para todos los niveles posibles de producción no parece demasiado realista. De manera similar a lo que señalábamos al hablar de las economías de escala, vamos a suponer que en nuestro proceso productivo existen rendimientos crecientes a escala hasta un determinado nivel de producción x_1^e siendo decrecientes a partir del mismo. Bajo estos supuestos la función $CT_{lp}(x_1)$ presentaría un tramo inicial cóncavo pasando a ser convexa a partir de x_1^e. La forma de las funciones asociadas de coste medio y coste marginal se obtiene de manera inmediata a partir de la relación que guardan con la de coste total.

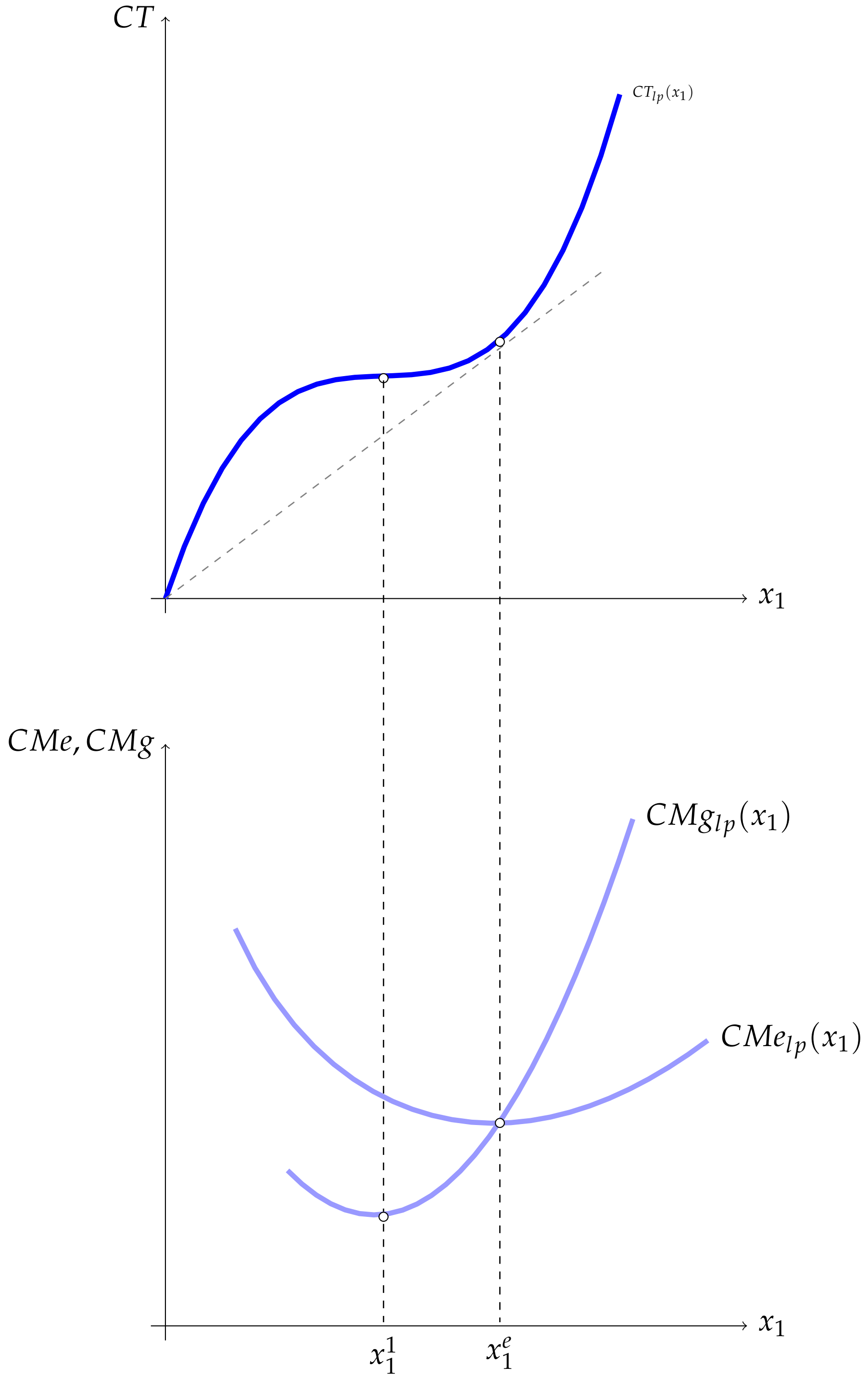


Figura 7.8. ***Economías de escala y forma de las funciones de costes a largo plazo.*** El nivel de producción para el que aparecen las deseconomías de escala se corresponde con el punto mínimo de la curva de costes medios de largo plazo, punto en el que además se corta con la curva de coste marginal. En términos de la curva de costes totales, para ese nivel de producción x_1^e el radiovector tendrá la menor pendiente y, además, será tangente a dicha curva.

Ejercicio 7.3.8 *Dado el concepto de elasticidad del coste al output recogido en el Ejercicio 7.3.3 demuestre que se cumple* $\varepsilon_{C/x_1}(x_1) = \dfrac{CMg_{lp}(x_1)}{CMe_{lp}(x_1)}$.

7.4 La relación entre las funciones de costes a corto y las funciones de costes a largo plazo

