# Índice General



[1] Versión 2010

# Tema 1

# Vectores, Sistemas de Coordenadas e Integrales[1]

## 1.1 Introducción

### 1.1.1 Magnitudes escalares

En la Física y la Ingeniería se usan conceptos que se pueden describir mediante magnitudes cuyo valor se puede expresar por medio de una única cantidad como por ejemplo la masa, la carga o la energía. Todas ellas son magnitudes escalares de manera que podemos definir un escalar de la forma siguiente:

"**Un escalar es una cantidad que está completamente determinada por su magnitud, bien positiva o negativa**"

Analíticamente un escalar se puede indicar mediante letras de tipo ordinario como en el álgebra elemental. Así, $m$ indica la masa, $T$ la temperatura, $q$ la carga eléctrica, etc. Las operaciones entre magnitudes escalares siguen las reglas del álgebra elemental.

### 1.1.2 Magnitudes vectoriales

Sin embargo, otras magnitudes como la fuerza $\vec{F}$, el campo gravitatorio $\vec{g}$, el campo eléctrico $\vec{E}$ o magnético $\vec{B}$, la densidad de corriente $\vec{J}$, el momento $\vec{p}$, etc., necesitan, para su completa definición, el uso de otras cantidades denominadas vectores que se pueden definir como:

"**Un vector es una cantidad que está caracterizada completamente por su magnitud y dirección**"

El uso de vectores permite expresar las leyes físicas de forma compacta. Además, una vez que se dominan las técnicas del análisis vectorial, el uso de los vectores proporciona mayor potencia de cálculo.

Se acostumbra a representar los vectores bien de forma gráfica bien de forma analítica.

#### Representación gráfica de un vector:

Un vector $\vec{A}$ se puede representar gráficamente por una flecha $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ como la mostrada en la figura 1.1. La flecha define la dirección, siendo la magnitud del vector la longitud de la flecha. La cola de la flecha O se llama origen del vector mientras que su punta P se llama extremo del vector.

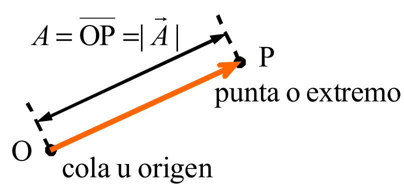


Figura 1.1: Representación gráfica de un vector arbitrario $\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

De esta manera, un vector $\vec{A}$ queda representado mediante un segmento orientado de longitud $A = \overline{\mathrm{OP}}$.

#### Representación analítica de un vector:

Hemos dicho que un vector tiene una magnitud y una dirección. La forma de indicar que una determinada magnitud es un vector es bien describiendo su símbolo en negrita **A** o bien añadiendo una flecha en su parte superior. Aquí seguiremos esta segunda opción. Así, escribiremos un vector como $\vec{A}$. La magnitud del vector, también llamada módulo del vector, se indica bien sin la flecha superior o bien encerrando el símbolo del vector entre dos líneas rectas verticales

$$A = |\vec{A}|$$

**Vectores iguales:**

Consideraremos que dos vectores son iguales cuando, mediante traslaciones, podemos hacerlos coincidir. En algunos textos, dos vectores con el mismo módulo y la misma dirección se consideran vectores distintos, sin embargo, nosotros siempre los consideraremos iguales. Esto no significa que produzcan los mismos efectos, ya que, por ejemplo, una fuerza puede dar lugar a efectos distintos dependiendo del punto de aplicación. Sin embargo, el vector, es decir, la fuerza, sería la misma.

Por consiguiente, dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales si tienen la misma magnitud y dirección, independientemente de la posición de sus puntos iniciales u orígenes. Así, en la figura 1.2, $\vec{A} = \vec{B}$.

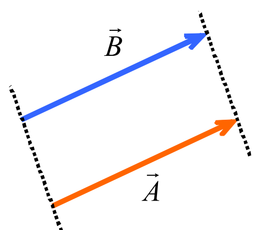


Figura 1.2: Vectores iguales

De esta manera, una recta contiene no sólo todos los vectores que tienen la misma dirección sino también todos los vectores que tienen la dirección opuesta, es decir, aquella que se obtiene de la primera sumando $180^0$.

En algunos textos se dice que los vectores tienen magnitud, dirección (la de la recta que los contiene) y sentido (el lado de la recta hacia el que apunta la flecha). En general, consideraremos que los vectores tienen magnitud y dirección, quedando el sentido implícito en la dirección; sólo en algunas situaciones particulares hablaremos de forma explícita del sentido de un vector.

## 1.2 Algebra vectorial

### 1.2.1 Introducción

Las operaciones matemáticas suma, resta, multiplicación y división son conocidas cuando se aplican entre magnitudes escalares. Trataremos de extender alguna de estas definiciones a los vectores. Para ello, definiremos la suma y resta de vectores, así como la multiplicación de vectores por escalares, definiendo, por tanto, un álgebra de vectores.

### 1.2.2 Definiciones

**Vectores opuestos:**

Definimos el **vector opuesto** de $\vec{A}$ como un vector de la misma magnitud y dirección opuesta

$$\text{opuesto de } \vec{A} = -\vec{A}$$

La representación gráfica de $\vec{A}$ y su opuesto se ilustra en la figura 1.3.

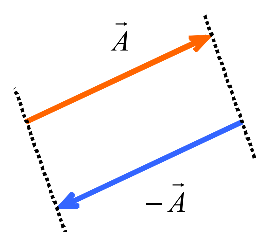


Figura 1.3: Vectores opuestos

**Suma de vectores:**

La suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se expresa analíticamente mediante otro vector $\vec{C}$ tal que

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

El vector $\vec{C}$ se puede obtener gráficamente de dos maneras:

- **Regla del paralelogramo:** el vector $\vec{C}$ resultante es el vector diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dibujados tomando su inicio en el mismo punto, tal como se muestra en la figura 1.4.

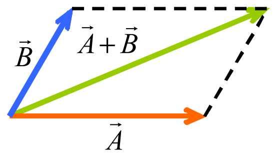


Figura 1.4: Suma de vectores: regla del paralelogramo

- **Regla punta-cola o extremo-origen:** el extremo de $\vec{A}$ se conecta con el origen de $\vec{B}$. Su suma, $\vec{C}$, es el vector dibujado desde el origen de $\vec{A}$ al extremo de $\vec{B}$, tal y como se muestra en la figura 1.5-a, sin necesidad de construir los otros lados del paralelogramo. Este método permite sumar varios vectores a la vez, tal como se muestra en la figura 1.5-b.

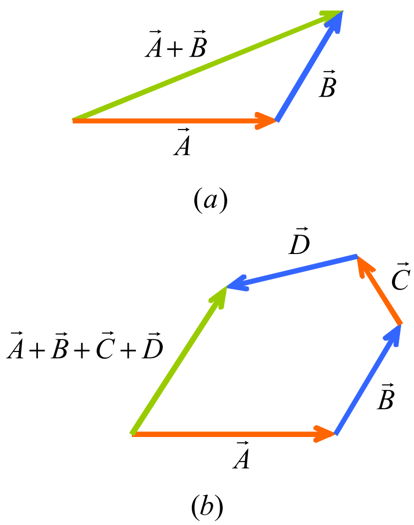


Figura 1.5: Suma de vectores: regla punta-cola. (a) suma de 2 vectores. (b) suma de 4 vectores

**Resta de vectores:**

La diferencia entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{D}$ tal que

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (\text{opuesto de } \vec{B}) = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Análogamente al caso de la suma, el vector $\vec{D}$ se puede obtener gráficamente de dos maneras:

- **Regla del paralelogramo:** el vector $\vec{D}$ resultante es el vector diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $-\vec{B}$ dibujados con su origen en el mismo punto, tal y como se muestra en la figura 1.6.

