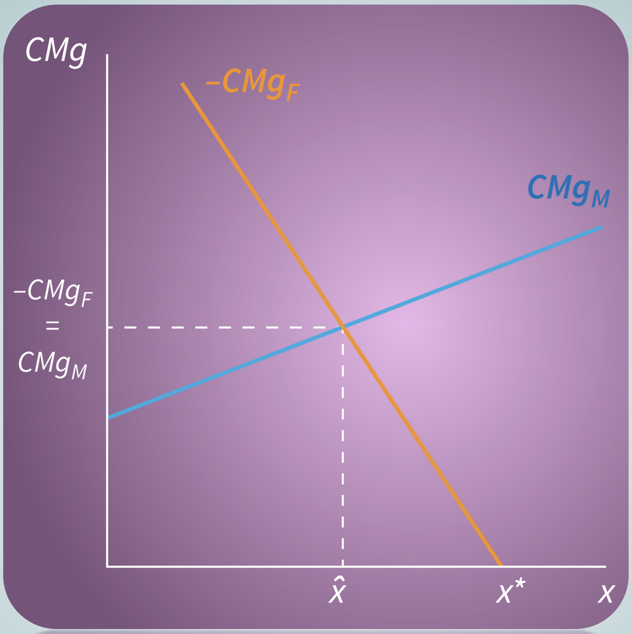
Microeconomía III

Tema 1. Repaso preferencias, función de utilidad, tecnología y función de producción



Ramón Núñez Sánchez

Departamento de Economía

1. Repaso preferencias, función de utilidad, tecnología y función de producción [1]

CONTENIDOS TEÓRICOS.

1.1. Las preferencias del consumidor. Axiomática de la relación de preferencias.

Supongamos el caso de un consumidor que se encuentra ante varias cestas de consumo pertenecientes a un conjunto X, que es su conjunto de consumo. Se define la cesta de consumo como una posible combinación de cantidades de bienes consumidas (x_1, x_2), donde x_i es la cantidad del bien *i-ésimo* en dicha cesta.

Además el consumidor tiene unas determinadas preferencias respecto a las cestas de consumo de X. Así, si $(x_1, x_2) \succcurlyeq_j (y_1, y_2)$, podemos decir que "el consumidor j considera que la cesta (x_1, x_2) es, al menos tan buena, como la cesta (y_1, y_2)".

Vamos a suponer que, dada una cesta de consumo (x_1, x_2), cada una de las otras cestas puede ubicarse:

a) En un conjunto de cestas preferidas a (x_1, x_2), denominado *conjunto mejor* de (x_1, x_2).
b) En un conjunto de cestas indiferentes a (x_1, x_2), denominado *conjunto de indiferencia* a (x_1, x_2).
c) En un conjunto de cestas de consumo para las cuales (x_1, x_2) es preferido, denominado *conjunto peor* de (x_1, x_2).

A continuación, trataremos de estudiar las preferencias del consumidor de manera que éstas ordenen el conjunto de cestas de consumo. Para ello deben cumplirse las siguientes propiedades:

1. Completitud. Dadas $(x_1, x_2)\ e\ (y_1, y_2) \in X$, o bien $(x_1, x_2) \succcurlyeq_j (y_1, y_2)$, o bien, $(y_1, y_2) \succcurlyeq_j (x_1, x_2)$ o ambos.

De una manera intuitiva, podemos interpretar esta propiedad como una situación en la que el consumidor puede expresar una preferencia o indiferencia entre cualquier par de cestas de consumo por muy semejantes o diferentes que puedan

[1] Estas notas están pendientes de revisión y pueden contener errores.

ser, lo cual nos asegura que no van a existir "agujeros" en la ordenación de preferencias.

2. Transitividad. Dadas $(x_1, x_2), (y_1, y_2)\, e (z_1, z_2) \in X$ si $(x_1, x_2) \succcurlyeq_j (y_1, y_2)$ e, $(y_1, y_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2)$ entonces $(x_1, x_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2)$.

