5. Teoría de la decisión bajo incertidumbre[1]

CONTENIDOS TEÓRICOS.

5.0. Introducción

5.1. Definición de lotería y función de utilidad cardinal

5.2. Criterio de la utilidad esperada.

5.3. Medidas de aversión al riesgo.

5.4. Formas de reducción del riesgo: agrupamiento, diversificación y difusión.

5.0. Introducción

Uno de los supuestos que se han mantenido en todos los modelos que hemos estudiado en las diferentes asignaturas de Microeconomía ha sido el de *ausencia de incertidumbre*. A continuación, relajamos dicho supuesto y presentamos la estructura básica de decisión bajo *incertidumbre*. Decimos que existe ***incertidumbre*** cuando se dan situaciones en las que la elección de un agente depende de circunstancias desconocidas que escapan a su control. Cuando ocurre esto, decimos que la naturaleza juega, siendo posibles varios resultados mutuamente excluyentes desconociéndose *ex ante* cuál de ellos ocurrirá finalmente. La incertidumbre no se puede evaluar de forma completa. La pandemia de coronavirus en 2020 es un ejemplo de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. Cuando surge primera ola de la pandemia, no se conocían las probabilidades de enfermar y, si una persona se contagiaba de Covid19, no se conocía las probabilidades de morir. Tampoco sabíamos quién estaba infectado o incluso cómo podíamos infectarnos.

Por el contrario, el ***riesgo*** sí puede ser medido de forma que es posible conocer todas las situaciones posibles en la que pueden producirse distintos resultados, así como sus probabilidades de ocurrencia. Viajar en automóvil es un ejemplo de riesgo porque conocemos los posibles resultados y la probabilidad de que ocurran. Podríamos tener un accidente y, si el accidente es grave, podríamos morir. La mayoría de las veces llegamos seguros a nuestro destino, por lo que estamos dispuestos a asumir el riesgo de viajar en coche. Según el Instituto de Información de Seguros de EEUU, las probabilidades de que una persona muera en un accidente automovilístico durante el próximo año es de 1 sobre 47.852. La probabilidad de morir en un accidente automovilístico durante la vida es de 1 sobre 608. Debido a que se pueden estimar las probabilidades de eventos de riesgo, podemos protegernos contra esos resultados

[1] Estas notas están basadas en apuntes del profesor Pedro Álvarez, de la antigua asignatura Teoría de la Decisión y de los Juegos, así como en las notas de clase de Manel Antelo (Universidade de Santiago de Compostela). Hay que señalar que están pendientes de revisión y pueden contener errores.

adversos contratando un seguro de automóvil o un seguro de vida. El seguro nos permite recibir una compensación cuando ocurre un evento asegurado, como un accidente automovilístico.

Las *probabilidades* asociadas a situaciones de riesgo se consideran *objetivas* si pueden basarse en experimentos iguales a la situación a la que nos enfrentamos y que se han realizado en el pasado (por ejemplo, probabilidad de salir cara en el lanzamiento de una moneda al aire). Por el contrario, se consideran *probabilidades subjetivas* si están basadas en la realización de experimentos similares, pero no idénticos (por ejemplo, probabilidad de que un equipo de fútbol gane a su rival en la próxima jornada). En la teoría de la decisión bajo incertidumbre, se considera que las probabilidades son *exógenas* al agente decisor, de forma que éste no puede influir en las probabilidades de sucesos (por ejemplo, probabilidad de que se produzca un terremoto)[2]. Bajo este contexto, es necesario definir una serie de conceptos nuevos. El primero es el concepto de lotería. Asociado a éste, veremos una serie de axiomas que nos permitirán establecer relaciones de preferencias entre las distintas loterías. A continuación, se presentará el concepto de función de utilidad cardinal, la cual nos permitirá caracterizar las diferentes actitudes de los agentes económicos respecto del riesgo. Se explicará el criterio de la utilidad esperada como una de las formas para la toma de decisiones bajo incertidumbre, y se expondrán algunas medidas de aversión al riesgo. Por último, se introducirán algunas de las formas de las que disponen los agentes económicos para la reducción del riesgo. En concreto, veremos tres: el agrupamiento de riesgos, la diversificación de riesgos, y por último, la difusión de riesgos.

Palabras clave: incertidumbre, aversión al riesgo, loterías.

5.1. Definición de lotería y función de utilidad cardinal.

Todo problema de decisión en condiciones de incertidumbre consta de los siguientes componentes básicos:

a) Conjunto de elección o conjunto factible.

$A = \{a_1, a_2, \ldots.., a_N\}$ es un conjunto discreto y finito.

A: conjunto de acciones que elige el agente.

[2] En la llamada economía de la información, sin embargo, las probabilidades de ocurrencia pueden ser parcialmente *endógenas* al estar condicionadas a la toma de decisiones del agente. Por ejemplo, la probabilidad de sufrir un accidente puede ser mayor si el agente ha contratado un seguro a todo riesgo, en relación a la situación en la que el agente no dispone dicho seguro a todo riesgo. Se habla entonces de una situación de *riesgo moral*.

Ejemplo. Un agente económico debe decidir si contratar un seguro, o no, que le cubra un posible accidente de automóvil. Entonces, podemos considerar el conjunto A como aquel que está formado por dos elementos: a_1 asegurarse, y a_2 no asegurarse.

b) Conjunto de estados de la naturaleza y vector de probabilidades.

$S = \{s_1, s_2, \ldots .., s_U\}$ es un conjunto discreto y finito.

S: conjunto de estados de la naturaleza posibles. A los sucesos sobre los que el agente no tiene control se les llama *estados de la naturaleza* (lluvia o sequía; terremoto o no terremoto; alta demanda o baja demanda de un bien, etc.).

Asociado a los distintos estados de la naturaleza se define un vector de probabilidades[3] de ocurrencia.

$P = \{p_1, p_2, \ldots .., p_U\}$

P: vector de probabilidades que asigna una probabilidad a cada uno de los estados de la naturaleza. Dicho vector de probabilidades debe cumplir dos propiedades:

a) $p_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots ., U$.

b) $\sum_{j=1}^{U} p_j = 1$

Ejemplo. Continuando con el ejemplo del problema de decisión de la contratación de un seguro de automóvil, el conjunto *S* podría estar formado por dos posibles estados de la naturaleza: que se produzca un accidente, s_1, con una probabilidad p_1; o que no se produzca el mismo, s_2, con una probabilidad, $p_2 = 1 - p_1$.

c) Función de consecuencias.

$$A \to \mathcal{L}$$
$$a_i \to l_i \equiv \tilde{x}_i = (x_{i1}, \ldots \ldots, x_{iU};\ p_1, \ldots \ldots, p_U)$$

donde $\mathcal{L}$ es definido como el espacio de loterías y $(x_{i1}, \ldots \ldots, x_{iU})$ es el conjunto de *pagos* o *premios*, X .