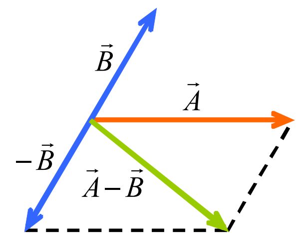


Figura 1.6: Resta de vectores: regla del paralelogramo

- **Regla extremo-extremo:** ambos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se dibujan con su origen en el mismo punto. El vector diferencia es aquel que va desde el extremo de $\vec{B}$ al extremo de $\vec{A}$, tal como se muestra en la figura 1.7.

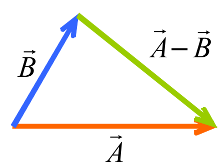


Figura 1.7: Resta de vectores: regla extremo-extremo

Se cumple $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$ que es el vector nulo o cero. Su magnitud es cero y no tiene dirección específica.

**Producto de un vector por un escalar:**

El producto de un escalar $s$ por un vector $\vec{A}$, denotado como $s\vec{A}$, es un vector de:

- magnitud $|s|$ veces la magnitud de $\vec{A}$
- dirección:
  - La misma que la de $\vec{A}$, si $s > 0$
  - La opuesta a $\vec{A}$, si $s < 0$

Si $s = 0$, el producto $s\vec{A}$ es el vector nulo.

### 1.2.3 Leyes del álgebra vectorial

De lo dicho hasta ahora, se pueden deducir algunas de las propiedades que caracterizan el álgebra de vectores. Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, y los escalares $m$ y $n$, se cumplen las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa respecto de la suma:
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

- Propiedad asociativa respecto de la suma:
$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

- Propiedad conmutativa respecto de la multiplicación:
$$m\vec{A}=\vec{A}m$$

- Propiedad asociativa respecto de la multiplicación:
$$m(n\vec{A})=(mn)\vec{A}$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares:
$$(m+n)\vec{A}=m\vec{A}+n\vec{A}$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:
$$m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+m\vec{B}$$

Estas leyes nos permiten operar con vectores de forma similar a cómo operamos con las ecuaciones algebraicas.

### 1.2.4 Vectores unitarios

**Definición de vector unitario:**

“**Un vector es unitario cuando su magnitud es la unidad**”.

Denotaremos los vectores unitarios sustituyendo la flecha por el símbolo “$\wedge$”. Según esto, el módulo del vector $\widehat{e}$ es
$$|\widehat{e}|=1$$

Obsérvese que la definición no especifica nada sobre la dirección del vector.

**Obtención de un vector unitario:**

Como se ilustra en la figura 1.8, se puede obtener un vector unitario $\widehat{a}$ de la misma dirección que otro vector dado $\vec{A}$ de la forma siguiente:

$$\widehat{a}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

por lo tanto, cualquier vector $\vec{A}$ se puede representar en función de un vector unitario de la forma

$$\vec{A}=|\vec{A}|\widehat{a}$$


Figura 1.8: Vector unitario en la dirección de $\vec{A}$.

Un ejemplo de conjunto de vectores unitarios son los asociados al sistema de coordenadas cartesianas.

## 1.3 Productos de vectores

Además de la suma y resta de vectores, es posible definir el producto entre vectores. Existen dos tipos básicos de productos entre vectores:

- el **producto escalar,** cuyo resultado es un escalar,
- el **producto vectorial,** cuyo resultado es otro vector.

### 1.3.1 Producto escalar de vectores

**Definición de producto escalar:**

El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, denotado como $\vec{A}\cdot\vec{B}$, es un escalar de valor:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha,$$

donde $\alpha$ es el ángulo formado por los dos vectores, tal como se muestra en la figura 1.9.

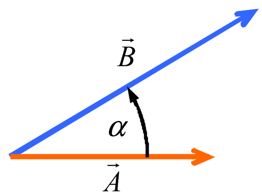


Figura 1.9: Producto escalar de dos vectores.

Obsérvese que el ángulo $\alpha$ se mide desde el vector $\vec{A}$ hasta el vector $\vec{B}$ girando en sentido contrario a las agujas del reloj.

**Propiedades del producto escalar:**

- Conmutativa:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha = |\vec{B}||\vec{A}|\cos(-\alpha) = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

- Producto escalar de vectores perpendiculares ($\alpha = \pi/2$):

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}|\ \cos(\pi/2) = 0$$

- Producto escalar de vectores paralelos ($\alpha = 0$):

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(0) = |\vec{A}||\vec{B}|$$

- Magnitud de un vector: se puede calcular mediante el producto escalar como

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{|\vec{A}||\vec{A}|\cos(0)}$$

**Definición de proyección:**

Una dirección cualquiera del espacio se puede expresar de forma única mediante el vector unitario en esa dirección, por ejemplo $\widehat{e}$.

Definiremos la proyección de un vector arbitrario $\vec{A}$ según la dirección $\widehat{e}$, que denotaremos como $A_e$, a un escalar cuyo valor es

$$A_e = \vec{A}\cdot\widehat{e}$$

En la figura 1.10 se muestra gráficamente el concepto de proyección.

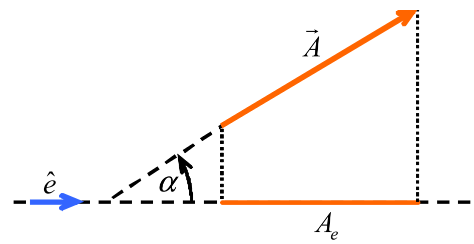


Figura 1.10: Proyección de un vector arbitrario $\vec{A}$ según la dirección de $\widehat{e}$.

Un ejemplo de proyección de gran utilidad lo forman las componentes de un vector en un sistema coordenado. En particular, tal como se muestra en la figura 1.11, las componentes de un vector $\vec{A}$ arbitrario en el sistema cartesiano 2D se obtienen proyectando dicho vector según las direcciones de los vectores unitarios asociados al sistema de coordenadas. Por tanto, si

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$

entonces

$$\begin{aligned} A_x &= \vec{A}\cdot\hat{x}, \\ A_y &= \vec{A}\cdot\hat{y}. \end{aligned}$$

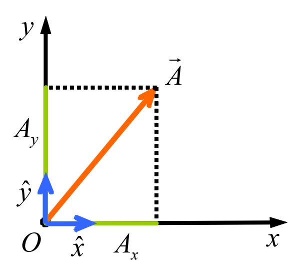


Figura 1.11: Componentes del vector $\vec{A}$ en coordenadas cartesianas 2D

### 1.3.2 Producto vectorial

**Definición de producto vectorial:**

El producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, denotado como $\vec{A}\times\vec{B}$, es un vector que tiene las siguientes características:

- **Magnitud:** su magnitud está definida por el producto de las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el seno del ángulo que forman

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$$

con $\alpha$ el ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El signo del seno siempre se toma como positivo.