Este es un requisito de coherencia del consumidor. La hipótesis de transitividad tiene una implicación importante para los conjuntos de indiferencia ya que ninguna de las cestas de consumo podrá pertenecer a más de un conjunto de indiferencia. Por lo tanto, los conjuntos de indiferencia no tendrán intersección.

3. Reflexividad. Dado $(x_1, x_2) \in X,\ (x_1, x_2) \succcurlyeq_j (x_1, x_2)$.

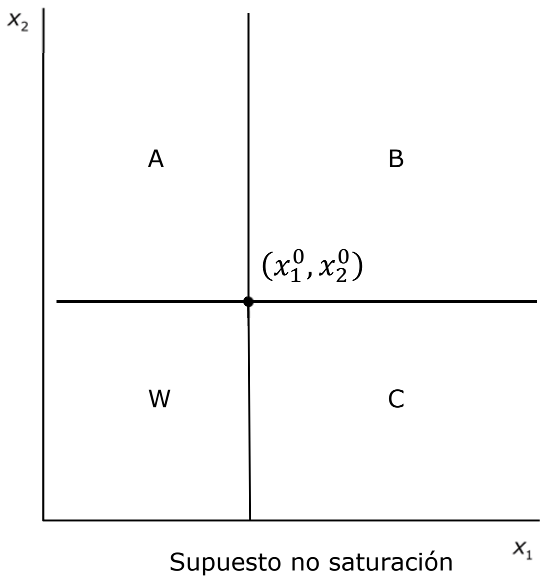
Cualquier cesta de consumo es preferida o indiferente a sí misma. Dicha hipótesis asegura que cada cesta de bienes es indiferente a sí misma, y por tanto, asegura que cada cesta de bienes pertenezca al conjunto de indiferencia formado por, al menos, ella misma.

4. No saturación. Dadas $(x_1, x_2)\, e\, (y_1, y_2) \in X$. Una cesta de bienes $(x_1, x_2) \succ_j (y_1, y_2)$ si (x_1, x_2) contiene más de, al menos un bien, y no menos de cualquier otro.

La implicación para el consumidor es clara: cuanto más contenga una cesta de cada bien, mejor. El consumidor nunca se sacia del consumo de bienes.

Suponga una cesta (x_1^0, x_2^0), representada en la Figura 1.

Figura 1



Supuesto no saturación

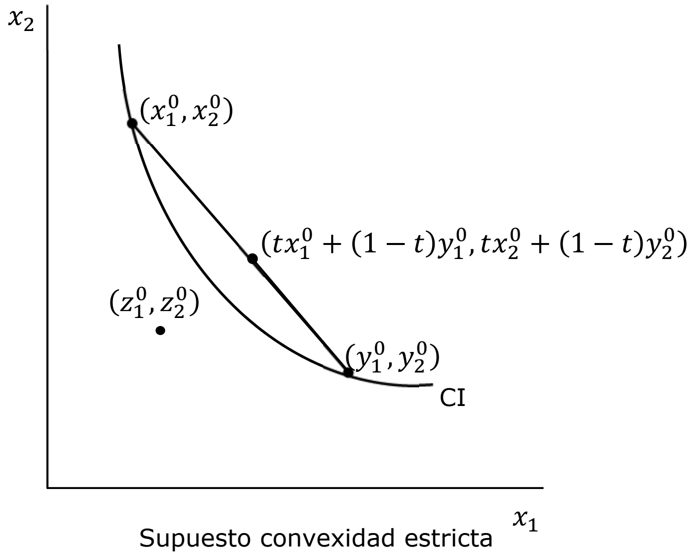
Todas las cestas del área B, por el supuesto de no saturación, deben ser preferidas a (x_1^0, x_2^0), formando, por tanto, un *conjunto mejor* de (x_1^0, x_2^0). Aplicando el mismo supuesto, todas las cestas localizadas en el área W deben ser peores que (x_1^0, x_2^0), por lo que forman el conjunto peor de (x_1^0, x_2^0). Por lo tanto, los puntos del conjunto de indiferencia de (x_1^0, x_2^0) deberían estar localizados en las áreas A y C. Si nos movemos entre cestas del conjunto de indiferencia de (x_1^0, x_2^0), debemos reducir el consumo de uno de los bienes para aumentar el consumo del otro. Además, dado el supuesto de no saturación, un conjunto de indiferencia nunca puede ser más ancho que un punto concreto.