La mayor flexibilidad de la empresa a largo plazo —puede elegir su tamaño de planta— hará que, sea cual sea el volumen de produción, el coste total a largo nunca será mayor que el de corto, esto es, $CT_{lp}(x_1) \leq CT_{cp}(x_1; \bar{K})$. La Figura 7.9 permite apreciar, la correspondencia entre la mayor flexibilidad a largo y los menores costes. Supongamos que la empresa esta produciendo inicialmente x_1^1 y desea pasar a obtener un nivel mayor x_1^2. A corto plazo la empresa estará condicionada por la cantidad fija de capital K^*, por lo que deberá producir x_1^2 con la combinación de factores (L^2, K^*) que pertenece a la isocoste $IC_{cp}(x_1^2)$. En cambio, a largo plazo la empresa producirá esa misma cantidad con la combinación (L^{**}, K^{**}), la cual corresponde a una isocoste más próxima al origen $IC_{lp}(x_1^2)$.

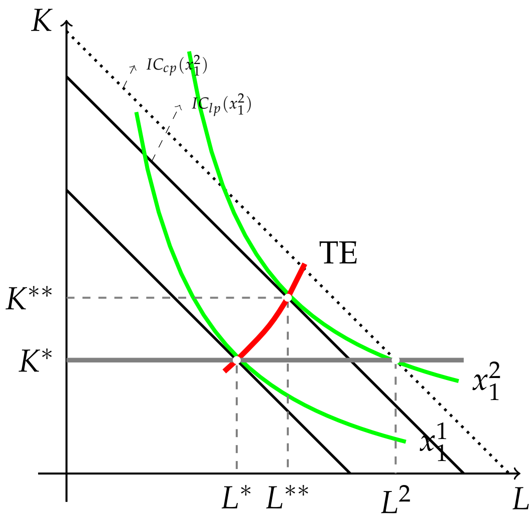


Figura 7.9. ***Elección de la combinación óptima de factores: corto plazo* vs. *largo plazo*.**En el largo plazo la empresa puede ajustar tanto L como K lo que le permite le permite situarse en una isocoste más próxima al origen.

7.4.1 La curva de costes medios de largo plazo como envolvente de las de costes medios a corto plazo

Supongamos inicialmente una situación en la cual la empresa sólo pudiese elegir entre tres posibles tamaños de planta, recogidos en nuestro modelo con tres niveles de empleo del factor fijo: $K_1 < K_2 < K_3$. En la Figura 7.10 aparecen recogidas las curvas de coste total medio a corto plazo para cada uno de esos tamaños.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