- **Dirección:** el vector producto $\vec{C}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, por tanto es perpendicular a cada uno de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Así definido, $\vec{C}$ puede estar dirigido hacia uno u otro lado del plano; por ello en el punto siguiente se escoge una de las dos posibilidades.

- **Sentido:** viene dado por **la regla de la mano derecha** o de avance del tornillo, la cual establece que el sentido de $\vec{C}$ será el de avance de un tornillo cuando se gira en el mismo sentido del ángulo $\alpha$, es decir desde el vector $\vec{A}$ hacia el vector $\vec{B}$. Las dos posibilidades se muestran en la figura 1.12.

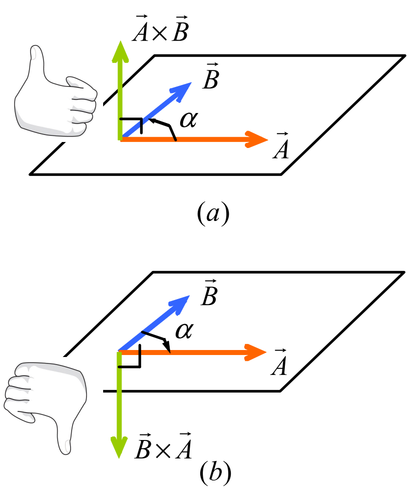


Figura 1.12: Dirección y sentido del producto vectorial. Regla de la mano derecha.

**Interpretación gráfica:**

Podemos hacer una interpretación gráfica del producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$. Su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene de lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$$

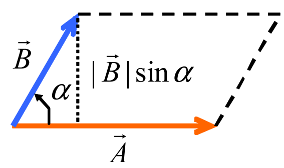


Figura 1.13: Interpretación gráfica de la magnitud del producto vectorial.

**Propiedades del producto vectorial:**

- No es conmutativo, pues por la regla de avance del tornillo, éste es opuesto cuando se va desde $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ respecto a cuando se va desde $\vec{B}$ hacia $\vec{A}$, como se observa en la figura 1.12:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

- Distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, entonces $\alpha = 0$, de donde $\vec{A} \times \vec{B} = 0$, por tanto

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0.$$

- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, entonces $\alpha = \pi/2$, de donde $\sin\alpha = 1$, por tanto

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$$

### 1.3.3 Otros productos de vectores

A lo largo del curso usaremos expresiones con operaciones combinadas de productos de vectores. Las más importantes son las triples:

- **Triple producto escalar**:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \neq \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

- **Producto Mixto**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

- **Triple producto vectorial**:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Se verifica $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.

---

**Ejemplo 1** *Sean dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El vector $\vec{A}$ tiene módulo 5. El vector $\vec{B}$ tiene módulo 3 y forma un ángulo de 120° con el vector $\vec{A}$ (el ángulo se mide a partir de $\vec{A}$ y en sentido antihorario). Calcular:*

*a) El vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.*
*b) El vector opuesto a $\vec{B}$.*
*c) El vector diferencia $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$.*
*d) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.*
*e) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.*

**Solución:**

El vector suma $\vec{C}$, el vector opuesto $-\vec{B}$ y el vector diferencia $\vec{D}$ se pueden obtener tanto gráfica como analíticamente. En la figura 1.14 se observa cómo se obtiene cada uno de ellos de forma gráfica dibujando los vectores a escala.

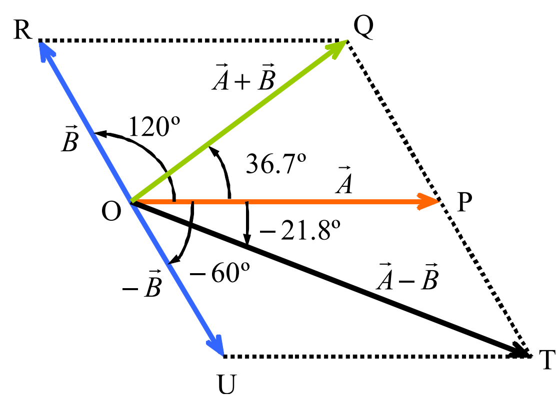


Figura 1.14:

Utilizando regla y transportador de ángulos, el resultado es:

$$\begin{aligned} |\vec{C}| &= 4.35; \quad \widehat{QOP} = 36.7°; \quad |-\vec{B}| = 3; \\ \widehat{\mathrm{POU}} &= -60°; \quad |\vec{D}| = 7; \quad \widehat{\mathrm{POT}} = -21.8° \end{aligned}$$

a) Para obtener la suma de forma analítica, comenzaremos determinando el módulo del vector suma como:

$$\begin{aligned} |\vec{C}|^2 &= \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) \\ &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} |\vec{C}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}| \cos\left(\widehat{\mathrm{POR}}\right) \\ &= 5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \times \cos(120°) = 19 \end{aligned}$$

luego

$$|\vec{C}| = \sqrt{19} = 4.36$$

Por la ley de senos de un triángulo

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\widehat{\mathrm{QOP}})} &= \frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin(\widehat{\mathrm{OPQ}})} \\ \sin(\widehat{\mathrm{QOP}}) &= \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{OQ}}} \sin(\widehat{\mathrm{OPQ}}) \\ &= \frac{3}{4.36} \times \sin(60°) = 0.597 \\ \widehat{\mathrm{QOP}} &= \arcsin(0.597) = 36.7° \end{aligned}$$

b) El vector opuesto de $\vec{B}$ tiene la misma magnitud que $\vec{B}$. El ángulo es

$$\widehat{\mathrm{POU}} = \widehat{\mathrm{POR}} + 180^{\mathrm{o}} = 300^{\mathrm{o}} = -60^{\mathrm{o}}$$

c) Al igual que en el caso de la suma, para obtener la diferencia de forma analítica comenzaremos determinado el módulo:

$$\begin{aligned} |\vec{D}|^2 &= \vec{D} \cdot \vec{D} = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\ &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} |\vec{D}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}| \cos(\widehat{\mathrm{POR}}) \\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos(120°) = 49, \end{aligned}$$

luego

$$|\vec{D}| = \sqrt{49} = 7.$$

Por la ley de senos de un triángulo

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathrm{PT}}}{\sin(\widehat{\mathrm{POT}})} &= \frac{\overline{\mathrm{OT}}}{\sin(\widehat{\mathrm{OPT}})} \\ \sin(\widehat{\mathrm{POT}}) &= \frac{\overline{\mathrm{PT}}}{\overline{\mathrm{OT}}} \sin(\widehat{\mathrm{OPT}}) \\ &= \frac{3}{7} \sin(-120°) = -0.371 \end{aligned}$$

luego

$$\widehat{\mathrm{OPT}} = \arcsin(-0.371) = -21.8°$$

d) El producto escalar es

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\widehat{\mathrm{ROP}}) \\ &= 5\times 3\times\cos(120^\circ) = -7.5\end{aligned}$$

e) El producto vectorial es un vector de módulo

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = 5\times 3\times|\sin 120^\circ| = 13$$

de dirección la perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y de sentido el de avance de tornillo al girar desde $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$; por tanto, el giro es en sentido antihorario y estaría dirigido hacia arriba del plano del papel.