A este supuesto también se le denomina supuesto de *monotonicidad*.

5. Convexidad (en sentido estricto). Dada cualquier cesta de bienes (x_1, x_2), su conjunto mejor es estrictamente convexo.

Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2)\ e (z_1, z_2) \in X$ donde $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, si $(x_1, x_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2)$ y $(y_1, y_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2)$ entonces $(tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2) \succ_j (z_1, z_2), \forall t / 0 \leq t \leq 1$.

Figura 2



Supuesto convexidad estricta

Si nos movemos a lo largo del conjunto de indiferencia hacia la izquierda desde el punto que representa la cesta de consumo (y_1^0, y_2^0) reduciendo la cantidad de x_1 en pequeñas cantidades iguales, tendremos que compensar al consumidor, para mantenerlo en el conjunto de indiferencia, representado por la curva CI, con incrementos cada vez mayores de x_2. A medida que el consumo de x_1 es menor y mayor el de x_2, más valioso es considerado x_1 con respecto a x_2.

Por otra parte, cualquier combinación de las cestas de consumo (x_1^0, x_2^0) e (y_1^0, y_2^0), será estrictamente preferida a éstas.

Si planteásemos el supuesto de convexidad débil, dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2)\ e (z_1, z_2) \in X$ donde $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, si $(x_1, x_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2)$ y $(y_1, y_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2)$ entonces $(tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2) \succcurlyeq_j (z_1, z_2), \forall t / 0 \leq t \leq 1$

Este supuesto más flexible permite que los conjuntos de indiferencia tengan segmentos rectos, aunque, normalmente se prescinde del supuesto de convexidad débil para asegurarnos de que la solución del problema del consumidor sea una única cesta de consumo.

6. Continuidad. La gráfica de un conjunto de indiferencia es una superficie continua.

Si suponemos cestas de consumo con únicamente dos tipos de bienes, la función que representa dicho conjunto no tiene huecos ni roturas en ningún punto. Así, dados dos bienes, podemos reducir la cantidad de uno de ellos, y por muy pequeña que sea esa reducción, podremos encontrar un incremento en la cantidad del otro bien que le coloque en una cesta de consumo indiferente a la primera. Este supuesto de continuidad lleva implícito el supuesto de perfecta divisibilidad de los bienes.

Existencia de una función de utilidad

Supongamos que las preferencias cumplen los supuestos de completitud, transitividad, reflexividad, no saturación, convexidad y continuidad. En ese caso, existe una función de utilidad continua $U: R_+^2 \to R$ que representa esas preferencias.

Así si:

$$U(x_1, x_2) = U(y_1, y_2), \text{ si y solo si } (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$$

$$U(x_1, x_2) > U(y_1, y_2), \text{ si y solo si } (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$$

Por lo tanto, la función de utilidad asigna un número real a cada cesta de bienes, de forma que aquellas cestas de consumo con valores mayores representan las cestas más preferidas por el consumidor. Hay que subrayar que la función de utilidad únicamente ordena las cestas de consumo. La magnitud de la función de utilidad sólo es relevante en la medida que nos permite determinar el puesto relativo que ocupan las diferentes cestas de consumo. A esta función también se la denomina de *utilidad ordinal*, dado que pone énfasis en la ordenación de las cestas y no en su valoración en términos de bienestar (utilidad) para el consumidor[2].

La relación marginal de sustitución

Sea una función de utilidad como $U(x_1, x_2)$. Suponemos que aumentamos la cantidad del bien 1, que forma parte de los dos diferentes bienes de los que están compuestas las cestas de consumo. ¿Qué cambios ha de introducir el consumidor en su consumo del bien 2 para mantener constante su nivel de utilidad?.