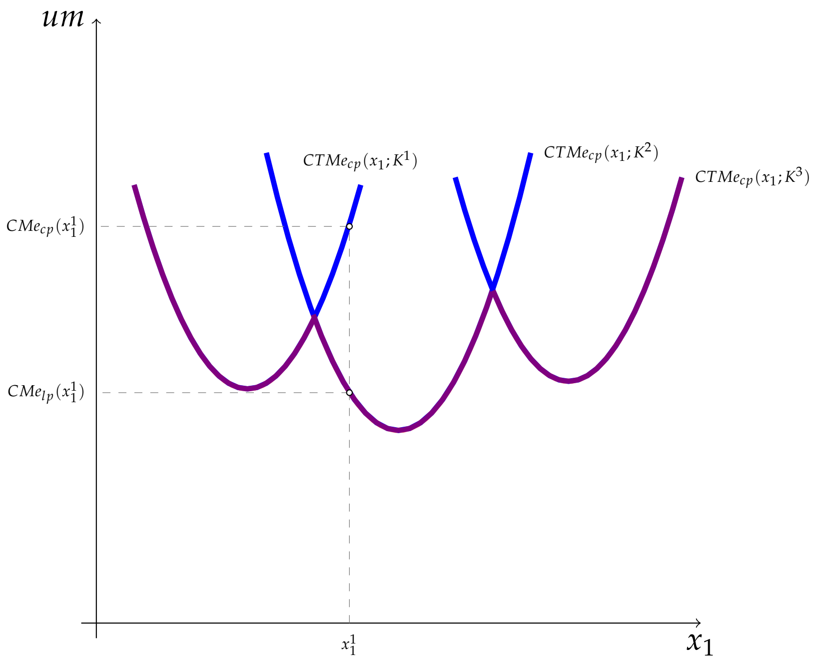


Figura 7.10. ***La curva de costes medios a largo con un número discreto de plantas de producción.*** Si la empresa sólo pudiese elegir entre tres posibles tamaños de planta K^1, K^2 y K^3, la curva de costes medios a largo plazo vendría dada por la parte remarcada en rojo de cada una las tres curvas de costes totales medios a corto. A modo de ejemplo, una empresa con un tamaño de planta K^1 puede producir x_1^1 a corto plazo a un coste medio mínimo $CTMe_{cp}(x_1^1)$; sin embargo, a largo plazo podría ampliar su planta hasta K^2 y obtener el mismo volumen de producción a un coste medio $CMe_{lp}(x_1^1)$.

La decisión inicial de la empresa sería cuál de los tres tamaños de planta elegir en función del nivel de producción que desea obtener. Una vez tomada esa decisión, si un cambio en las condiciones de mercado le llevan a querer producir más sus costes medios serán los que recoge la correspondiente función de $CTMe_{cp}(x_1)$. Sólo a largo podrá cambiar de tamaño de planta si así lo desea. A modo de ejemplo, si el volumen de producción previsto por la empresa es x_1^1 la planta más eficiente es la que utiliza K_1 unidades de capital. Si de manera inesperada el nivel de producción deseado pasa a ser x_1^2 la empresa a corto plazo sólo podrá obternerlo a un coste medio dado por $CTMe_{cp}^1(x_1^2)$; en cambio, a largo plazo la empresa podrá ampliar su planta y obtenerlo a un menor coste medio, $CTMe_{cp}^2(x_1^2)$. Si repitiesemos ese procedimiento para los distintos niveles de producción llegaríamos a la conclusión de que el coste medio a largo plazo viene dado por el tramo remarcado en rojo de las distintas curvas de costes medios a corto.

Sin embargo, en nuestro modelo la cantidad de capital, K, es una variable continua en lugar de tomar un número discreto de valores. En este caso tendremos una planta óptima para cada posible nivel de producción y la función de costes medios de largo plazo sería la envolvente de las infinitas curvas de costes totales medios a corto plazo(Figura 7.11).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