## 1.4 Sistemas de coordenadas ortogonales en 2D

Hasta ahora hemos discutido los vectores en términos generales. Es fácil realizar gráficas para mostrar, por ejemplo, la suma de vectores. Sin embargo, si queremos usar todo el potencial del cálculo vectorial debemos introducir los sistemas de coordenadas. Además, y con objeto de disponer de una potencia de cálculo elevada, debemos presentar distintos sistemas de coordenadas. Todos ellos son equivalentes, sin embargo, cada uno resulta más o menos apropiado dependiendo de la simetría que presente el problema a resolver. En cualquier caso, las leyes del campo electromagnético son independientes del sistema de coordenadas que se use para describir el problema.

Aunque los sistemas de coordenadas 2D son conocidos por parte de los estudiantes, es conveniente recordar los conceptos que se manejan con el propósito de, posteriormente, extenderlos a sistemas de coordenadas 3D, con lo que éstos últimos resultarán más sencillos de comprender.

### 1.4.1 Sistema de coordenadas cartesianas

**Definición de un punto:**

Tal como se muestra en la figura 1.15, la posición de un punto P en un plano se puede determinar mediante la intersección de dos rectas mutuamente perpendiculares, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = \text{cte} \\ y &= y_1 = \text{cte}\end{aligned}$$

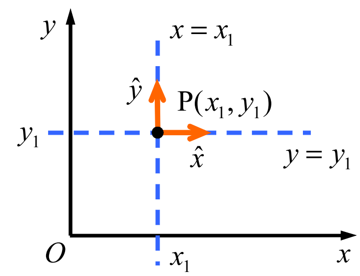


Figura 1.15: Definición de un punto y de sus vectores unitarios asociados en el sistema de coordenadas cartesianas 2D.

**Coordenadas de un punto:**

Las coordenadas del punto P son los parámetros $x_1$ e $y_1$ que definen las rectas utilizadas para localizar el punto. Denotamos P como $\mathrm{P}(x_1, y_1)$. Los valores admisibles para las coordenadas de un punto son:

$$x, y \in (-\infty, +\infty)$$

**Vectores unitarios:**

En un sistema de coordenadas 2D todo punto tiene asociado dos vectores unitarios. En el sistema cartesiano 2D los vectores unitarios se definen como:

- $\hat{x} \rightarrow$ perpendicular a la recta $x = x_1$ y dirigido hacia valores crecientes de $x$
- $\hat{y} \rightarrow$ perpendicular a la recta $y = y_1$ y dirigido hacia valores crecientes de $y$

En este sistema, los vectores unitarios tienen dirección constante (independiente de las coordenadas particulares del punto).

**Componentes de un vector:**

De la misma manera que resulta conveniente referir los puntos del plano a un sistema de coordenadas, también conviene referir los vectores a un sistema de coordenadas. Así, si un punto queda determinado por sus coordenadas, un vector queda determinado por sus componentes. Sea $\vec{A}$ un vector arbitrario. Tal como se muestra en la figura 1.16, podemos expresar $\vec{A}$ de la forma

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{x} + A_y\hat{y},$$

donde $A_x$ y $A_y$ son las componentes de $\vec{A}$.

También podemos denotar $\vec{A}$ como $\vec{A} = (A_x, A_y)$

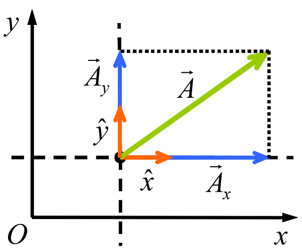


Figura 1.16: Representación de un vector en coordenadas cartesianas 2D

**Magnitud de un vector:**

Como puede verse a partir de la figura 1.16, es posible determinar la magnitud de un vector en función de sus componentes mediante la expresión

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

**Suma de vectores:**

También podemos expresar la suma de vectores en función de sus componentes. Así, dados los vectores $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$ y $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$, el vector suma $\vec{C}$ tendrá por componentes

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + B_x\hat{x} + B_y\hat{y} \\ &= (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} \\ &= C_x\hat{x} + C_y\hat{y} \end{aligned}$$

donde $C_x = A_x + B_x$ y $C_y = A_y + B_y$.

---

**Ejemplo 2** *Sea un sistema de coordenadas cartesianas 2D. Consideremos en este sistema los puntos* $P(1,1)$ *y* $P'(-1,1)$. *Hallar:*

*a) El vector* $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.
*b) El vector* $\vec{r}\,' = \overrightarrow{OP'}$.
*c) El vector* $\vec{R} = \overrightarrow{P'P}$.
*d) El vector* $-\vec{R} = \overrightarrow{PP'}$.
*e) La distancia entre* $P$ *y* $P'$.
*f) El vector unitario* $\hat{R}$.

**Soluciones:**

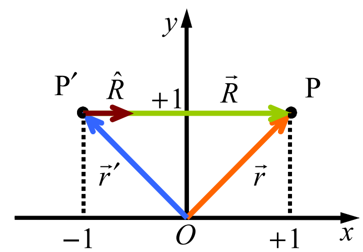


Figura 1.17:

a) Obtenemos el vector $\vec{r}$ como

$$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-0)\hat{x} + (1-0)\hat{y} = \hat{x} + \hat{y}$$

b) A su vez el vector $\vec{r}\,'$:

$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = (-1-0)\hat{x} + (1-0)\hat{y} = -\hat{x} + \hat{y}$$

c) El vector $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \overrightarrow{\mathrm{P'P}} = \vec{r} - \vec{r}\,' = (\hat{x} + \hat{y}) - (-\hat{x} + \hat{y}) = 2\hat{x}$$

d) El vector $-\vec{R}$:

$$-\vec{R} = \overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \vec{r}\,' - \vec{r} = -2\hat{x}$$

e) La distancia entre P y P′ vendrá dada por el módulo del vector $\overrightarrow{\mathrm{P'P}}$ o del $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{P'P}}| = |\vec{R}| = 2$$

f) El vector unitario $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{2\hat{x}}{2} = \hat{x}$$

---

### 1.4.2 Sistema de coordenadas polares

**Definición de un punto:**

Tal como se muestra en la figura 1.18, un punto P en un plano se puede determinar mediante la intersección de dos curvas que se cortan ortogonalmente:

- Una circunferencia de ecuación $\rho = \rho_1 = \text{cte}$
- Una semirecta radial (nace en el origen) de ecuación $\phi = \phi_1 = \text{cte}$

**Coordenadas de un punto:**

Las coordenadas del punto P son los parámetros $\rho_1$ y $\phi_1$ que definen las curvas utilizadas para localizar el punto. Denotamos P como P$(\rho_1, \phi_1)$. Los valores admisibles para las coordenadas polares son:

$$\begin{array}{lcl} \rho & \in & [0, +\infty), \\ \phi & \in & [0, 2\pi) \end{array}$$

**Vectores unitarios:**

Como en el caso de las coordenadas cartesianas, se definen dos vectores unitarios:

- $\hat{\rho} \to$ perpendicular a la circunferencia $\rho = \rho_1$ y dirigido hacia valores crecientes de $\rho$
- $\hat{\phi} \to$ perpendicular a la semirecta $\phi = \phi_1$ y dirigido hacia valores crecientes de $\phi$

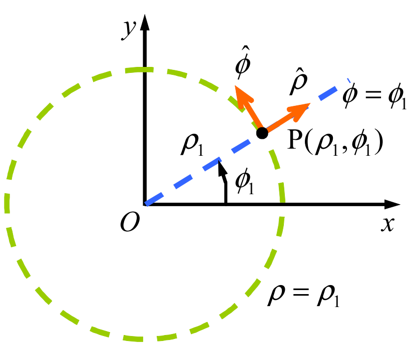


Figura 1.18: Definición de un punto y de sus vectores unitarios asociados en el sistema de coordenadas polares

Obsérvese, en la figura 1.19, cómo la dirección de los vectores unitarios $(\hat{\rho}, \hat{\phi})$ es función del ángulo $\phi$.