Si suponemos que la función de utilidad del consumidor es diferenciable, podemos definir la relación marginal de sustitución del bien 1 en términos del bien 2, $RMS_{x_1}^{x_2}$,

---

[2] Los primeros economistas que empiezan a referirse a la utilidad como indicador de bienestar general de las personas son: J. Bentham y J.S. Mill. A partir de sus ideas surge el utilitarismo como marco teórico para el estudio del comportamiento económico de los individuos. Si quieres profundizar en a biografía de J. Bentham, consulta el siguiente enlace: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/bentham.htm. Para saber más sobre la vida de J.S. Mill, consulta: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/john_stuart_mill.htm.

como la relación en la que el consumidor está dispuesto a sustituir el bien x_2 por el bien x_1, manteniendo constante su nivel de utilidad.

Vamos a buscar una expresión matemática para la relación marginal de sustitución del bien 1 en términos del bien 2. Suponiendo dx_1 y dx_2 las variaciones de consumo de los bienes x_1 y x_2, la variación de la utilidad debe ser cero.

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \tag{1}$$

Por lo tanto:

$$RMS_{x_1}^{x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{UMg_{x_1}}{UMg_{x_2}} \tag{2}$$

donde $UMg_{x_1} = \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ es la utilidad marginal del bien 1, que se define como la variación en el nivel de utilidad cuando el consumo bien 1 se incrementa en una pequeña cantidad, manteniéndose constante el consumo del resto de bienes.

Por lo tanto, la $RMS_{x_1}^{x_2}$ también se puede definir como el cociente de utilidades marginales del bien x_1 y x_2.

Hay que señalar que la relación marginal de sustitución no depende de la función de utilidad elegida para representar la relación de preferencias.

En Microeconomía I comprobamos cómo la $RMS_{x_1}^{x_2}$ es la pendiente de la forma de representación gráfica de la función de utilidad: las curvas de indiferencia.

La función de utilidad Cobb-Douglas

Una de las formas funcionales más conocidas para representar preferencias de consumo es la forma Cobb-Douglas:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

donde α y β son constantes positivas. Por lo general, el valor de α y β indica la importancia relativa, en términos de preferencias, de los dos bienes para el consumidor. Normalmente, en las funciones de utilidad Cobb-Douglas $\alpha+\beta=1$. En ese caso, se dice que las preferencias son homotéticas. Este tipo de preferencias van a ser utilizadas en otras asignaturas, como en comercio internacional.

1.2. Análisis de la conducta del consumidor: la maximización de la utilidad.

Una vez definida la función de utilidad vamos a suponer que el consumidor dispone de una renta determinada exógenamente m, que empleará para consumir los dos diferentes bienes existentes en la economía, siendo (p_1, p_2) la combinación de precios de ambos bienes.

Por lo tanto, el problema de decisión del consumidor puede expresarse como:

$$\underset{x_1, x_2}{Max}\ U(x_1, x_2) \tag{3}$$

$$s.a.\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

Este problema tendrá solución siempre y cuando:

1. La función de utilidad es continua.
2. La restricción presupuestaria debe cumplirse con una igualdad. Por lo que el problema (3) puede transformarse en:

$$\underset{x_1, x_2}{Max}\ U(x_1, x_2) \qquad (4)$$
$$s.a.\ p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

El consumidor deberá gastar toda su renta monetaria, si pretende encontrar una cesta de consumo que maximice su función de utilidad.

La combinación de consumo (x_1, x_2) que resuelve este problema es la cesta óptima demandada por el consumidor y representa la cantidad de cada uno de los bienes que maximiza su función de utilidad, dados los precios de los bienes y el nivel de renta.

La función que relaciona los precios de los bienes, (p_1, p_2), y la renta monetaria, m, con la cesta demandada, se denomina función de demanda del consumidor, o función de demanda marshalliana[3].

Para obtener la función de demanda marshalliana, es necesario resolver el problema de decisión del consumidor (4) a partir del cálculo matemático. Si lo hacemos, la condición de equilibrio que se obtiene es la siguiente:

$$\frac{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{UMg_{x_1}}{UMg_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (5)$$

El cociente del primer miembro es la relación marginal de sustitución del bien 1 respecto del bien 2, $RMS_{x_1}^{x_2}$, mientras que el segundo miembro puede definirse como la relación económica de sustitución, o tasa de intercambio de los bienes en el mercado. Por lo tanto esta condición de equilibrio (5), se puede escribir como:

$$RMS_{x_1}^{x_2} = RES_{x_1}^{x_2} \qquad (6)$$

El consumidor está en equilibrio cuando la tasa a la cual puede sustituir un bien por otro en el *mercado* ($RES_{x_1}^{x_2}$), es exactamente igual a la tasa a la que el consumidor desea exactamente sustituir un bien por otro, de acuerdo con sus *preferencias* ($RMS_{x_1}^{x_2}$).