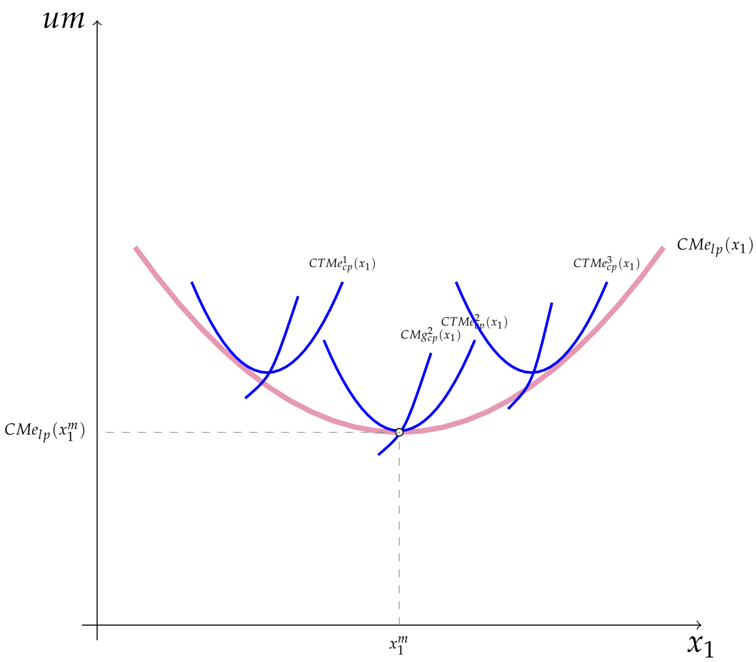


Figura 7.11. ***La curva de costes medios a largo plazo como envolvente de las curvas de costes medios a corto plazo.*** Cuando consideramos el capital perfectamente divisible para cada posible valor de K existirá una planta de producción distinta, cada una de ellas con sus correspondientes curvas de costes por unidad a corto plazo. Cada curva de coste total medio a corto será tangente en un punto a la curva de costes medios de largo, para cualquier otro nivel de producción el coste total medio a corto será mayor que el de largo.

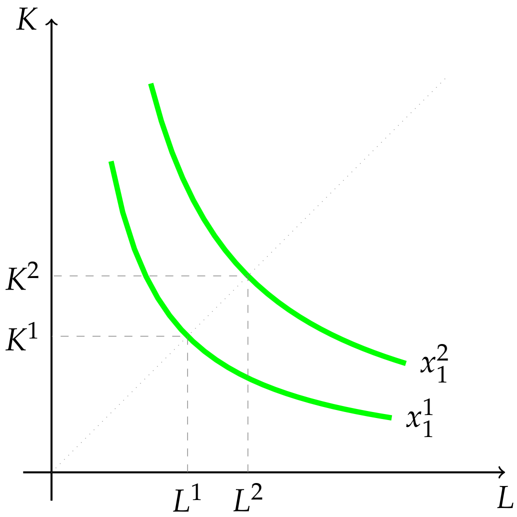
Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

7.5 Ejercicios

Ejercicio 7.5.1 *Determine el tipo de rendimientos a escala que presenta cada una de las siguientes funciones:*

- $x_1 = L + K$
- $x_1 = LK$.

Ejercicio 7.5.2 *En la Figura* **??** *se recoge una situación en la cual ante un aumento del 40 % en las cantidades empleadas de cada uno de los factores la producción ha pasado de x_1^1 a x_1^2. Explique el tipo de rendimientos a escala que se manifiestan en función del valor que guarde x_1^2 con x_1^1.*



Ejercicio 7.5.3 *Dada la función de producción $x_1 = AL^{\alpha}K^{\beta}$ determine si es o no homogénea y, en caso afirmativo, el tipo de rendimientos a escala que recogerá.*

Ejercicio 7.5.4 *Explique a partir de un mapa de isocuantas la diferencia entre el significado de la* ley de rendimientos marginales decrecientes *y la existencia de rendimientos decrecientes a escala.*

Ejercicio 7.5.5 *Suponga que la producción de un determinado bien requiere la utilización de dos factores, K y L:*

a. *Si el precio de ambos factores se redujese a la mitad, ¿cómo afectaría a la trayectoria de expansión? ¿Y a las curvas de costes?*

b. *Conteste a las mismas preguntas para el caso en que sólo cambia el precio de uno de ellos.*

Solución 7.5.1 **a.** *La trayectoria de expansión no se vería afectada, ya que la pendiente de las isocostes no cambiaría y, por tanto, las combinaciones de factores que minimizarían el coste de cada posible volumen de producción seguirían siendo las mismas. Sin embargo, dado un nivel de producción la combinación de factores empleada en su producción costaría exactamente la mitad que antes, por lo que las curvas de costes si se verán afectadas (se desplazarán hacia abajo).*

a. *Si solo disminuye el precio de uno de ellos, la trayectoria de expansión cambiaría, recogiendo el hecho de que, para cada nivel de producción, la empresa elegirá ahora una mayor cantidad de aquel factor cuyo precio relativo ha disminuido. El coste de cada nivel de producción disminuirá de una manera directamente proporcional a la cantidad empleada del factor cuyo precio disminuye y a las posibilidades técnicas de sustituir un factor por el otro.*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Ejercicio 7.5.6 *Supongamos que un producto requiere dos tipos de factores para su elaboración. Si los precios de los factores son los mismos, ¿sería correcto afirmar que deben emplearse en cantidades iguales para obtener el volumen de producción deseado a un coste mínimo? Razone su respuesta.*