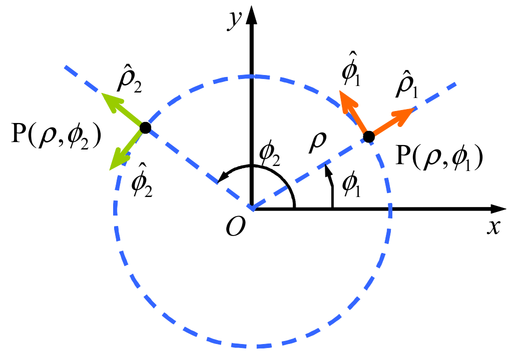


Figura 1.19: Dependencia de los vectores unitarios con la coordenada $\phi$ en el sistema de coordenadas polares

**Componentes de un vector:**

Según se observa en la figura 1.20, un vector arbitrario $\vec{A}$ se expresa en polares como

$$\vec{A} = \vec{A}_\rho + \vec{A}_\phi = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi},$$

donde $A_\rho$ y $A_\phi$ son las componentes de $\vec{A}$:

$$\vec{A} = (A_\rho,\ A_\phi)$$

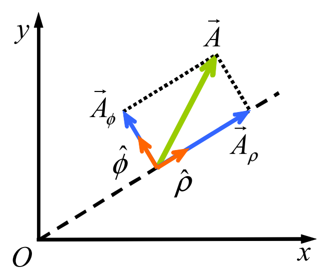


Figura 1.20: Componentes de un vector en polares

**Magnitud de un vector:**

El módulo de un vector en coordenadas polares se puede determinar a partir de la figura 1.20 como

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2}$$

**Suma de vectores:**

Dados los vectores $\vec{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi}$ y $\vec{B} = B_\rho\hat{\rho} + B_\phi\hat{\phi}$, el vector suma $\vec{C}$ tendrá por componentes

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A}+\vec{B}\\ &= A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + B_\rho\hat{\rho} + B_\phi\hat{\phi}\\ &= (A_\rho + B_\rho)\hat{\rho} + (A_\phi + B_\phi)\hat{\phi}\\ &= C_\rho\hat{\rho} + C_\phi\hat{\phi}\end{aligned}$$

donde $C_\rho = A_\rho + B_\rho$ y $C_\phi = A_\phi + B_\phi$.

IMPORTANTE: para poder aplicar las expresiones de la suma anterior es necesario que los dos vectores estén definidos en el mismo punto, debido a que cuando están definidos en puntos distintos los vectores unitarios no tienen por qué ser iguales y no se puede sacar factor común.

**Conversión entre cartesianas y polares:**

Teniendo en cuenta que la representación de un punto o de un vector en coordenadas cartesianas o polares no es más que dos formas de representar matemáticamente el mismo ente, es evidente que debe existir una forma de cambio entre estos dos tipos de sistemas coordenados.

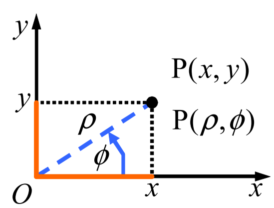


Figura 1.21: Conversión entre coordenadas cartesianas y polares.

Así, un mismo punto P se puede expresar como $P(x, y)$ o como $P(\rho, \phi)$. De la figura 1.21 se deduce que la relación entre ambos conjuntos de coordenadas es

$$\begin{aligned}x &= \rho\cos\phi,\\ y &= \rho\sin\phi.\end{aligned}$$

o alternativamente

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2+y^2},\\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

A su vez, de acuerdo con la figura 1.22, los vectores unitarios de un sistema se pueden expresar en el otro como

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{y},\\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y}.\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos\phi\ \hat{\rho} - \sin\phi\ \hat{\phi},\\ \hat{y} &= \sin\phi\ \hat{\rho} + \cos\phi\ \hat{\phi}.\end{aligned}$$

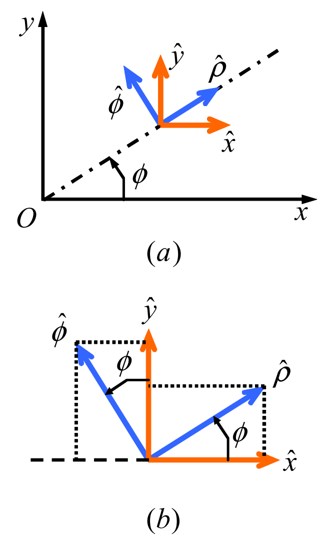


Figura 1.22: Conversión de vectores unitarios entre coordenadas cartesianas y polares. (a) vectores unitarios asociados a un punto arbitrario. (b) Proyección de $(\hat{\rho}, \hat{\phi})$ según $(\hat{x}, \hat{y})$.

---

**Ejemplo 3** *Sea un sistema de coordenadas polares. Consideremos en este sistema los mismos puntos del problema anterior, dados en coordenadas cartesianas como $P(1,1)$ y $P'(-1,1)$. Hallar:*

*a) Las coordenadas de $P$ y $P'$ en polares.*
*b) El vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.*
*c) El vector $\vec{r}\,' = \overrightarrow{OP'}$.*
*d) El vector $\vec{R} = \overrightarrow{P'P}$.*
*e) El vector $-\vec{R} = \overrightarrow{PP'}$.*
*f) La distancia entre $P$ y $P'$.*
*g) El vector unitario $\hat{R}$.*

**Solución:**

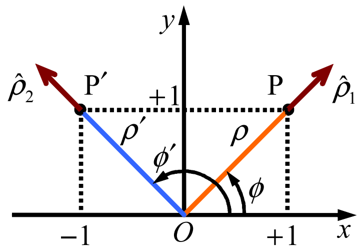


Figura 1.23:

a) Punto $\mathrm{P}(1,1)$:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Luego en polares

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$$

Punto $\mathrm{P}'(-1,1)$:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan\left(\frac{1}{-1}\right)=\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Luego en polares

$$\mathrm{P}'=\mathrm{P}'(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$$

b) El vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ es el vector que va desde $O$ hasta P es decir

$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}\hat{\rho}=\sqrt{2}\hat{\rho}_1$$

c) El vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}'}$ es el vector que va desde $O$ hasta P′ es decir

$$\vec{r}\,'=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\sqrt{2}\hat{\rho}=\sqrt{2}\hat{\rho}_2$$

En este caso, se debe observar mediante una representación gráfica que, aunque algebraicamente los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ sean idénticos, no lo son en realidad pues, para cada uno de ellos, el vector unitario $\hat{\rho}$ tiene direcciones distintas. Por esta razón, los hemos llamado $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$; no es posible hallar los vectores $\vec{R}$ y $-\vec{R}$ mediante la diferencia directa de los vectores $\vec{r}-\vec{r}\,'$ ya que saldría nula y ya acabamos de ver que no lo es. Por consiguiente, es necesario pasar los vectores anteriores a coordenadas cartesianas y proceder a operar posteriormente en cartesianas. Como esto ya se hizo en el problema anterior sólo haremos aquí el paso a cartesianas de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \sqrt{2}\hat{\rho}_1\\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\hat{x}+\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\hat{y}\right]=\hat{x}+\hat{y}\\ \vec{r}\,' &= \sqrt{2}\hat{\rho}_2\\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\hat{x}+\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\hat{y}\right]=-\hat{x}+\hat{y}\end{aligned}$$

---

## 1.5 Sistemas de coordenadas en 3D

### 1.5.1 Sistema de coordenadas cartesianas en 3D

El sistema de coordenadas cartesianas es quizás el que se usa de manera más común. Los ejes son rectas que se denominan $x$, $y$, $z$. Es un sistema “a derechas” en el que el orden de las coordenadas es $x\rightarrow y\rightarrow z\rightarrow x$. Cuando llevamos el eje $x$ (parte positiva) sobre el eje $y$ (parte positiva) por el camino más corto, la parte positiva del eje $z$ está en la dirección de avance de un tornillo (regla de la mano derecha).

**Definición de un punto:**

Según se ilustra en la figura 1.24, un punto P en el espacio se puede determinar mediante la intersección de tres planos mutuamente perpendiculares, de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x &= x_1=\text{cte},\\ y &= y_1=\text{cte},\\ z &= z_1=\text{cte}.\end{aligned}$$

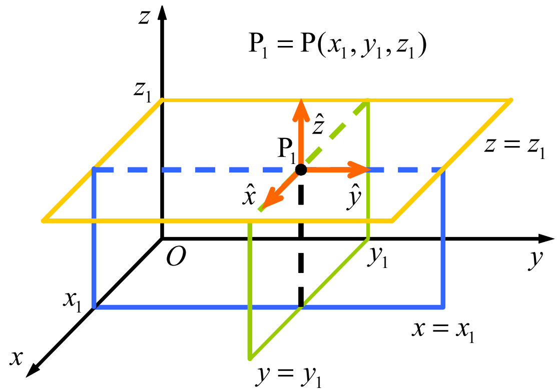


Figura 1.24: Definición de un punto y de sus vectores unitarios asociados en el sistema de coordenadas cartesianas 3D

**Coordenadas de un punto:**

Las coordenadas del punto $\mathrm{P}_1$ son los parámetros $x_1$, $y_1$ y $z_1$ que definen cada plano de forma que $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$.

**Vectores unitarios:**

En el sistema cartesiano 3D, los vectores unitarios se definen como:

- $\hat{x} \rightarrow$ perpendicular al plano $x = x_1$
- $\hat{y} \rightarrow$ perpendicular al plano $y = y_1$
- $\hat{z} \rightarrow$ perpendicular al plano $z = z_1$

En este sistema, los vectores unitarios tienen dirección constante (independiente de las coordenadas particulares del punto).

**Componentes de un vector:**

Sea $\vec{A}$ un vector arbitrario. De acuerdo con la figura 1.25, podemos expresar $\vec{A}$ como

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z},$$

donde $A_x$, $A_y$ y $A_z$ son las componentes de $\vec{A}$, luego $\vec{A} = (A_x,\, A_y,\, A_z)$

**Magnitud de un vector:**

El módulo de un vector en coordenadas cartesianas se puede determinar a partir de la figura 1.25 como

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

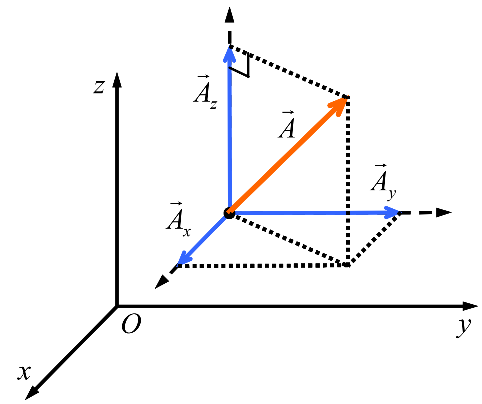


Figura 1.25: Componentes de un vector en coordenadas cartesianas 3D

**Vector de posición:**

Dado un punto arbitrario $\mathrm{P}(x,\, y,\, z)$, el vector de posición asociado a dicho punto es un vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto P, tal como se muestra en la figura 1.26. De forma genérica, el vector de posición se denota como $\vec{r}$ y vale

$$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

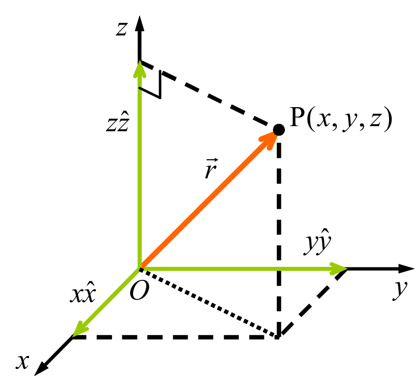


Figura 1.26: Vector de posición en coordenadas cartesianas 3D

**Suma de vectores:**

Dados los vectores $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ y $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$, el vector suma $\vec{C}$ tendrá por componentes

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A}+\vec{B}\\ &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} + B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}\\ &= (A_x+B_x)\hat{x} + (A_y+B_y)\hat{y} + (A_z+B_z)\hat{z}\\ &= C_x\hat{x} + C_y\hat{y} + C_z\hat{z}\end{aligned}$$

donde $C_x = A_x+B_x$, $C_y = A_y+B_y$ y $C_z = A_z+B_z$.

**Producto escalar de dos vectores:**

De acuerdo con la definición de producto escalar, se cumplen las siguientes relaciones entre los vectores unitarios del sistema de coordenadas:

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1, \quad \hat{y}\cdot\hat{y} = 1, \quad \hat{z}\cdot\hat{z} = 1,$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = 0.$$

Por consiguiente, el producto escalar de dos vectores arbitrarios en un sistema de coordenadas cartesiano 3D es

$$\begin{aligned}&\vec{A}\cdot\vec{B}\\ =\ &(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})\\ =\ &A_xB_x(\hat{x}\cdot\hat{x}) + A_xB_y(\hat{x}\cdot\hat{y}) + A_xB_z(\hat{x}\cdot\hat{z})\\ &+A_yB_x(\hat{y}\cdot\hat{x}) + A_yB_y(\hat{y}\cdot\hat{y}) + A_yB_z(\hat{y}\cdot\hat{z})\\ &+A_zB_x(\hat{z}\cdot\hat{x}) + A_zB_y(\hat{z}\cdot\hat{y}) + A_zB_z(\hat{z}\cdot\hat{z})\\ =\ &A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

**Producto vectorial de dos vectores:**

Según la definición de producto vectorial, se cumplen las siguientes relaciones entre los vectores unitarios del sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned}\hat{x}\times\hat{x} &= 0, \qquad \hat{y}\times\hat{y} = 0, \qquad \hat{z}\times\hat{z} = 0\\ \hat{x}\times\hat{y} &= \hat{z}, \qquad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}, \qquad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}.\end{aligned}$$

En consecuencia, el producto vectorial de dos vectores arbitrarios en un sistema de coordenadas cartesiano 3D es:

$$\begin{aligned}&\vec{A}\times\vec{B}\\ =\ &(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})\\ =\ &A_xB_x\,(\hat{x}\times\hat{x}) + A_xB_y\,(\hat{x}\times\hat{y})\\ &+A_xB_z\,(\hat{x}\times\hat{z}) + A_yB_x\,(\hat{y}\times\hat{x})\\ &+A_yB_y\,(\hat{y}\times\hat{y}) + A_yB_z\,(\hat{y}\times\hat{z})\\ &+A_zB_x\,(\hat{z}\times\hat{x}) + A_zB_y\,(\hat{z}\times\hat{y})\\ &+A_zB_z\,(\hat{z}\times\hat{z})\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x}\\ &+(A_zB_x - A_xB_z)\hat{y}\\ &+(A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}\end{aligned}$$

Existe una regla mnemotécnica para el cálculo del producto vectorial:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

**Producto mixto:**

Además de los productos de vectores definidos hasta ahora, existen otros que son combinaciones distintas de los anteriores. En particular el denominado **producto mixto** se define como

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

Este producto tiene la propiedad denominada cíclica

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

tal y como puede comprobar el lector.

**Cantidades diferenciales:**

**Diferencial de longitud:** Sea un punto arbitrario $\mathrm{P}(x,\, y,\, z)$ y supongamos que incrementamos la coordenada $x$ en una cantidad muy pequeña $\mathrm{d}x$ (incremento infinitesimal o elemental) hasta otro punto $\mathrm{P}(x+\mathrm{d}x,\, y,\, z)$. Este desplazamiento define un vector

$$\mathrm{d}\vec{\ell}_x = \mathrm{d}x\hat{x}$$

que llamamos diferencial de longitud en la dirección $x$.

Análogamente, podemos considerar un incremento infinitesimal en la dirección $y$:

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z) \to \mathrm{P}(x,\ y + \mathrm{d}y,\ z)$$

y definir un diferencial de longitud en dirección $y$ como

$$\mathrm{d}\vec{\ell}_y = \mathrm{d}y\hat{y}$$

Por último, también podemos considerar un incremento infinitesimal en la dirección $z$:

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z) \to \mathrm{P}(x,\ y,\ z + \mathrm{d}z)$$

y definir un diferencial de longitud en dirección $z$ como

$$\mathrm{d}\vec{\ell}_z = \mathrm{d}z\hat{z}$$

Consideremos ahora un caso más general mostrado en la figura 1.27; pasemos de un punto P a otro punto muy próximo a él de manera que se incrementen las tres coordenadas simultáneamente

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z) \to \mathrm{P}(x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y,\ z + \mathrm{d}z)$$

Podemos definir el paso mediante un vector diferencial de longitud totalmente general de la forma

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\vec{\ell}_x + \mathrm{d}\vec{\ell}_y + \mathrm{d}\vec{\ell}_z = \mathrm{d}x\hat{x} + \mathrm{d}y\hat{y} + \mathrm{d}z\hat{z}$$

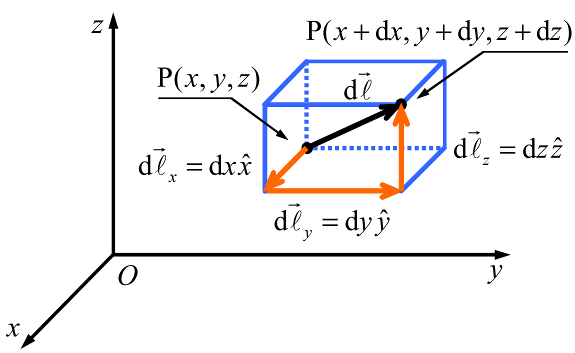


Figura 1.27: Diferencial de longitud en coordenadas cartesianas 3D

**Diferenciales de superficie y de volumen:** Sean los puntos $\mathrm{P}(x, y, z)$ y $\mathrm{P}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ los vértices opuestos de un paralepípedo elemental tal y como muestra la figura 1.28.

El diferencial de volumen del paralepípedo elemental es

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

A su vez, las diferenciales de superficie se pueden obtener a partir de las áreas de las caras del volumen elemental

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{S}_x &= \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\hat{x}, \\ \mathrm{d}\vec{S}_y &= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\hat{y}, \\ \mathrm{d}\vec{S}_z &= \mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\hat{z}, \end{aligned}$$

donde se ha dado carácter vectorial al diferencial de superficie como un vector cuya magnitud es igual al área y cuya dirección es hacia afuera del volumen que limita.

El diferencial de superficie en su forma más general se escribe

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\hat{x} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\hat{y} + \mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\hat{z}$$

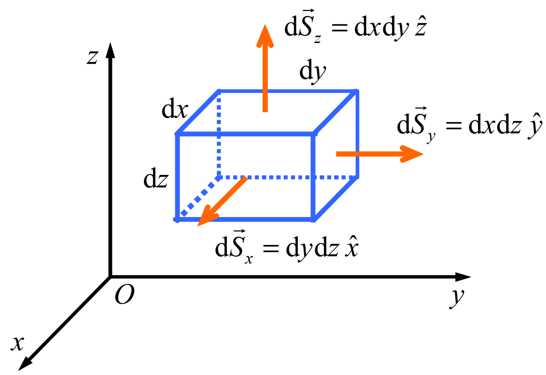


Figura 1.28: Diferenciales de superficie en coordenadas cartesianas 3D

---

**Ejemplo 4** *Consideremos en un sistema de coordenadas cartesiano los puntos $P(3,1,3)$ y $P'(1,3,2)$. Calcular:*

*a) El vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$*
*b) El vector $\vec{r}' = \overrightarrow{OP'}$.*
*c) El vector $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$*
*d) Distancia de $P$ a $P'$*
*e) El vector unitario $\hat{R}$*
*f) El producto escalar $\vec{r} \cdot \vec{r}'$*
*g) El producto vectorial $\vec{r} \times \vec{r}'$*

**Solución:**

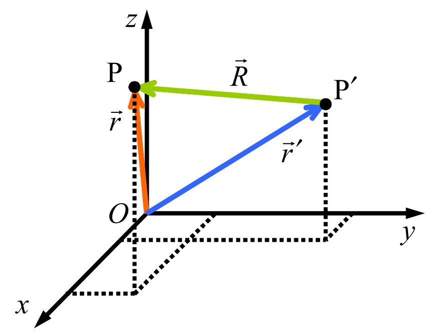


Figura 1.29:

a) Vector $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3-0)\hat{x} + (1-0)\hat{y} + (3-0)\hat{z}\\ &= 3\hat{x} + 1\hat{y} + 3\hat{z}\end{aligned}$$

b) Vector $\vec{r}\,' = \overrightarrow{\mathrm{OP}'}$:

$$\begin{aligned}\vec{r}\,' &= \overrightarrow{\mathrm{OP}'} = (1-0)\hat{x} + (3-0)\hat{y} + (2-0)\hat{z}\\ &= 1\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}\end{aligned}$$

c) Vector $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}\,' = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}'}\\ &= (3\hat{x} + 1\hat{y} + 3\hat{z}) - (1\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z})\\ &= 2\hat{x} - 2\hat{y} + 1\hat{z}\end{aligned}$$

d) Distancia de P a P′:

$$|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}| = |\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}}| = |\vec{R}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

e) Vector unitario $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{2\hat{x} - 2\hat{y} + 1\hat{z}}{3}$$

f) Producto escalar:

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{r}\,' &= (3\hat{x} + 1\hat{y} + 3\hat{z}) \cdot (1\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z})\\ &= 3 + 3 + 6 = 12\end{aligned}$$

g) Producto vectorial:

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{r}\,' &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\\ &= (2-9)\hat{x} + (3-6)\hat{y} + (9-1)\hat{z}\\ &= -7\hat{x} - 3\hat{y} + 8\hat{z}\end{aligned}$$

---

### 1.5.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

En un sistema de coordenadas cilíndrico se usan, como en el sistema de coordenadas cartesiano, tres superficies; sin embargo en este caso son algo más complejas: un cilindro, un semiplano y un plano.