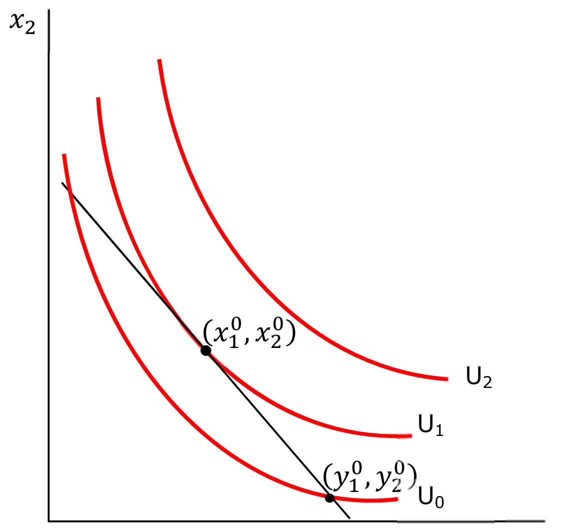
Esta condición de equilibrio (6), puede representarse gráficamente, si suponemos una economía en la que el consumidor sólo puede disfrutar de dos bienes. Si representamos en cada uno de los ejes el consumo de los bienes, podemos utilizar el conjunto de curvas de indiferencias como forma de representación gráfica de la función de utilidad, así como la restricción presupuestaria para representar el límite del conjunto asequible del consumidor (Figura 3).

[3] La función de demanda marshalliana toma el nombre de Alfred Marshall. Para conocer su biografía, consulta el siguiente enlace: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/marshall.htm .

Tal y como estudiamos en el curso de Microeconomía I, para una cesta de consumo como (x_1, x_2), la pendiente de la curva de indiferencia o $RMS_{x_1}^{x_2}$, coincide con la pendiente de la restricción presupuestaria o $RES_{x_1}^{x_2}$.

Resulta interesante volver al lagrangiano para buscar la interpretación económica del multiplicador de Lagrange (λ). En términos generales, los multiplicadores de Lagrange sirven para medir cómo las restricciones de un determinado problema afectan al valor óptimo de la función objetivo; es decir, miden el grado de sensibilidad del valor óptimo del problema ante cambios en las restricciones. En nuestro problema de decisión del consumidor, existe un solo multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria. Por lo tanto, dicho multiplicador mide el grado de sensibilidad de la función de utilidad ante variaciones en el nivel de renta monetaria; en otras palabras, el multiplicador de Lagrange asociado al problema de decisión de un consumidor es igual a la *utilidad marginal de la renta.*

Figura 3



Elección óptima del consumidor

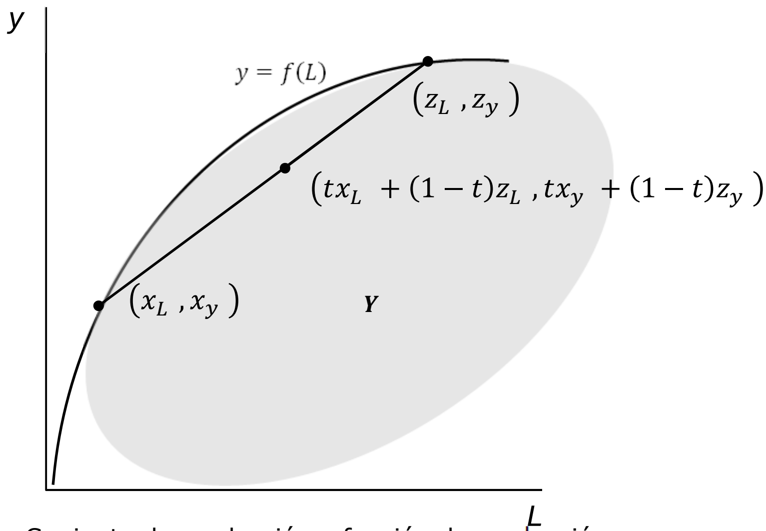
1.3. Descripción de la tecnología. La función de producción.