Solución 7.5.2 *No. Bajo el supuesto de tecnología* regular *(isocuantas decrecientes y estrictamente convexas), la elección de la combinación de factores que minimiza el coste requiere que en dicho punto se cumpla la condición:*

$$\frac{PMg_L}{PMg_k} = \frac{r_L}{r_K}$$

Por tanto, la igualdad de los precios no implica que se emplee la misma cantidad de cada factor ya que hay que tener en cuenta las productividad relativa. En realidad lo que implica es que los dos factores se utilizarán en cantidades tales que sus productividades marginales se igualarán, o lo que es lo mismo, $RMST_L^K(K^*, L^*) = 1$.

Ejercicio 7.5.7 *Una empresa utiliza capital, K, y trabajo, L, para producir con arreglo a la siguiente función de producción:*

$$X_1 = 5L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$$

Suponga que los precios de los factores son $r_L = 5$ *u.m. y* $r_K = 10$ *u.m..*

a. *Determine cuáles son las funciones de* CMe *y* CMg *a largo plazo.*

b. *Si mantenemos fijo el empleo de capital en 27 unidades, determinar las funciones de* $CFMe$, $CVMe$, $CTMe$ *y* CMg *a corto plazo.*

Solución 7.5.3 **a.** *Para determinar las funciones de* CMg *y* CMe *a largo plazo necesitamos obtener primero la trayectoria de expansión, la cual nos informará sobre las combinaciones de factores que minimizan el coste de obtener cada posible nivel de producción. Por tratarse de una función de producción Cobb-Douglas las isocuantas son decrecientes y convexas, por lo que la trayectoria de expansión vendrá determinada por la condición de tangencia entre las isocuantas y las isocostes:*

$$T.E. = \{(L, K) : RMST_L^K = r_L/r_K\} = \{(L, K) : L = K\}$$

esto es, sea cual sea el volumen de producción deseado la empresa siempre utilizará la misma cantidad de capital que de trabajo. Teniendo esto en cuenta, ya podemos determinar, a partir de la función de producción, como varían las cantidades necesarias de factores con el nivel de producción:

$$x_1 = 5L^{2/3}K^{1/3} = 5L^{2/3}L^{1/3} = 5L \Rightarrow L^* = K^* = \frac{x_1}{5}$$

Por tanto, la función de costes totales será:

$$CT_{lp}(x_1) = r_L L(x_1) + r_K K(x_1) = 5\frac{x_1}{5} + 10\frac{x_1}{5} = 3x_1$$

teniendo por tanto que $CMe_{lp} = CMg_{lp} = 3$

b. *Para determinar las funciones de costes a corto plazo necesitamos conocer, en primer lugar, cual es la cantidad de trabajo que ha de acompañar a las 27 unidades disponibles de capital en función del volumen de producción deseado. Sustituyendo* $K = 27$ *en la función de producción se obtiene:*

$$x_1 = 15L^{2/3} \Rightarrow L = \left(\frac{x_1}{15}\right)^{3/2}$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

por lo que las funciones de costes totales serán:

$$CVT(x_1) = 5\left(\frac{x_1}{15}\right)^{3/2}; \quad CFT = 270; \quad CT_c p(x_1) = 270 + 5\left(\frac{x_1}{15}\right)^{3/2}$$

las de costes medios:

$$CVMe(x_1) = 5\left(\frac{x_1}{15}\right)^{1/2}; \quad CFMe = \frac{270}{x_1}; \quad CTMe(x_1) = \frac{270}{x_1} + 5\left(\frac{x_1}{15}\right)^{1/2}$$

y la de coste marginal:

$$CMg(x_1) = \frac{15}{2}\left(\frac{x_1}{15}\right)^{1/2}$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria