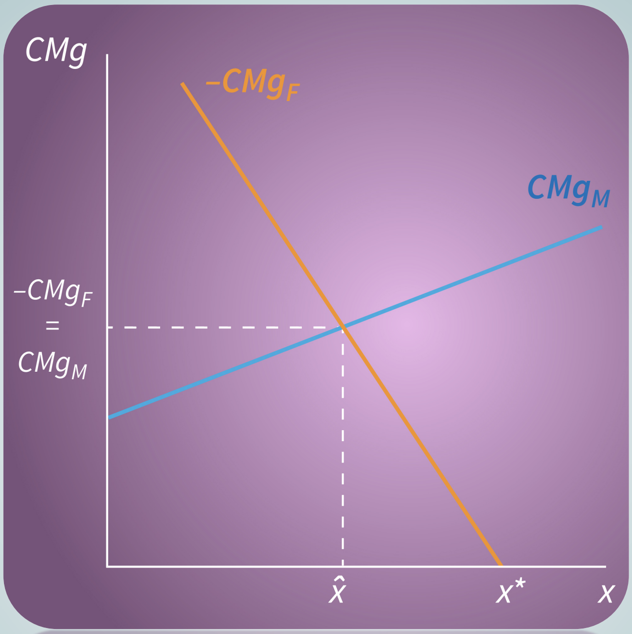
Microeconomía III

Tema 6. Aplicaciones de la teoría de la decisión bajo incertidumbre



Ramón Núñez Sánchez

Departamento de Economía

6. Aplicaciones de la teoría de la decisión bajo incertidumbre[1]

CONTENIDOS TEÓRICOS.

6.0. Introducción

6.1. Análisis de decisión bajo incertidumbre mediante curvas de indiferencia. Modelo de demanda de aseguramiento.

6.2. El criterio media-varianza. Modelo de selección de cartera.

6.0. Introducción

En el bloque anterior hemos analizado la teoría del consumidor bajo situaciones de incertidumbre. A continuación, presentamos un par de aplicaciones de dicha teoría. En la primera, tratamos de determinar cuál es la demanda óptima de aseguramiento por parte de un agente económico averso al riesgo. Vamos a demostrar cómo dicha elección depende, entre otros factores, de la estructura del mercado de seguros. En la segunda parte de este tema, vamos a presentar y estudiar un criterio alternativo al de utilidad esperada: el criterio media varianza. Finalmente, presentaremos uno de los modelos fundamentales de la economía financiera: el modelo de selección de cartera.

Palabras clave: incertidumbre, aseguramiento, selección de cartera, criterio media-varianza.

6.1. Análisis de decisión bajo incertidumbre mediante curvas de indiferencia. Modelo de demanda de aseguramiento.

6.1.1. Análisis de decisión bajo incertidumbre mediante curvas de indiferencia

Para poder representar las curvas de indiferencia de un agente económico en una situación de incertidumbre, vamos a considerar el caso de que sólo puedan ocurrir dos estados de la naturaleza.

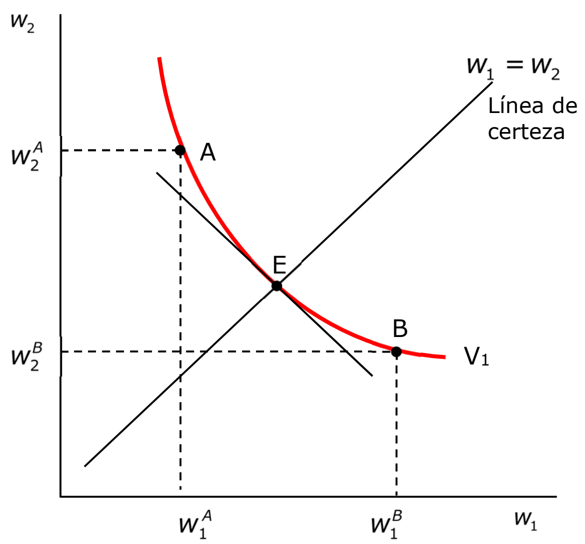
$$S = \{S_1, S_2\}, p = \{p_1, p_2\}, \sum_{j=1}^{2} p_j = 1$$

$$l = (w_1, w_2;\ p_1, p_2)$$

[1] Estas notas están pendientes de revisión y pueden contener errores.

$\forall l_i, V(l_i) = p_1 U(w_1) + p_2 U(w_2)$ de forma que utilizamos el concepto de curva de indiferencia en el ámbito de la decisión bajo incertidumbre, $CI = \{(w_1, w_2): dV(l) = 0\}$.

Figura 1



Análisis de la función de utilidad esperada mediante curvas de indiferencia

Vamos a buscar una expresión matemática para la relación marginal de sustitución de la renta condicionada al estado 1 en términos de la renta condicionada al estado 2. Suponiendo dw_1 y dw_2 las variaciones de la renta para los estados de la naturaleza 1 y 2, respectivamente, la variación de la utilidad esperada debe ser cero.

$$dV(l) = p_1 \frac{\partial U(w_1)}{\partial w_1} dw_1 + p_2 \frac{\partial U(w_2)}{\partial w_2} dw_2 = 0 \qquad (1)$$

Por lo tanto:

$$RMS_{w_1}^{w_2}\Big|_{Vcte} = -\frac{dw_2}{dw_1} = \frac{p_1}{p_2} \frac{\frac{\partial U(w_1)}{\partial w_1}}{\frac{\partial U(w_2)}{\partial w_2}} \qquad (2)$$

La relación marginal de sustitución de la renta condicionada al estado 1, en términos de la renta condicionada al estado 2, $RMS_{w_1}^{w_2}\big|_{Vcte}$, se definirá como la renta condicionada al estado 2 que el agente está dispuesto a renunciar, para poder aumentar en una unidad el nivel de renta condicionada al estado 1, sin que el nivel de utilidad esperado varíe.

Las curvas de indiferencia serán decrecientes, dado que el valor de la pendiente es menor que cero.

Pregunta: ¿Cómo se interpretaría la $RMS_{w_1}^{w_2}\big|_{Vcte}$ si ésta tomase valores mayores que cero?. ¿Cómo serían las curvas de indiferencia?.

Por otra parte, las curvas de indiferencia son convexas. Suponemos un agente económico que se enfrenta a una lotería E, situada sobre la *línea de certeza*, que se define como aquella recta en la que el agente económico tiene la misma renta sea cual sea el estado de la naturaleza; es decir, donde $w_1=w_2$, luego a partir de la ecuación (2):

$$RMS_{w_1}^{w_2}\Big|_{Vcte} = -\frac{dw_2}{dw_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

ya que en dicha línea de certeza, al disponer de la misma renta en ambos estados de la naturaleza, $\frac{\partial U(w_1)}{\partial w_1} = \frac{\partial U(w_2)}{\partial w_2}$, la utilidad marginal en ambos estados será la misma, dados los supuestos de partida. Si suponemos que $p = \{p_1, p_2\} = \{0{,}75, 0{,}25\}$, entonces, en el punto E, $RMS_{w_1}^{w_2}\Big|_{Vcte} = 3$; es decir, el agente económico renunciaría a 3 unidades de renta condicionada al estado 2, para obtener una unidad adicional de renta condicionada al estado 1.

Vamos a suponer que nos movemos al punto B, donde $w_1>w_2$, entonces, $RMS_{w_1}^{w_2}\Big|_{Vcte}$ será menor que 3, $\frac{\partial U(w_1)}{\partial w_1}$ será menor que $\frac{\partial U(w_2)}{\partial w_2}$, por el supuesto de utilidades marginales decrecientes.

De esta forma, los agentes económicos aversos al riesgo preferirán loterías en las que w_1 y w_2 tiendan a ser iguales. Por lo tanto, para agentes aversos al riesgo, las curvas de indiferencia serán convexas.

Ejercicio. Represente las curvas de indiferencia de un agente neutral al riesgo. Determinar matemáticamente una posible función de utilidad cardinal para dicho agente.

A continuación vamos a definir un nuevo concepto: la línea iso-renta esperada. Matemáticamente, se define como:

$$E_l(w) = p_1 w_1 + p_2 w_2 \tag{3}$$

Si ajustamos (4) expresándola en función w_2, obtenemos la siguiente expresión:

$$w_2 = \frac{E_l(w)}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} w_1 \tag{4}$$

La línea iso-renta esperada expresa combinaciones de w_1 y w_2 con un mismo valor esperado de renta, dados las probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza. Si suponemos que dichas probabilidades son constantes, podemos diferenciar la ecuación (3) con respecto a w:

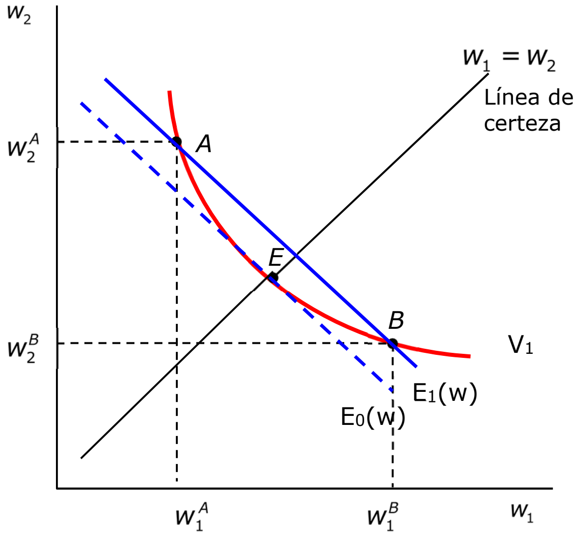
$$dE_l(w) = p_1 dw_1 + p_2 dw_2 = 0 \tag{5}$$

$$-\frac{dw_2}{dw_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Por lo tanto, las líneas iso-renta esperada serán líneas rectas con pendiente negativa e igual al cociente de probabilidades asociadas a cada uno de los estados de la naturaleza posibles.

En la Figura 2 representamos gráficamente dos líneas iso-renta esperada, $E_0(w)$ y $E_1(w)$. Tal y como podemos observar en el gráfico, las loterías A y B están situadas sobre la línea iso-renta esperada $E_1(w)$, mientras que la lotería E está sobre $E_0(w)$, donde $E_1(w) > E_0(w)$.

Figura 2



La línea iso-renta esperada

Sin embargo, tanto A como B y E están situadas sobre la misma curva de indiferencia V_1. Podemos concluir, por tanto que, a pesar de que las loterías A y B tienen una renta esperada mayor que la lotería E, ésta está situada en la línea de certeza, por lo que los agentes económicos dispondrán de la misma renta, independientemente del estado de la naturaleza que se dé. Dado que los agentes son aversos al riesgo, éstos compensarán la menor renta esperada con la desaparición del riesgo, por lo que serán indiferentes a enfrentarse a cualquiera de las loterías posibles.

5.1.2. *Modelo de* demanda de aseguramiento.

Supongamos que un agente tiene inicialmente una renta inicial que asciende a *W* €. Existe una probabilidad *p* de que pierda una cantidad *L* €; por ejemplo, por un siniestro de coche. Dicho agente puede suscribir un seguro por el que percibirá *C* €, si le ocurre el siniestro para que pueda pagar los desperfectos. La cantidad de dinero que debe pagar a cambio de *C* € de cobertura, es *tC*, donde *t* es la prima por € de cobertura, por lo tanto, $t<1$. ¿Cuánta cobertura suscribirá este agente económico?. Considere que el estado de la naturaleza 1 expresa aquel en el que no se produce el siniestro, mientras que el estado 2 expresa aquel en el que se produce el siniestro, y, por tanto, la pérdida económica. Considere una situación en la que el agente debe decidir qué tipo de seguro contratar: un seguro que le cubra parcial o totalmente la pérdida económica. De esta manera, $w_1 = W - tC$, mientras que $w_2 = W - tC - L + C$.

A partir de la teoría de la utilidad esperada, el problema del agente se puede expresar matemáticamente como:

$$\underset{C}{Max}\ (1-p)U(W-tC) + pU(W-tC-L+C) \tag{6}$$

Resolvemos el problema, a partir de la condición de primer orden:

$$(1-p)\frac{\partial U(W-tC^*)}{\partial C}(-t) + p\frac{\partial U(W-tC^*-L+C^*)}{\partial C}(1-t) = 0 \tag{7}$$

La ecuación (7) se puede expresar también como:

$$\frac{(1-p)}{p}\frac{\frac{\partial U(W-tC^*)}{\partial C}}{\frac{\partial U(W-tC^*-L+C^*)}{\partial C}} = \frac{(1-t)}{t} \tag{8}$$

o lo que es lo mismo,

$$RMS_{w_1}^{w_2}\Big|_{Vcte} = \frac{(1-t)}{t} \tag{9}$$

Si ocurre el siniestro, la compañía de seguros recibe (*tC-C*)€. Si no se produce ningún siniestro, su beneficio será *tC*€. Por lo tanto, su beneficio esperado será:

$$E(\Pi) = p(tC - C) + (1-p)tC$$

Si suponemos que la empresa aseguradora actúa como precio aceptante, entonces, los beneficios esperados a largo plazo en un mercado con libertad de entrada y salida de empresas serán iguales a cero:

$$E(\Pi) = p(tC - C) + (1-p)tC = 0 \tag{10}$$

De la ecuación (10) se deduce que *t*=*p*, es decir, la prima por euro de cobertura será igual a la probabilidad de que ocurra el siniestro. El coste de la póliza es precisamente su valor esperado unitario, por lo que decimos que la prima que la empresa cobra es una prima justa. Introduciendo este resultado en la ecuación (8):

$$\frac{(1-p)}{p}\frac{\frac{\partial U(W-tC^*)}{\partial C}}{\frac{\partial U(W-tC^*-L+C^*)}{\partial C}} = \frac{(1-p)}{p} \tag{11}$$

$$\frac{\partial U(W-tC^*)}{\partial C} = \frac{\partial U(W-tC^*-L+C^*)}{\partial C} \tag{12}$$

Dado que el agente económico es averso al riesgo, $U''(w) < 0$, y dado que la función $U'(w)$ es una función monótona:

$$(W - tC^*) = (W - tC^* - L + C^*) \tag{13}$$

Entonces, se deduce que:

$$C^* = L \tag{14}$$

Este resultado muestra que el agente económico averso al riesgo se asegura totalmente frente a la posible pérdida L, suponiendo que la empresa aseguradora no presenta poder de mercado en un marco de libertad de entrada y salida de empresas en el mercado de seguros, y que el agente no puede influir en la probabilidad de que el accidente ocurra.

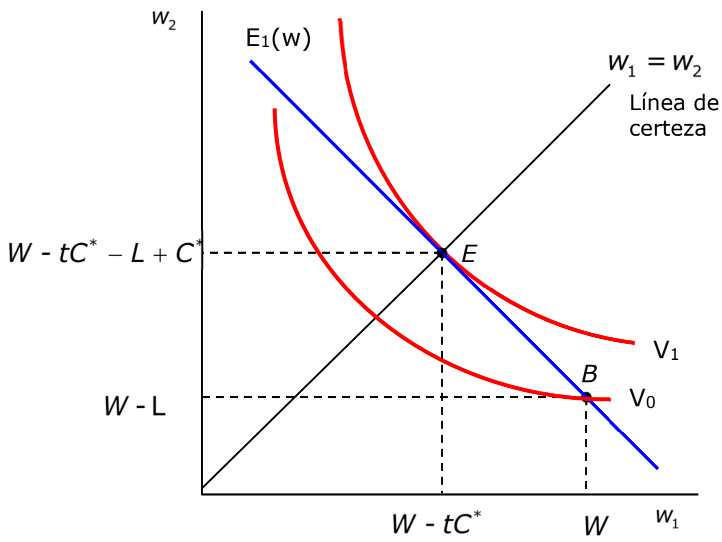
*Ejercicio. D*emuestre que, a partir del siguiente problema de decisión del agente:

$$\underset{w_1, w_2}{Max} \ (1-p)U(w_1) + pU(w_2)$$

$$s.a. \ w_2 = (W-L) + \frac{(1-t)}{t}(W-w_1)$$

a la misma condición de equilibrio que la obtenida en el modelo anterior.

Figura 3



Aseguramiento de un agente en un mercado de seguros perfectamente competitivo

En la figura 3 se observa que en *E* el agente elimina totalmente el riesgo, ya que su nivel de renta será el mismo, independientemente de que ocurra o no ocurra el siniestro. Se demuestra, por tanto, cómo los mercados de seguros permiten a los agentes económicos igualar las rentas para cada posible estado de la naturaleza, reportando un nivel de utilidad esperada mayor, que en la situación sin aseguramiento.

Es importante señalar que *E* está situado sobre la misma recta iso-renta esperada que *B*, por lo que la ganancia esperada en la situación sin seguro es exactamente igual a la situación con seguro de cobertura total. Otro resultado interesante que se observa en la figura 5 es el hecho de que la pendiente de la recta iso-renta esperada, que recordemos es igual al cociente de probabilidades asociadas a cada estado de la naturaleza, $\frac{(1-p)}{p}$, coincide con la pendiente de la restricción presupuestaria para el agente, que es igual a $\frac{(1-t)}{t}$. Por último, si se comparan los niveles de utilidad esperada en la situación sin aseguramiento, con la situación con aseguramiento total, podemos observar cómo el agente económico averso al riesgo prefiere esta última situación.

Ejercicio: Demuestre que las ganancias esperadas en ambas situaciones son iguales.

Supongamos que la empresa aseguradora establece una prima por € de cobertura (t) mayor que la probabilidad de que ocurra el accidente (p), $t>p$.

Pregunta: ¿Cómo serán los beneficios esperados de la empresa?, ¿cuáles serán las posibles estructuras del mercado de seguros?.

Se puede demostrar que en esta situación, el agente económico no se asegurará completamente frente al riesgo. Por tanto, la estructura del mercado condiciona las decisiones individuales de los agentes económicos que demandan instrumentos de cobertura de riesgo.

6.2. El criterio media-varianza. Modelo de selección de cartera.

6.2.1. El criterio media-varianza

Hasta ahora, hemos analizado el modelo de elección en condiciones de incertidumbre basada en la utilidad esperada. A continuación, vamos a presentar un criterio alternativo que se basa en la descripción de las loterías considerando únicamente la ganancia esperada de la lotería (esperanza de la renta, en términos estadísticos), y su varianza.

En estadística, señalábamos que la media de una distribución de probabilidades medía el valor en torno al cual estaba centrada una distribución, mientras que su varianza de la distribución medía su dispersión, es decir, la dispersión en torno a la media. El criterio media-varianza supone que la utilidad esperada de una distribución de probabilidades (o lotería) puede expresarse en función de la media y la varianza de dicha distribución, $V(R_l,\ \sigma_l^2)$. En algunos modelos, la utilidad se expresa en función de la media y de la desviación típica $V(R_l,\ \sigma_l^2)$. Dado que tanto la varianza como la desviación típica son medidas de dispersión de la distribución de la riqueza, podemos suponer que la utilidad depende de cualquiera de las dos.

De esta forma, si las decisiones del agente económico pueden caracterizarse totalmente en función de su media y de su varianza, una función de utilidad basada en la media y en la varianza será capaz de ordenar las elecciones de la misma manera que una función de utilidad esperada.

El criterio de elección de loterías a partir de la media-varianza, para un agente averso al riesgo, será el siguiente: a igualdad de varianzas entre varias loterías, será elegida aquella con una ganancia esperada mayor; mientras que, a igualdad de ganancias esperadas, será elegida aquella lotería con una varianza (o desviación típica) menor.

Ejercicio: Dada una función de utilidad $U(w) = 200 + 300w - w^2$ y las loterías:

(1) $l_A = (100, 10;\ 0{,}25, 0{,}75)$

(2) $l_B = (43, 1;\ 0{,}75, 0{,}25)$

a) Determinar la actitud del agente económico al riesgo, a partir de su función de utilidad cardinal.
b) Determinar la media y varianza para ambas loterías. Bajo el criterio media-varianza, ¿en qué lotería decidirá participar el agente económico?.
c) Comprobar, a partir del criterio de la utilidad esperada, el resultado obtenido en el apartado anterior. ¿Se obtiene el mismo resultado si la función de utilidad es $U(w) = ln(w)$?.

La razón de por qué la varianza (o desviación típica) de una distribución de probabilidades no suele ser una medida satisfactoria de riesgo se hace evidente si demostramos que la utilidad esperada del agente depende de:

$$V(l_i) = f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots., \mu_n)$$

La utilidad esperada depende del valor medio de la distribución de probabilidades (ganancia esperada), del segundo momento alrededor de la media (varianza), y de todos los momentos de órdenes más altos alrededor de la media que están relacionados con la distribución tales como el coeficiente de asimetría, el coeficiente de curtosis, etc. Todos esos momentos de la distribución tienen importancia para el agente tomador de decisiones.

Por tanto, el criterio media-varianza es más restrictivo que el la regla de la utilidad esperada para la toma de decisiones de un agente en una situación de incertidumbre.

La ventaja de la media-varianza radica es su simplicidad en su uso. Su utilización, en detrimento de la regla de la utilidad esperada, se produce cuando:

a) Las preferencias del agente pueden recogerse mediante una función de utilidad cardinal en la que las derivadas de orden superior a dos son nulas.
b) Las loterías son de tal forma que los momentos centrados respecto a la media superior al segundo pueden obtenerse automáticamente a partir de la media y de la varianza. Este es el caso de la función de utilidad cuadrática.

Ejemplo. Dada una función de utilidad cuadrática $U(w) = \alpha + \beta w + \gamma w^2$*:*

a) ¿Para qué niveles de w y valores de los parámetros *α, β* y *γ* la función de utilidad cardinal refleja una actitud de aversión al riesgo?.
b) Demuestre que la utilidad esperada de una lotería es una función de la media y de la varianza de las ganancias obtenidas en dicha lotería.
c) Represente las curvas de indiferencia asociadas en el espacio media-varianza.

6.2.2. Modelo de selección de cartera[2]

Supongamos que somos un agente inversor que puede invertir en dos activos financieros diferentes. Uno de ellos es un *activo libre de riesgo*, por lo que siempre tiene una tasa de rendimiento fija. Vamos a suponer que estamos hablando de una Letra del Tesoro alemán que tiene un tipo de interés fijo, independientemente de lo que ocurra en la economía. A este activo también se le conoce como *activo de renta fija* ya que proporciona una corriente monetaria que se conoce con seguridad.

El otro activo es un *activo incierto*, o de renta variable. Vamos a suponer que es una inversión en un fondo de inversión que compra únicamente títulos de renta variable (por ejemplo: acciones). Si la bolsa marcha bien, nuestra inversión obtendrá buenos resultados. Si marcha mal, nuestra inversión obtendrá malos resultados. Definimos, por tanto, un *activo de renta variable* como aquel activo que proporciona una corriente monetaria que es aleatoria, al menos en parte. Normalmente cuanto mayor es el rendimiento esperado un activo, mayor es el riesgo que entraña. Por lo tanto, un agente averso al riesgo debe sopesar entre el rendimiento esperado y el riesgo asociado a ese activo.

Este agente económico debe decidir qué porcentaje de sus ahorros van a ser invertidos en activos de renta fija y qué parte se irán al fondo de inversión. En definitiva, el problema del agente es determinar la cartera de inversión óptima formada por activos de renta fija y activos de renta variable.

Representemos el rendimiento exento de riesgo de la Letra del Tesoro alemán por medio de r_f. Por definición de activo de renta fija, se deberá cumplir que:

$$E(r_f) = R_f = r_f$$
$$\sigma_f^2 = E\left[(r_f - R_f)^2\right] = E\left[(R_f - R_f)^2\right] = 0$$

Por otra parte, vamos a considerar que el rendimiento esperado de la inversión en el mercado de valores es R_v, mientras que σ_v^2 es la varianza asociada a la rentabilidad real del fondo de inversión, que denotamos por r_v.

$$E(r_v) = R_v$$
$$\sigma_v^2 = E[(r_v - R_v)^2]$$

Suponemos que en el momento de configurar la cartera de activos, el agente económico conoce el conjunto de los posibles rendimientos del fondo de inversión, así como la probabilidad asociada a cada rentabilidad. Una posible distribución de probabilidades asociada a la rentabilidad real del fondo de inversión sería la distribución normal, la cual depende únicamente de la esperanza y la desviación estándar, $r_v \hookrightarrow N(R_v, \sigma_v)$.

[2] Este apartado está basado en el capítulo 5 del libro "Microeconomía" 5ª Edición de R.S. Pindyck y D.L. Rubinfeld, editado por Pearson Prentice Hall.

Es lógico pensar que el rendimiento esperado del activo de renta variable sea mayor el asociado al activo de renta fija, de forma que $R_v > R_f$.

Por otra parte, vamos a considerar que b es la proporción de los ahorros que invierte en la bolsa de valores, por lo que $1-b$ es la proporción de los ahorros que destina a la compra de Letras del Tesoro alemán. El rendimiento esperado de la cartera que haya configurado el agente, R_C, se definirá como la media ponderada del rendimiento esperado de los dos tipos de activos.

$$R_C = bR_v + (1-b)R_f \tag{15}$$

Demostración: El valor esperado de la suma de dos variables es la suma de los valores esperados, por tanto:

$R_C = E(r_c) = E(br_v) + E\left[(1-b)r_f\right] = bE(r_v) + (1-b)R_f = bR_v + (1-b)R_f.$■

El riesgo de la cartera de activos se aproximará a partir de la desviación estándar de la inversión en activos de renta variable, σ_v. De esta forma, la desviación estándar de la cartera, σ_C, se definirá como la proporción de los ahorros del agente invertidos en activos de renta variable multiplicada por la desviación estándar de dichos activos.

$$\sigma_C = b\sigma_v \tag{16}$$

Demostración: Por definición de varianza, $\sigma_C^2 = E[(r_c - R_C)^2]$. Sustituyendo r_C por la definición de rendimiento real y R_C por la definición de rendimiento esperado

$\sigma_C^2 = E\left[\left(br_v + (1-b)r_f - R_c\right)^2\right] = E\left[\left(br_v + (1-b)R_f - bR_v - (1-b)R_f\right)^2\right] = E[b^2(r_v - R_v)^2] = b^2\sigma_v^2.$■

A partir de la definición de estos conceptos, podemos intuir que el agente económico inversor a la hora de decidir qué proporción de sus ahorros estarán destinados a activos de renta variable, b, se enfrenta a una disyuntiva entre el rendimiento esperado de la cartera que elija y el riesgo asociado a la misma. Veamos esta disyuntiva a través de la siguiente ecuación. Podemos rescribir la ecuación (15) como:

$$R_C = R_f + b\left(R_v - R_f\right) \tag{17}$$

Además, a partir de la ecuación (16), $b = \sigma_C/\sigma_v$ por lo que:

$$R_C = R_f + \frac{(R_v - R_f)}{\sigma_v}\sigma_C \tag{18}$$

Esta ecuación (18) señala que el rendimiento esperado de la cartera de activos en el mercado de valores, R_C, aumenta a medida que aumenta la desviación estándar del rendimiento, σ_C. La pendiente de esta ecuación lineal, $\frac{(R_v - R_f)}{\sigma_v}$, expresa, por tanto, el precio del riesgo que asume el agente económico, dado que nos señala cuánto riesgo adicional debe asumir el agente económico para obtener un rendimiento esperado superior, de acuerdo al mercado de valores.

El problema de decisión al que se enfrenta el inversor se definirá de la siguiente manera:

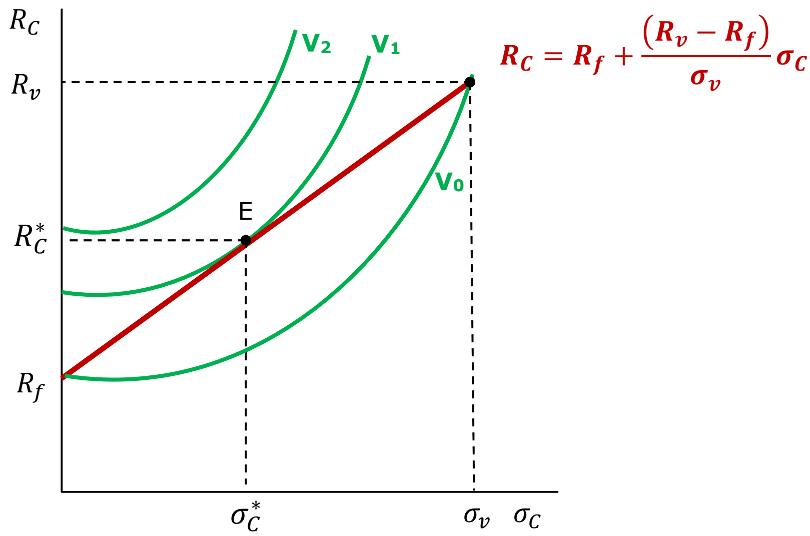
$$\underset{R_C,\sigma_C}{Max}\ V(R_C,\sigma_C)$$

$$s.a.\ R_C = R_f + \frac{(R_v - R_f)}{\sigma_v}\sigma_C$$

Si el inversor no desea asumir ningún tipo de riesgo, puede invertir todos sus ahorros en Letras del Tesoro alemán ($b = 0$), de forma que obtiene un rendimiento seguro igual a R_f. Sin embargo, para obtener un rendimiento mayor, debe correr algún tipo de riesgo. El caso opuesto al anterior ($b = 1$), es aquel en el que el inversor destina todos sus ahorros hacia activos de renta variable, con el objeto de tener un rendimiento esperado de R_v a costa de asumir un riesgo como σ_v. Un caso intermedio es aquel en el que invierte una determinada proporción de ahorros en cada tipo de activo.

En la Figura 4 se puede observar la solución óptima del problema de selección de cartera. El punto E representa aquella combinación de rendimiento esperado y riesgo (R_C^*, σ_C^*) en la que el inversor logra maximizar su utilidad esperada sujeto a la restricción planteada en el problema de decisión.

Figura 4



Un modelo de selección de cartera a partir del criterio media-varianza

En el punto E de equilibrio se observa cómo que la curva de indiferencia es tangente a la restricción presupuestaria, de forma que la pendiente de la curva de indiferencia es idéntica a la pendiente de la restricción presupuestaria:

$$RMS_{\sigma_c}^{R_c} = \frac{(R_v - R_f)}{\sigma_v}$$

En equilibrio, por tanto, la relación marginal de sustitución del riesgo en relación a la rentabilidad esperada, determinada por las preferencias del inversor, tiene que igualarse al precio del riesgo determinado por el mercado de valores.