La teoría convencional de la producción, basada en la escuela económica neoclásica, señala que el objetivo de cualquier empresa de propiedad privada es la maximización de beneficios. De esta manera, los directivos de las empresas eligen las cantidades de factores productivos, y la cantidad de producción para lograr unos beneficios máximos, dada la tecnología de producción y las condiciones de demanda.

Es por tanto necesario estudiar en detalle la modelización de la tecnología de producción de las empresas, para posteriormente, determinar los equilibrios de mercado. Pero, ¿cómo se define, desde el punto de vista económico, la tecnología de producción?.

Se entiende por **tecnología** cualquier proceso productivo en el cual a partir de la combinación de factores productivos (o inputs) se obtiene productos (u outputs). El estado del arte impone restricciones tecnológicas a las empresas: deben limitarse a llevar a cabo planes que sean factibles en ese momento determinado de tiempo. El conjunto de planes de producción factibles, formados por combinaciones de factores productivos y niveles de producción, se le denomina **conjunto de producción Y**. En la Figura 4 se puede observar un conjunto de producción, suponiendo una tecnología en la que para obtener el output y es necesario el uso de un solo factor productivo. El conjunto de producción muestra las elecciones tecnológicas posibles de la empresa. Podemos observar cómo el conjunto de producción es un conjunto **convexo**.

Figura 4



Conjunto de producción y función de producción

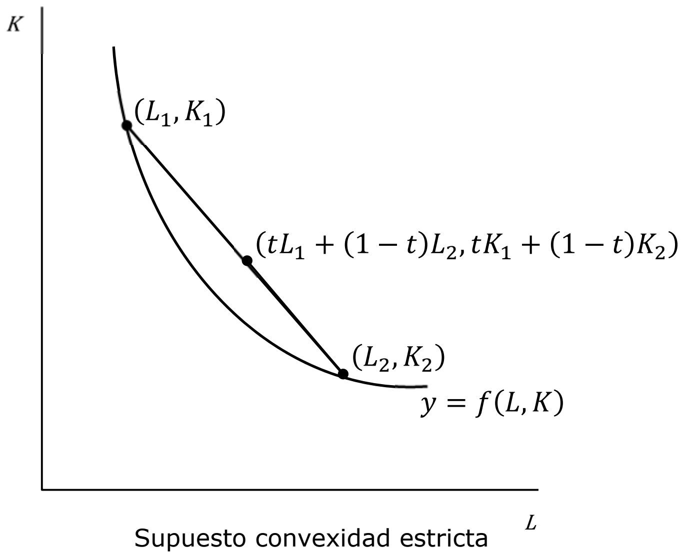
A partir de este ejemplo podemos introducir el concepto de **función de producción**. Ésta se define como aquella función que expresa el máximo nivel de producción posible para cada cantidad de factores productivos. En la Figura 4 la función de producción estaría representada por la frontera del conjunto de producción. Cuando hay dos factores de producción necesarios para producir el producto, las relaciones de producción se representan mediante las curvas **isocuantas**, que se definen como el conjunto de todas las combinaciones posibles de factores productivos que son necesarios para obtener una cantidad determinada del producto.

La tecnología de producción debe cumplir una serie de propiedades.

En primer lugar, las tecnologías deben ser *monótonas*: con una cantidad igual o mayor de los factores productivos debe ser posible obtener, al menos, el mismo volumen de producción. Pongamos un ejemplo: si una empresa para producir tres bicicletas necesita, al menos, cuatro trabajadores y dos unidades de capital, entonces, si la empresa dispone de ocho trabajadores y cuatro unidades de capital, deberá ser capaz de producir, como mínimo, las tres bicicletas anteriores.

En segundo lugar, es necesario considerar que la tecnología de producción es *convexa*. Esto significa que si existen dos posibilidades de producir *y* unidades de output, utilizando (L_1, K_1), o bien (L_2, K_2), cualquier combinación lineal de ambas permitirá obtener *al menos y* unidades del bien.

Figura 5



Supuesto convexidad estricta

La relación marginal técnica de sustitución

Sea una función de producción como $y = f(L, K)$. La empresa está utilizando una combinación de factores como (L_1, K_1). Suponemos que se está considerando la posibilidad de aumentar la cantidad utilizada de trabajo en el proceso de producción. ¿Qué cambios ha de introducir la empresa en el uso del capital para mantener constante su nivel de producción?.

Si suponemos que la función de producción es diferenciable, podemos definir la relación marginal técnica de sustitución del trabajo en términos del capital, $RMTS_L^K$, como la relación en la que la empresa tendrá que sustituir el capital por el trabajo, manteniendo constante su nivel de producción.

Vamos a buscar una expresión matemática para la relación marginal técnica de sustitución del trabajo en términos del capital. Suponiendo *dK* y *dL* las variaciones de uso del capital y trabajo respectivamente, la variación de la producción debe ser cero.

$$df(L,K) = \frac{\partial f(L,K)}{\partial L}dL + \frac{\partial f(L,K)}{\partial K}dK = 0 \quad (7)$$

Por lo tanto:

$$RMTS_L^K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\frac{\partial f(L,K)}{\partial L}}{\frac{\partial f(L,K)}{\partial K}} = \frac{PMg_L}{PMg_K} \quad (8)$$

donde $PMg_L = \frac{\partial j(L,K)}{\partial L}$ es la productividad marginal del trabajo, que se define como la variación en el nivel de producción cuando el uso del trabajo se incrementa en una pequeña cantidad, manteniéndose constante el consumo del resto de bienes.

Por lo tanto, la $RMTS_L^K$ también se puede definir como el cociente de productividades marginales de los factores trabajo y capital.

Los rendimientos de escala

Supongamos una combinación determinada de factores productivos (L,K) necesarios para producir una determinada cantidad de output. Ahora consideremos la posibilidad de aumentar la cantidad de dichos inputs en una proporción t. ¿Qué nuevo volumen de producción producirá la empresa?.

Si la respuesta es que el output aumenta t veces, entonces decimos que la tecnología de producción presenta **rendimientos constantes de escala**.

$$f(tL,tK) = tf(L,K), \ \forall\, t > 0 \quad (9)$$

Si, por el contrario, el volumen de producción obtenido fuera *menor* que t veces el original, entonces la tecnología de producción presenta **rendimientos decrecientes de escala**.

$$f(tL,tK) < tf(L,K), \ \forall\, t > 1 \quad (10)$$

Por último, si el volumen de producción obtenido fuera mayor que t veces el original, entonces la tecnología de producción presenta **rendimientos crecientes de escala**.

$$f(tL,tK) > tf(L,K), \ \forall\, t > 1 \quad (11)$$

¿Qué tipo de tecnología podría constituir un ejemplo de rendimientos crecientes de escala?. Una tubería. Si multiplicamos el diámetro de una tubería, utilizamos el doble de materiales, pero la circunferencia de la tubería se multiplica por cuatro. Por tanto, podemos transportar más del doble de agua.

Normalmente, una misma tecnología puede presentar diferentes tipos de rendimientos de escala según sea el volumen de producción.

La función de producción Cobb-Douglas

Una de las formas funcionales más conocidas para representar la tecnología de producción es la forma Cobb-Douglas:

$$y = f(L,K) = L^{\alpha}K^{\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in (0,1)$$

donde α y β son constantes. El valor de α y β indica la variación porcentual de la producción ante una variación en un uno por ciento del uso del trabajo y capital, respectivamente. De esta forma, si α+β=1, entonces podemos comprobar que la tecnología de producción presenta rendimientos constantes de escala. Si, por el contrario, $\alpha+\beta<1$, entonces presenta rendimientos decrecientes de escala. Mientras que si se cumple que, $\alpha+\beta>1$, entonces existirán rendimientos crecientes de escala.