A cada acción del agente, a_i, se le asigna una *lotería*, $\tilde{x}_i$. Por tanto, una lotería no es más que el par de vectores x y p, asociados a los pagos y las probabilidades con que se reciben esos pagos, respectivamente. En incertidumbre, los agentes eligen *planes de consumo contingentes*, también denominados *loterías* o *juegos*. Un plan de consumo contingente se puede entender como una variable aleatoria que toma un determinado valor con una determinada probabilidad.

Definimos el valor esperado de una lotería *i* (o juego *i*) como

[3] Consideramos en nuestro modelo que estas probabilidades son exógenas. En el tema 6 analizaremos la economía de la información donde abandonaremos tal supuesto, considerando que las probabilidades son endógenas, de forma que el agente con su comportamiento puede afectar a la probabilidad de los distintos sucesos.

$$E(\tilde{x}_i) = \sum_{k=1}^{U} p_{ik} x_{ik}$$

El valor esperado es el resultado de una situación incierta, obtenido como la suma ponderada de los valores asociados a cada posible estado de la naturaleza, y siendo la ponderación la probabilidad de ocurrencia de cada estado.

Definimos una lotería *i* como justa (o juego *i* como justo) como aquella situación incierta que genera un valor esperado igual a cero, $E(\tilde{x}_i) = 0$.

Las loterías también se pueden representar de forma extensiva.

Una vez que tenemos un determinado criterio de elección bajo incertidumbre, el agente puede elegir aquella lotería óptima de acuerdo al cumplimiento de dicho criterio.

Ejercicio. Considere un juego en el que, si lanzo un dado y obtengo un número inferior o igual a 4, me pagan 60 €; por el contrario, si obtengo un número superior a 4, debo pagar 30 €. Suponga un juego alternativo en el que lanzo una moneda al aire y, si sale cara, me pagan 60€; por el contrario, si sale cruz, debo pagar 30 €. Represente dichas loterías y calcule su valor esperado.

Un criterio de elección en incertidumbre es la regla del valor esperado del juego. Bajo este criterio, el agente elegirá aquella lotería cuyo valor esperado sea mayor.

$$maxE(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{U} p_k x_k$$

La principal ventaja de este criterio es su simplicidad, mientras que el principal inconveniente es su inconsistencia con la evidencia empírica[4].

Decimos que una *lotería* $\tilde{x}_i$ es *aditiva* si se añade a una renta inicial segura w_0, de manera que $\widetilde{w}_i = w_0 + \tilde{x}_i$. Hay separación perfecta entre w_0 y la lotería $\tilde{x}_i$.

Ejercicio. Un agente económico con una riqueza inicial de 12.000 € plantea contratar un seguro a todo riesgo que le permita cubrirse económicamente de un posible accidente de circulación. Considere que el coste económico del accidente asciende a 6.000 €. De esta forma, si no se asegura y no ocurre ningún siniestro, su renta permanece inalterada. Por el contrario, si no se asegura y ocurre un siniestro, su renta quedará reducida a 6.000 €. Considere que el coste del seguro (también conocido como prima del seguro) a todo riesgo es de 700 € y que la probabilidad de sufrir el accidente es de 0,1.

[4] En el Anexo A1 se presente la paradoja de San Petersburgo que presenta un ejemplo de inconsistencia del criterio con la evidencia empírica.

a) Determine el conjunto de elección, el conjunto de estados de la naturaleza y el vector de probabilidades asociado.
b) Determine la función de consecuencias.

d) Relación de preferencias sobre el conjunto $\mathcal{L}$.
Debemos encontrar una función que permita establecer relaciones de preferencia entre loterías. Al igual que en la teoría del consumidor en certidumbre, para conocer estas relaciones necesitamos definir una serie de axiomas sobre las preferencias.

La relación de preferencias ($\succcurlyeq$) está definido sobre el espacio de loterías $\mathcal{L} = \{l_i\}$ si se cumple:

A.I) Existe una relación de preferencias sobre un conjunto de pagos definidos por X que es completa y transitiva.

Dadas $l_a\ e\ l_b \in \mathcal{L}$, o bien $l_a \succcurlyeq_j l_b$, o bien $l_b \succcurlyeq_j l_a$ o ambos.

Dadas $l_a, l_b\ e\ l_c \in \mathcal{L}$ si $l_a \succcurlyeq_j l_b$, e $l_b \succcurlyeq_j l_c$, entonces $l_a \succcurlyeq_j l_c$

A.II) Reducción de loterías compuestas.

Definimos como lotería compuesta aquella en la que algún o todos sus pagos son, a su vez, loterías.

Ejemplo. Supongamos la siguiente lotería compuesta:

$$l_C \equiv \left[\underbrace{(2.000{,}1.000; 0{,}5, 0{,}5)}_{l_a}, \underbrace{(3.000{,}1.000; 0{,}3, 0{,}7)}_{l_b}; 0{,}5{,}0{,}5 \right]$$

De acuerdo al axioma A.II, dicha lotería compuesta se puede reducir a una lotería simple con pagos ciertos donde las probabilidades de cada uno de los pagos se obtienen de acuerdo a las reglas de la probabilidad:

$l_C \sim l_e = (3.000, 2.000, 1.000; 0{,}15, 0{,}25, 0{,}6)$

A.III) Continuidad.

Ordenamos los pagos o premios de mayor a menor, siendo x^M, x^m el máximo y el mínimo de los pagos que pertenecen a X, entonces:

$$\forall x_k \in X, \exists p_k: x_k \sim (x^M, x^m; p_k, 1 - p_k)$$

Existe otro pago x_k, distinto a x^M, x^m que también pertenece a X, cuya probabilidad asociada es tal que el agente económico es indiferente a recibir x_k con certeza o participar en una lotería cuyos pagos son x^M, x^m con probabilidad $p_k, 1 - p_k$, respectivamente.

Ejemplo. Consideremos el siguiente conjunto de pagos $X = \{2.000, 1.000, 500, 100\}$. De acuerdo al axioma A.III, vamos a considerar que

$$\exists p_{1000}: 1.000 \sim (2.000, 100;\ p_{1000}, 1 - p_{1000})$$

Podríamos decir, entonces, que toda lotería tiene siempre asociada una renta tal que recibida con certeza le deja indiferente en relación a aquella. A esta renta la llamo *equivalente cierto*.

A.IV) Independencia.

Si en una lotería compuesta sustituimos todos o algunos de sus pagos por sus equivalentes ciertos, la nueva lotería ha de ser indiferente a la anterior.

Ejemplo. Supongamos una lotería compuesta como $l_C = [(2.000{,}0; 0{,}5, 0{,}5), 300; 0{,}7, 0{,}3]$, siendo su equivalente cierto 900, de forma que: $900 \sim (2.000, 0; 0{,}5, 0{,}5)$. Entonces, por el axioma A.IV de independencia:

$$[(2.000{,}0; 0{,}5, 0{,}5), 300; 0{,}7, 0{,}3] \sim (900{,}300; 0{,}7, 0{,}3)$$

A.V) Dominancia estocástica de primer orden (DEPO).

Ordenamos los pagos o premios de mayor a menor, siendo x^M, x^m el máximo y el mínimo de los pagos que pertenecen a X, entonces:

$$\forall l_i, l_j \in L$$
$$l_i = (x^M, x^m; p_i, 1 - p_i) \;\; si\; p_i > p_j \Rightarrow l_i \succ l_j$$
$$l_j = (x^M, x^m; p_j, 1 - p_j)$$

Las loterías cuya probabilidad es mayor sobre los premios mayores son loterías más preferidas. La DEPO es lo equivalente a las preferencias monótonas.

5.2. Criterio de la utilidad esperada.

Si se cumplen los axiomas A.I-A.V, existirá una función de utilidad cardinal[5], $U(w)$, tal que podemos recoger la relación de preferencias sobre $\mathcal{L}$, comparando el valor esperado de dicha función de utilidad para cada una de las loterías. A esta función, $V(l)$, se también se la conoce como función de utilidad *von Neumann-Morgenstern*[6]:

$$\exists\, U(w)\colon \forall\, l_i, l_j \in \mathcal{L}, \quad l_i \succcurlyeq l_j \;\Leftrightarrow V(l_i) \geq V(l_j)$$
$$V(l_i) = \textstyle\sum_{k=1}^{U} p_{ik} U(w_{ik}) \qquad (1)$$
$$V(l_j) = \textstyle\sum_{k=1}^{U} p_{jk} U(w_{jk})$$

donde $V(l_i)$ y $V(l_j)$ se define como la utilidad esperada del juego de la lotería *i* y la lotería j, respectivamente. Es decir, que una lotería *i* será preferida a otra j, si la

[5] En el anexo A2 se puede consultar la definición matemática de la función de utilidad cardinal o de *Bernoulli*, así como alguna de sus propiedades más importantes.

[6] En su libro *The Theory of Games and Economic Behaviour*, J. von Neumann y O. Morgenstern desarrollaron modelos matemáticos para analizar el comportamiento económico de los agentes económicos en condiciones de incertidumbre, así como los primeros modelos de teoría de juegos. Si quieres profundizar en a biografía de John von Neumann, consulta el siguiente enlace: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/neumann.htm . Para saber más sobre la vida de Oskar Morgenstern, consulta: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/morgenstern.htm.

utilidad esperada asociada a la primera es mayor que la utilidad esperada de la segunda. En ese caso, el agente económico elegirá participar en la lotería *i* en detrimento de *j*[7].

Ejemplo. Supongamos un agente económico que se enfrenta a dos loterías, l_1 y l_2, definidas como:

$$l_1 = (20.000, 10.000, 5.000, 1.000; 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}4)$$

$$l_2 = (20.000, 10.000, 5.000, 1.000; 0{,}1, 0{,}4, 0{,}4, 0{,}1)$$

Suponiendo que debe elegir una de ellas, ¿cuál de las dos será la elegida si

a) la función de utilidad es $U(w) = w$?

b) La función de utilidad es $U(w) = \ln(w)$?.

A continuación, vamos a presentan alguna de las propiedades que posee la función de utilidad cardinal.

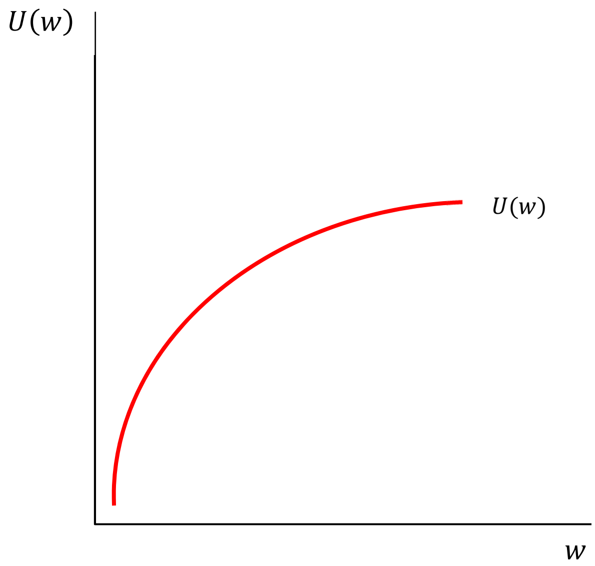
1) La función de utilidad cardinal es creciente, continua y dos veces diferenciable.

   Ejemplo. Representación gráfica de una función de utilidad de un agente económico.

   El hecho de que en la Figura 1, la función de utilidad sea creciente y cóncava, nos expresa el hecho de que, a medida que el nivel de ganancias aumenta, el valor de la pendiente de la función de utilidad disminuye; es decir, la utilidad marginal de las ganancias es decreciente. A continuación, vamos a comprobar que dicha propiedad no es general, sino que responde a un determinado caso particular.

[7] A pesar de que la teoría de la utilidad es esperada es el principal criterio utilizado en los problemas de decisión bajo incertidumbre, éste no está exento de numerosas críticas. El Anexo A3 muestra la inconsistencia del criterio de la utilidad esperada a través de la denominada paradoja de *Allais*.

Figura 1



Representación gráfica de una función de utilidad cardinal.

2) La derivada segunda de la función de utilidad cardinal nos informa de la actitud del agente económico frente al riesgo.

Para demostrarlo, vamos a usar el concepto de *equivalente cierto*.

Dada una *lotería* $l = (w_1, w_2; p, 1-p)$, se define el equivalente cierto de la lotería l como:

$$EC(l) = w^*: w^* \backsim l \iff U(w^*) = V(l) \qquad (2)$$

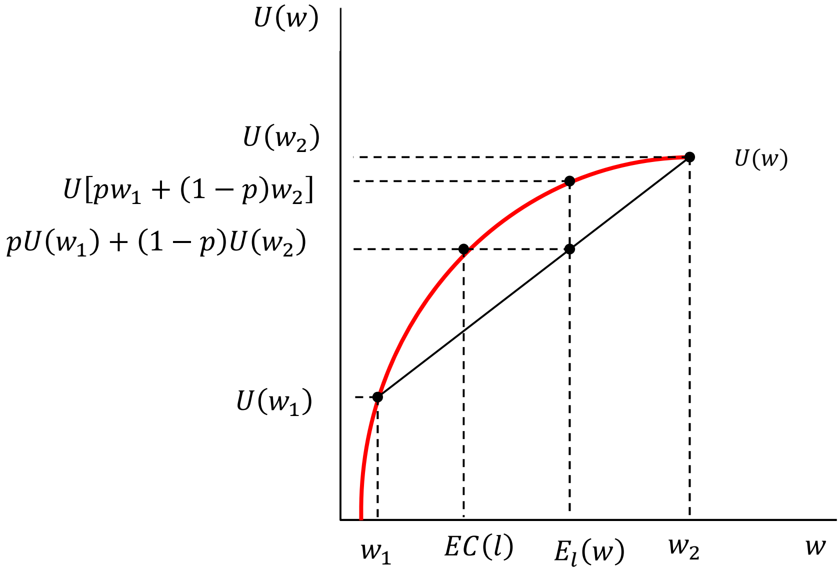
Definíamos el equivalente cierto asociado a una lotería como aquella cantidad de renta tal que recibida con certeza dejaría al agente económico indiferente entre conseguir tal renta con certeza o participar en la lotería.

Podemos definir tres actitudes o comportamientos de un agente económico frente al riesgo, si comparamos el *equivalente cierto* con la renta esperada de una determinada lotería. Así distinguimos entre:

a) comportamiento averso al riesgo $\Leftrightarrow EC(l) < E_l(w)$;
b) comportamiento neutral al riesgo $\Leftrightarrow EC(l) = E_l(w)$;
c) comportamiento amante al riesgo $\Leftrightarrow EC(l) > E_l(w)$.

Si suponemos que el agente económico es averso al riesgo, entonces, su función de utilidad cardinal será cóncava, tal y como se observa en la Figura 2.

Figura 2



Función de utilidad cardinal para un agente averso al riesgo

Demostración. A partir de la definición de concavidad de una función,

$$U(w) \Leftrightarrow U[\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2] > \lambda U(w_1) + (1-\lambda)U(w_2) \tag{3}$$

Sustituyendo λ por *p*:

$$U[pw_1 + (1-p)w_2] > pU(w_1) + (1-p)U(w_2) \tag{4}$$

donde el término de la izquierda es igual a la utilidad del pago esperado $U\left[E_{l_i}(w)\right]$, mientras que el término de la derecha es igual a la utilidad esperada de la lotería, $E_l[U(w)]$, que es igual a la utilidad que le reporta al agente económico el equivalente cierto, $U[EC(l)]$.

$$U[E_l(w)] > E_l[U(w)] \equiv U[EC(l)] \tag{5}$$

dado que $U(w)$ es una función *monótona*[8], entonces:

el individuo es averso al riesgo $\Leftrightarrow E_l(w) > EC(l)$.■

Ejercicio. Represente gráficamente una función de utilidad cardinal para los siguientes comportamientos:

a) Agente neutral al riesgo.

b) Agente amante al riesgo.

[8] Decimos que una función $f(x)$ es *monótona* si dado $y \geq z$, entonces $f(y) \geq f(z)$.

5.3. Medidas de aversión al riesgo

En el análisis de las elecciones económicas en situaciones de riesgo, es conveniente disponer de una medida cuantitativa de la aversión al riesgo de los agentes económicos. Vamos a analizar dos medidas de aversión al riesgo:

A) *Prima de riesgo de Markowitz*[9] o, también denominada de coste del riesgo.

$$PR(l) = E_l(w) - EC(l) \tag{6}$$

La prima al riesgo de Markowitz nos indica la valoración económica que hace un agente económico del riesgo inherente a una determinada lotería.

Ejercicio. Calcule la prima de riesgo de Markowitz de un agente económico, con una función de utilidad cardinal, $U(w) = \ln(w)$ que se enfrenta a la siguiente lotería $l = (30, 5; 0{,}2, 0{,}8\ )$

B) *Índices de aversión de Arrow-Pratt*

B1) Índice de aversión absoluta al riesgo

$$AAR(w) = -\frac{U_w''}{U_w'} \tag{7}$$

Este índice medirá el grado de aversión al riesgo, de forma que un agente *i* es más averso al riesgo que el agente *j* si $AAR_i(w) > AAR_j(w)$. El grado de aversión al riesgo dependerá del grado de concavidad de la función de utilidad cardinal.

Por otra parte, dado un agente con una riqueza inicial w_0, y una función de utilidad $U(w)$ nos podríamos preguntar la relación existente entre $AAR(w)$ y w_0. Podríamos intuir que dicha relación es negativa. Esta intuición se cumple para algunas funciones de utilidad. Por ejemplo, la función logarítmica, $U(w) = ln(w)$. A las funciones que cumplen que: $\frac{d[AAR(w)]}{dw} < 0$, se las conoce como funciones *DARA*. Hay, sin embargo, otras funciones que cumplen que: $\frac{d[AAR(w)]}{dw} = 0$. Por ejemplo, la función exponencial, $U(w) = -e^{-\alpha\omega}$. A estas funciones se las conoce como funciones *CARA*. Por último, las funciones que cumplen que: $\frac{d[AAR(w)]}{dw} > 0$, son funciones *IARA*. Por ejemplo, $U(w) = \alpha w - \beta w^2$, siendo $\alpha, \beta > 0$.

B2) Índice de aversión relativa al riesgo

$$ARR = -w\frac{U_w''}{U_w'} = -\frac{d(U_w')}{dw}\frac{w}{U_w'} \tag{8}$$

[9] Harry M. Markowitz fue premio Nobel en 1990 por sus contribuciones a la teoría de la economía financiera. Uno de sus modelos más importantes es el modelo de selección de carteras de activos inciertos. Si quieres profundizar en a biografía de Harry M. Markowitz, consulta el siguiente enlace: http://www.eumed.net/cursecon/economistas/markowitz.htm.

El índice de aversión relativa al riesgo está expresado en términos de elasticidad.

A continuación, vamos a definir los conceptos de *prima justa* y *prima de reserva*, para a continuación relacionar ambas, con la prima de riesgo de Markowitz.
Prima justa. Definimos una prima justa como aquella prima que representa la pérdida esperada en un determinado juego.

Ejemplo. Consideramos un agente económico que dispone de una renta inicial w_0 y que se enfrenta a la posibilidad de sufrir una pérdida de L, con una probabilidad p^L , siendo $w_0 > L$.
La lotería se definirá como:

$$\tilde{x} = [-L, 0;\ p^L, (1-p^L)\ ]$$

siendo $E(\tilde{x}) = -p^L L$, la "ganancia esperada" de la lotería.
Podemos escribir la lotería añadiendo la renta inicial w_0 de dicho agente como:

$$l = [w_0 - L, w_0;\ p^L, (1-p^L)\ ]$$

La renta esperada final por parte del agente económico será igual a:

$$E_l(w) = p^L(w_0 - L) + (1-p^L)w_0$$

La prima justa, que denotamos por P_J, será igual a la pérdida esperada de la lotería (con valor positivo):

$$P_J(\tilde{x}) = -E(\tilde{x}) = p^L L$$

Prima de reserva. Definimos la prima de reserva para un agente económico averso al riesgo como aquella prima máxima que está dispuesto a pagar el agente económico por evitar completamente el riesgo económico. La prima de reserva se define como la suma de la prima justa y la prima de riesgo de Markowitz.

$$P_r(l) = P_J(\tilde{x}) + PR(l)$$

Ejercicio. Consideramos un agente económico averso al riesgo con una renta inicial w_0=6.000€ y que se enfrenta a la posibilidad de sufrir una pérdida de L=3.000€, con una probabilidad p^L=0,1.

a) Calcule la prima justa, la prima de riesgo así como y la prima de reserva, suponiendo que la función de utilidad cardinal presenta la siguiente forma $U(w) = ln(w)$.
b) Represente gráficamente dichas medidas de riesgo.

Frente al valor exacto de la prima de reserva, la fórmula de Pratt[10] establece que dado un agente con una riqueza inicial w_0, y una función de utilidad $U(w)$, que se

[10] En el Anexo A4 se presenta la demostración de dicha fórmula.

enfrenta a una lotería $\tilde{x}_i$ justa, siendo $E(\tilde{x}_i) = 0$, y $Var(\tilde{x}_i) = \sigma^2$, entonces se puede aproximar la prima de reserva (así como la prima de riesgo de Markowitz) a partir de la siguiente expresión:

$$P_r(l_i) = PR(l_i) \approx \frac{1}{2}\sigma^2 AAR(w_0)$$

Así pues, lo que un agente averso al riesgo está dispuesto a pagar por evitar enfrentarse a una lotería justa es una cantidad aproximadamente proporcional a su índice de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt. Cuanto mayor sea el grado de aversión al riesgo, mayor será la prima de riesgo asociada a una determinada lotería.

5.4. Formas de reducción del riesgo: agrupamiento, diversificación y difusión.

En apartados anteriores se ha demostrado que los agentes económicos aversos al riesgo están dispuestos a pagar por reducir el riesgo, aumentando su nivel de bienestar. En este contexto, está justificada la existencia de instituciones como las empresas aseguradoras, los mercados de futuros, o la seguridad social. Pero, ¿de qué forma estas instituciones pueden reducir el coste del riesgo de los agentes económicos que contratan sus servicios?. Vamos a ver tres posibles formas: el agrupamiento de riesgos, la diversificación de riesgos, y la difusión del riesgo.

5.4.1. Agrupamiento de riesgos[11]

La agrupación de riesgo se produce cuando los agentes económicos sujetos a incertidumbre acuerdan compartir las rentas totales obtenidas en todos sus juegos.

Existen numerosas instituciones que agrupan riesgos de diferentes agentes económicos con el objetivo de reducir el coste de ese riesgo. Es el caso de la Seguridad Social, o de las empresas de seguros. En estos casos, los agentes económicos realizan aportaciones monetarias periódicas que van a parar a una caja común, de forma que cuando alguno de sus miembros sufre algún tipo de contingencia, ésta es cubierta de forma total o parcial con el dinero de dicha caja común.

Nuestro objetivo es demostrar que la decisión de agrupar de riesgos genera un bienestar para los agentes económicos mayor que la decisión de no agrupación.

Vamos a ver el caso más sencillo de agrupación de riesgos con únicamente dos agentes económicos: A y B. Supongamos que cada uno de estos agentes económicos dispone de una renta w_0, pudiendo sufrir una pérdida económica L con probabilidad P_L. Cada agente debe decidir si agrupar su renta con la del otro agente; o bien enfrentarse sólo a la posible pérdida económica.

[11] Este apartado está basado en el capítulo 19 del libro "Microeconomía" 3ª Edición de H. Gravelle y R. Rees, editado por Pearson Prentice Hall.

Empecemos viendo cuál es la lotería asociada a la decisión de no agrupar rentas para el agente económico i-ésimo:

$$l_{\bar{a}}^{i} = (w_0, w_0 - L; 1 - p_L, p_L)$$

La utilidad esperada del agente económico i-ésimo será:

$$V(l_{\bar{a}}^{i}) = (1 - p_L)U(w_0) + p_L U(w_0 - L)$$

A continuación, analicemos la decisión de A y B de formar un consorcio agrupando sus rentas en una caja común. Una vez pasada la posible contingencia, cada agente recibe la mitad de la renta total que hay en dicha caja. Suponiendo que las posibles pérdidas de cada agente son idénticas (igual a L) e independientes, existen cuatro posibles resultados para cada agente económico, tal y como se señala en la Tabla 1:

Tabla 1

Renta agente A	Renta agente B	Probabilidad de suceso	Renta
w_0	w_0	$(1-p_L)^2$	w_0
$w_0 - L$	w_0	$P_L(1-p_L)$	$w_0 - \frac{L}{2}$
w_0	$w_0 - L$	$(1-p_L)p_L$	$w_0 - \frac{L}{2}$
$w_0 - L$	$w_0 - L$	p_L^2	$w_0 - L$

Rentas obtenidas por dos agentes económicos agrupando riesgos

De esta forma, la lotería asociada a decisión de agrupar riesgos para el agente económico i-ésimo será:

$$l_a^i = \left(w_0, w_0 - \frac{L}{2}, w_0 - L; (1-P_L)^2, 2P_L(1-P_L), P_L^2\right)$$

Por tanto, la utilidad esperada asociada a la decisión de agrupar rentas del agente económico i-ésimo será:

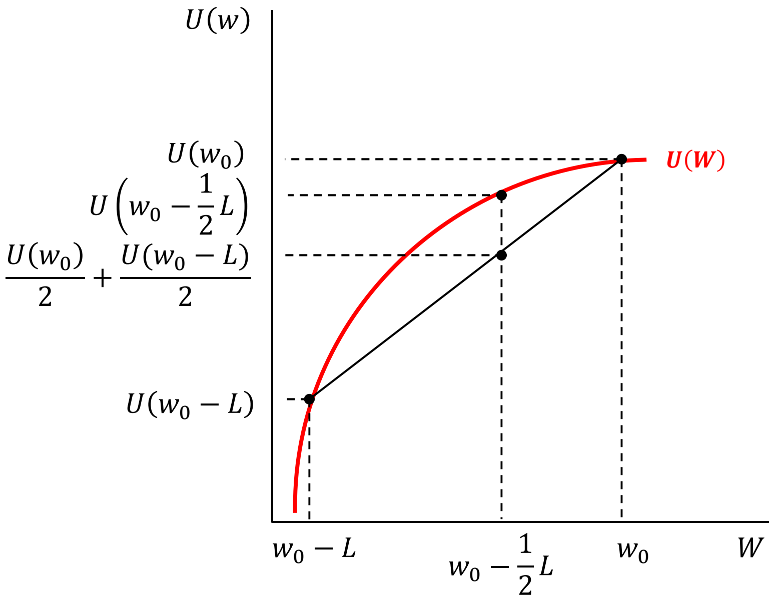
$$V(l_a^i) = (1 - P_L)^2 U(w_0) + 2P_L(1-P_L)U\left(w_0 - \frac{L}{2}\right) + P_L^2 U(W_0 - L)$$

Se puede demostrar que $V(l_a^i) > V(l_{\bar{a}}^i)$ considerando que los agentes económicos son aversos al riesgo, por lo que $V(l_a^i) - V(l_{\bar{a}}^i) > 0$.

$$V(l_a^i) - V(l_{\bar{a}}^i) = [(1-P_L)^2 - (1-P_L)]U(w_0) + (P_L^2 - P_L)U(w_0 - L) + 2[P_L(1-P_L)]\, U\left(w_0 - \frac{L}{2}\right)$$
$$= 2P_L(1-P_L)\left[U\left(w_0 - \frac{L}{2}\right) - \frac{U(w_0)}{2} - \frac{U(w_0 - L)}{2}\right]$$

Dado que los agentes económicos son aversos al riesgo, la función de utilidad cardinal *U(w)* será cóncava, por lo que el término dentro del corchete será siempre positivo. Dado que las probabilidades son también positivas y menores que la unidad, entonces, se demuestra que $V(l_a^i) - V(l_{\bar{a}}^i) > 0$. Los agentes económicos están mejor en una situación en la que se agrupan las rentas. La agrupación no cambia las rentas esperadas de los agentes económicos pero sí reduce el riesgo asociada a las posibles rentas.

Figura 3



Agrupación de rentas de un agente averso al riesgo

5.4.2. Diversificación del riesgo

La diversificación del riesgo se produce cuando un agente económico decide participar en varios proyectos de inversión pequeños en vez de en uno único y grande. De esta forma, se reparte la inversión entre distintas situaciones arriesgadas, reduciendo el riesgo global. La diversificación se basaría entonces en el viejo refrán "no pongas todos los huevos que compres en la misma cesta". Esta estrategia es utilizada tanto por los pequeños inversores, cuando adquieren por ejemplo un fondo de inversión, hasta las grandes empresas multinacionales, cuando entran en nuevos sectores productivos, distintos a los ya operativos.

Veamos un ejemplo. Supongamos una situación en la que un agente económico desea asignar una determinada renta W entre dos activos financieros: A y B, independientes entre sí, pero con un mismo rendimiento esperado y varianza. Supongamos que ambos se distribuyen bajo una misma distribución estadística:

$$r_i \hookrightarrow i.i.d.(R, \sigma^2),\ \forall\ i = A, B$$

siendo R la rentabilidad esperada, mientras que σ^2 se definiría como la varianza asociada a la rentabilidad real de los activos, medida que aproximaría el riesgo del activo.

Consideremos que el agente económico asigna α al activo A, mientras que $(1-\alpha)$ es asignado al activo B, siendo $\alpha \in (0,1)$. Demostraremos que es más ventajoso diversificar la renta entre los dos activos, a pesar de que el rendimiento esperado, R, y la varianza, σ^2, son iguales, frente a la opción de invertir en uno solo. Si el agente económico decide diversificar, la renta obtenida a partir de su cartera de inversión será:

$$\alpha r_A W + (1-\alpha) r_B W = [\alpha r_A + (1-\alpha) r_B] W = r_C W$$

donde $r_C = \alpha r_A + (1-\alpha) r_B$ es la rentabilidad real de la cartera de activos A y B, siendo r_A y r_B la rentabilidad real de los activos A y B, respectivamente.

La rentabilidad esperada de la cartera de inversión será:

$$E(r_C) = E[\alpha r_A + (1-\alpha) r_B] = \alpha E(r_A) + (1-\alpha) E(r_B) = R$$

Por su parte, la varianza de la cartera de inversión se definirá como:

$$\begin{aligned} Var(r_C) &= Var[\alpha r_A + (1-\alpha) r_B] = \alpha^2 Var(r_A) + (1-\alpha)^2 Var(r_B) + 2\alpha(1-\alpha) Cov(r_A, r_B) \\ &= [\alpha^2 + (1-\alpha)^2]\sigma^2 < \sigma^2 \end{aligned}$$

Se demuestra, por tanto, que la configuración de una cartera de una inversión con dos activos A y B, independientes entre sí, permite disminuir el riesgo. La estrategia de diversificación, por tanto, es beneficiosa para el agente económico, siendo el efecto mayor si consideráramos activos cuyo rendimiento está correlacionado negativamente[12].

Veamos cuál es la proporción óptima de renta invertida en el activo A, de forma que logremos minimizar la varianza asociada a la cartera de inversión del agente económico.

$$\underset{\alpha}{Min}\, Var(r_C) \equiv [\alpha^2 + (1-\alpha)^2]\sigma^2$$

$$\frac{dVar(r_C)}{d\alpha} = 0 \rightarrow 2\alpha^*\sigma^2 + 2(1-\alpha^*)(-1)\sigma^2 = 0$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2}$$

La cartera de inversión óptima está compuesta en un 50% por el activo A y el otro 50% por el activo B.

$$Var(r_C) = [\alpha^2 + (1-\alpha)^2]\sigma^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right]\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

5.4.3. Difusión del riesgo

Demostraremos que la difusión del riesgo permite reducir el riesgo con un ejemplo. Consideremos un proyecto de inversión en el que se puede ganar 10.000€ o bien perder 9.000€ con idéntica probabilidad. Consideremos un agente económico que

[12] En el caso de la bolsa de valores, la diversificación no logra eliminar el riesgo totalmente dado que existen *riesgos no diversificables*. De hecho, aunque existen casos de rendimientos de valores que tienen una correlación negativa, la mayoría están correlacionados positivamente. De esta forma, cuando la situación económica general de un país empeora, lleva aparejada una caída generalizada de los rendimientos de los activos.

dispone de una renta segura igual a 10.000€, cuyas preferencias vienen determinadas por la función de utilidad cardinal: $U(w) = ln(w)$.

a) Demuestre que el agente económico no llevaría a cabo el proyecto.

b) Suponga que el proyecto de inversión se puede asumir entre n diferentes socios, disponiendo todos ellos de la misma dotación inicial de renta e idénticas preferencias. ¿Cuál será el número mínimo de socios que llevaría a que cada agente estuviese dispuesto a participar en el proyecto?.

ANEXO A1. La regla del valor esperado y la paradoja de San Petersburgo.

La regla del valor esperado puede considerarse un criterio alternativo a la regla de la utilidad esperada. Utilizando dicha regla se elegiría aquella lotería cuyo valor esperado fuera el máximo. A pesar de su sencillez, el criterio del valor esperado suele ser inconsistente con la evidencia empírica. Podemos demostrarlo presentando la denominada *paradoja de San Petersburgo*, publicada por Daniel Bernoulli en 1738.

Paradoja de San Petersburgo

Consideremos un juego en el que se lanza una moneda al aire. Si sale cara, el juego finaliza y el jugador obtiene 2€. Si sale cruz, se vuelve a tirar la moneda. En caso de que salga cara en este segundo lanzamiento el juego finalizaría y el jugador obtendría $2^2 = 4$€. Si sale cruz, se vuelve a tirar la moneda….En definitiva, el juego consiste en lanzar una moneda hasta que salga cara. En el caso de que saliera por primera vez en la n-ésima tirada, el jugador ganaría 2^n€. Deberíamos entonces preguntarnos: ¿cuánto estaría dispuesto a pagar un agente económico para poder participar en este juego?.

Calculemos el valor esperado del juego: la probabilidad de que salga cara por primera vez en la n-ésima tirada será:

$$p_n = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots}_{n-1\ veces} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Por tanto, el valor esperado será:

$$E_l(w) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Por tanto, frente a esta lotería, el criterio del valor esperado indica que un agente económico debería estar dispuesto a pagar una cantidad infinita por participar en ella. Esta predicción, sin embargo, no concuerda con la evidencia empírica.

Una posible explicación a esta paradoja podría venir del hecho de que los agentes económicos dan valor económico al riesgo inherente a situaciones de incertidumbre, por lo que el valor de los pagos de un juego debería medirse no solo en términos de ganancia esperada sino en términos de la utilidad que dicha ganancia le genera al agente económico.

ANEXO A2. Definición de la función de utilidad de Bernoulli y propiedades.

Definición:

La función $U(w): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como la utilidad del pago w. A partir de cualquier función $U(w)$ se puede definir una función de utilidad sobre el conjunto de loterías L. Para una lotería $l_i \in L$:

$$V(l_i) = \sum_{k=1}^{U} p_{ik} U(w_{ik}) = E_{l_i}[U(w)]$$

Nos referimos a las funciones $U(w)$ como *funciones de utilidad de Bernoulli*, y a las funciones de utilidad sobre loterías $V(l)$ como *funciones de utilidad von Neumann-Morgenstern*.

La función $U(w)$ permite transformaciones afines positivas que mantienen el orden de preferencia a la hora de ordenar distintas loterías. Por tanto, dada la función $U(w)$ es posible su reemplazo por otra función $\breve{U}(w)$ siempre que:

$$\breve{U}(w) = a + bU(w)$$

para cualquier valor de w, don a y b son constantes, con $b > 0$.

Demostración:

$$V(l_i) = \sum_{k=1}^{U} p_{ik} U(w_{ik}) = E_{l_i}[U(w)]$$

$$\breve{V}(l_i) = \sum_{k=1}^{U} p_{ik} \breve{U}(w_{ik}) = a \sum_{k=1}^{U} p_{ik} + b \sum_{k=1}^{U} p_{ik} U(w_{ik}) = a + bV(l_i)$$

Se cumplirá que la ordenación de loterías de acuerdo a las preferencias del agente será la misma si nos aseguramos que $\frac{d\breve{V}(l_i)}{dV(l_i)} > 0$.

Por otra parte, se ha demostrado que $\frac{d\breve{V}(l_i)}{dV(l_i)} = b$. Por tanto, b solo podrá tomar valores positivos, $b > 0$.■

Función de utilidad cardinal

Mientras que en la teoría de consumo bajo ausencia de incertidumbre eran posibles todas las transformaciones monótonas positivas, fueran lineales o no, en el caso de la teoría de consumo bajo incertidumbre las transformaciones deben ser lineales.

Así, las preferencias de consumo Cobb-Douglas podían estar representadas de forma equivalente por las siguientes expresiones: $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ o $\breve{U}(x_1, x_2) = \alpha ln(x_1) + \beta ln(x_2)$, dado que el escalar que resultaba de sustituir los valores de consumo x_1 y x_2 en $U(x_1, x_2)$ o $\breve{U}(x_1, x_2)$ solo servía para ordenar cestas de consumo. Decíamos entonces que la función de utilidad era de carácter *ordinal*. En el caso de la teoría de consumo bajo incertidumbre, dicha transformación no es posible, dado que los distintos valores que determina una determinada función de utilidad pueden influir en la ordenación de distintas loterías, y por tanto, en la actitud respecto del riesgo. Es por ello que hablamos de una *función de utilidad cardinal*.

Ejemplo:

Considere las siguientes loterías:

$$l_1 = (20.000, 10.000, 6.000, 1.000; 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}4)$$
$$l_2 = (20.000, 10.000, 6.000, 1.000; 0{,}1, 0{,}4, 0{,}4, 0{,}1)$$

a) Ordene las loterías si la función de utilidad cardinal fuera $U(w) = w^{\frac{1}{2}}$.
b) Considere la siguiente transformación monótona positiva: $\breve{U}(w) = [U(w)]^2$. Demuestre que la ordenación de preferencias del agente económico ha cambiado con dicha transformación

Volviendo a la paradoja de San Petersburgo, Bernoulli señala que la pérdida de una cantidad de dinero L implica una variación en la utilidad que, en valor absoluto, es mayor que la variación provocada por la ganancia de la misma cantidad. Por tanto:

$$U(w_0) - U(w_0 - L) > U(w_0 + L) - U(w_0)$$

Para que se cumpla tal desigualdad, $U(w)$ debe ser una función cóncava respecto a las ganancias. A partir de este resultado, se enuncia la conjetura de Bernoulli en la que se define la siguiente función de utilidad $U(w_n) = ln(w_n)$, por lo que la utilidad esperada de este juego:

$$E[U(w)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} ln(2) = 2ln(2) = 1{,}39$$

El valor de la utilidad esperada de este juego toma un número finito.

En 1944, John von Neumann y Oskar Morgenstern demuestran formalmente la conjetura sentando las bases de la teoría de la utilidad esperada.

ANEXO A3. Inconsistencia de la teoría de la utilidad esperada: la paradoja de Allais.

La regla de la utilidad esperada se basa en el supuesto de que la conducta de los agentes económicos es racional. A pesar de podríamos pensar que los axiomas en los que se basa dicha teoría parecen razonables, la evidencia empírica muestra que la conducta real de los agentes dista de forma notable de lo señalado por tales axiomas. A continuación, vamos a presentar la *paradoja de Allais*, enunciada en 1953 y que presenta una inconsistencia en la teoría de la utilidad esperada relativa a la divergencia entre los valores predichos con los observados.

Experimento

Considere una situación en la que un agente económico debe elegir entre dos juegos:

- *Juego A*. Recibir 1 € con probabilidad 100%.
- *Juego B*. Recibir 5 € con probabilidad del 10%, 1 € con probabilidad de un 89%, no recibir nada con probabilidad de 1%.

Antes de seguir adelante, el agente económico debe elegir uno de estos juegos. A continuación, se presentan dos nuevos juegos.

- *Juego C*. Recibir 1 € con probabilidad 11% o no recibir nada con una probabilidad de un 89%.
- *Juego D*. Recibir 5 € con probabilidad del 10%, o no recibir nada con probabilidad de un 90%.

A continuación, el agente económico anota el juego que prefiere.

Resultados del experimento

Muchas personas prefieren el juego A respecto a B, así como el juego D respecto a C. Sin embargo, estas elecciones violan los axiomas de la utilidad esperada.

Demostración

A continuación, señalemos las implicaciones de que $A \succcurlyeq B$:

$$U(1) > 0{,}1U(5) + 0{,}89U(1) + 0{,}01U(0)$$

Reordenando esta expresión, tenemos que

$$0{,}11U(1) > 0{,}1U(5) + 0{,}01U(0)$$

y añadiendo $0{,}89u(0)$ a cada uno de los miembros, tenemos que

$$0{,}11U(1) + 0{,}89U(0) > 0{,}1U(5) + 0{,}9U(0)$$

Por tanto, en la segunda etapa el agente económico maximizador de la utilidad esperada debería preferir C respecto a D, para cumplir los axiomas del criterio de la utilidad esperada.■

Implicaciones de la paradoja de Allais

La importancia de la paradoja de Allais es aún objeto de controversia en cuanto a crítica de la teoría de la decisión racional bajo incertidumbre.

Por un lado, algunos economistas señalan que esta anomalía invalida el criterio de la utilidad esperada, por lo que son necesarios nuevas aproximaciones teóricas que describan la conducta de los agentes económicos. Dentro de esta corriente se encuadra la denominada *economía del comportamiento*, la cual se dedica a estudiar los patrones de elección de los consumidores utilizando conceptos, e ideas de otras ciencias sociales como la psicología o la sociología.

Por el contrario, otra corriente de economistas considera que estas paradojas no sirven para invalidar completamente la teoría de decisión bajo incertidumbre la cual considera a los consumidores como perfectamente racionales. Es, sin embargo, necesario, hacer ajustes a los modelos para tratar de aproximar dicha teoría a la evidencia empírica.

ANEXO A4. Derivación matemática de los índices de aversión absoluta y relativa al riesgo de Arrow-Pratt.

En primer lugar, definimos una lotería $\breve{x}_i = (x_{i1}, \dots\dots, x_{iU}; p_1, \dots\dots, p_U)$ aditiva, con valor esperado cero $E(\breve{x}_i) = \sum_{k=1}^{U} p_{ik}\, x_{ik} = 0$, como aquella en la que se añade una riqueza inicial segura w_0. Hay separación perfecta entre w_0 y $\breve{x}_i$. Entonces se define $l_i = (w_0 + x_{i1}, \dots\dots, w_0 + x_{iU}; p_1, \dots\dots, p_U)$

Consideremos un agente económico que tiene una renta inicial segura w_0 que se enfrenta a una lotería $l_i \equiv \breve{w}_i = (w_0 + x_{i1}, \dots\dots, w_0 + x_{iU}; p_1, \dots\dots, p_U),$. El equivalente cierto $EC(l_i)$ asociado a la lotería l_i es tal que:

$$U[EC(l_i)] = V(l_i)$$

Además, la prima de reserva se define como $P_r(l_i) = w_0 - EC(l_i)$. Por tanto, $EC(l_i)$=$w_0 - P_r(l_i)$. Para calcular dicha prima de riesgo con loterías de poco riesgo es posible utilizar una aproximación de Taylor. A ésta también se la conoce como aproximación de Arrow-Pratt.

$$U[w_0 - P_r(l_i)] = \sum_{k=1}^{U} p_{ik} U(w_0 + x_{ik})$$

Expandiendo ambos lados a través de una serie de Taylor alrededor de w_0:

$$U(w_0) - P_r(l_i)U'(w_0) + \cdots = \sum_{k=1}^{U} p_{ik} \left[U(w_0) + x_{ik}U'(w_0) + \frac{1}{2}(x_{ik})^2 U''(w_0) + \cdots\right]$$

$$= U(w_0) + U'(w_0)E(\breve{x}_i) + \tfrac{1}{2}U''(w_0)E[(\breve{x}_i)^2] + \dots$$

donde … indica términos de orden superiores a dos en la expansión. Dado que $E(\breve{x}_i) = 0$ y $Var(\tilde{x}_i) = E[(\breve{x}_i)^2]$. Si despreciamos los términos de orden superiores a dos en la expansión, podemos hacer la siguiente aproximación.

$$U(w_0) - P_r(l_i)U'(w_0) \approx U(w_0) + \frac{1}{2}U''(w_0)Var(\tilde{x}_i)$$

Cancelando $U(w_0)$ en ambos lados, y reordenando, tenemos la expresión que relaciona la prima de reserva, $P_r(l_i)$ con el índice de aversión absoluta al riesgo para loterías de poco riesgo alrededor de w_0, $AAR(w_0)$:

$$P_r(l_i) \approx \tfrac{1}{2}Var(\tilde{x}_i)\tfrac{-U''(w_0)}{U'(w_0)}, \text{ o bien,}$$

$$P_r(l_i) \approx \frac{1}{2}Var(\tilde{x}_i)AAR(w_0)$$

La interpretación de dicha expresión es bastante intuitiva: la prima de riesgo es proporcional a la varianza del componente aleatorio, $Var(\tilde{x}_i)$, que puede considerarse como una medida de la magnitud del riesgo; y además es proporcional a una medida del grado de aversión absoluta del riesgo del agente económico, $AAR(w_0)$.

En segundo lugar, definimos una lotería multiplicativa como aquella que representa una fracción de w_0, con lo cual se pueden alcanzar $w_0(1 + \breve{r})$ donde $\breve{r}$ es una variable aleatoria con esperanza igual a cero, $\sum_{k=1}^{U} p_k\, \breve{r}_k = 0$. La prima de reserva relativa $\breve{P}_r$

$$U\left[w_0\left(1-\breve{P}_r\right)\right]=\sum_{k=1}^{U}p_kU[w_0(1+\check{r}_k)]$$

Se puede demostrar que la prima de riesgo relativa se puede expresar como:

$$\breve{P}_r(l_i)=\frac{1}{2}Var(\check{r})\left(\frac{-U''(w_0)}{U'(w_0)}w_0\right)=\frac{1}{2}Var(\check{r})ARR(w_0)$$