**Definición de un punto:**

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P en el espacio queda determinado por el corte de las tres superficies siguientes:

- Un cilindro de eje $z$ y de radio $\rho = \rho_1 = \text{cte}$
- Un semiplano perpendicular al plano $xy$ que forma un ángulo $\phi = \phi_1 = \text{cte}$ con el plano $xz$ y tiene un lado que coincide con el eje $z$
- Plano $z = z_1 = \text{cte}$

Las tres superficies se muestran en la figura 1.30. Es, como el sistema de coordenadas cartesiano, un sistema a derechas con la secuencia $\rho \rightarrow \phi \rightarrow z$.

**Coordenadas de un punto:**

Las coordenadas del punto $P_1$ son los parámetros $\rho_1$, $\phi_1$ y $z_1$ que definen cada superficie, luego $P_1 = P(\rho_1, \phi_1, z_1)$. La coordenada $\phi$ es un ángulo que se mide en radianes o en grados, con origen en el plano $xz$ y con dirección desde $x$ hacia $y$. Vemos que $\rho$ puede variar entre 0 e $+\infty$, $\phi$ entre 0 y $2\pi$ mientras que $z$ varía entre $-\infty$ y $+\infty$.

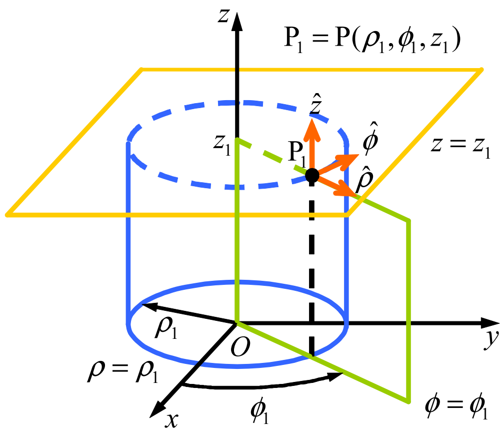


Figura 1.30: Definición de un punto y de sus vectores unitarios asociados en el sistema de coordenadas cilíndricas

**Vectores unitarios:**

En el sistema cilíndrico los vectores unitarios se definen como vectores perpendiculares a las superficies anteriormente descritas:

- $\hat{\rho} \rightarrow$ perpendicular al cilindro de radio $\rho =$ cte. Se encuentra en un plano paralelo al plano $x$-$y$, y está dirigido hacia $\rho$ creciente
- $\hat{\phi} \rightarrow$ perpendicular al semiplano $\phi =$ cte. También se encuentra en un plano paralelo al plano $x$-$y$, pero es tangente al cilindro y dirigido hacia la dirección de $\phi$ creciente.
- $\hat{z} \rightarrow$ perpendicular al plano $z =$ cte y dirigido en el sentido de las $z$ crecientes.

Obsérvese que los tres vectores son ortogonales entre sí y que la dirección de los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ no es constante, sino que es función de la coordenada $\phi$, como ocurría con las coordenadas polares.

**Componentes de un vector:**

Sea $\vec{A}$ un vector arbitrario. Podemos expresar $\vec{A}$ como

$$\vec{A} = \vec{A}_\rho + \vec{A}_\phi + \vec{A}_z = A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + A_z\hat{z},$$

**Magnitud de un vector:**

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$$

**Vector de posición:**

Según se observa en la figura 1.31, dado un punto arbitrario del espacio $\mathrm{P}(\rho,\ \phi,\ z)$, el vector de posición $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ asociado a dicho punto es

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

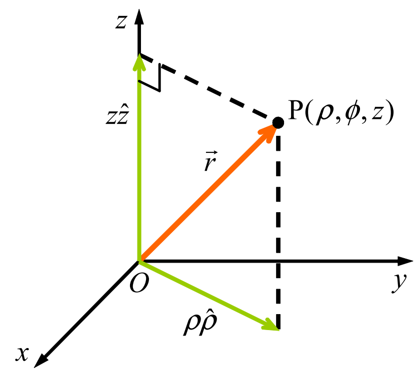


Figura 1.31: Vector de posición en coordenadas cilíndricas

**Suma de vectores:**

Dados los vectores $\vec{A} = A_\rho\,\hat{\rho} + A_\phi\,\hat{\phi} + A_z\,\hat{z}$ y $\vec{B} = B_\rho\,\hat{\rho} + B_\phi\,\hat{\phi} + B_z\,\hat{z}$, el vector suma $\vec{C}$ tendrá por componentes

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\
&= A_\rho\,\hat{\rho} + A_\phi\,\hat{\phi} + A_z\,\hat{z} + B_\rho\,\hat{\rho} + B_\phi\,\hat{\phi} + B_z\,\hat{z} \\
&= (A_\rho + B_\rho)\hat{\rho} + (A_\phi + B_\phi)\hat{\phi} + (A_z + B_z)\hat{z} \\
&= C_\rho\hat{\rho} + C_\phi\hat{\phi} + C_z\hat{z}
\end{aligned}$$

donde $C_\rho = A_\rho + B_\rho$, $C_\phi = A_\phi + B_\phi$ y $C_z = A_z + B_z$.

Al igual que ocurre con las coordenadas polares, debemos tener en cuenta que, para sacar factor común en la expresión anterior, los vectores unitarios deben tener la misma dirección.

**Producto escalar de dos vectores:**

Los productos escalares de los vectores unitarios $(\hat{\rho},\ \hat{\phi},\ \hat{z})$ son:

$$\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = 1, \quad \hat{\phi}\cdot\hat{\phi} = 1, \quad \hat{z}\cdot\hat{z} = 1,$$

$$\hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{z} = \hat{\phi}\cdot\hat{z} = 0,$$

El producto escalar de dos vectores arbitrarios se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& \vec{A}\cdot\vec{B} \\
= \;& (A_\rho\,\hat{\rho}+A_\phi\,\hat{\phi}+A_z\,\hat{z})\cdot(B_\rho\,\hat{\rho}+B_\phi\,\hat{\phi}+B_z\,\hat{z}) \\
= \;& A_\rho B_\rho\,(\hat{\rho}\cdot\hat{\rho})+A_\rho B_\phi(\hat{\rho}\cdot\hat{\phi})+A_\rho B_z\,(\hat{\rho}\cdot\,\hat{z}) \\
& +A_\phi B_\rho(\hat{\phi}\cdot\hat{\rho})+A_\phi B_\phi(\hat{\phi}\cdot\hat{\phi})+A_\phi B_z(\hat{\phi}\cdot\hat{z}) \\
& +A_z B_\rho\,(\hat{z}\cdot\hat{\rho})+A_z B_\phi(\hat{z}\cdot\hat{\phi})+A_z B_z\,(\hat{z}\cdot\,\hat{z}) \\
= \;& A_\rho B_\rho+A_\phi B_\phi+A_z B_z
\end{aligned}$$

**Producto vectorial de dos vectores:**

Los productos vectoriales de los vectores unitarios ($\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$) son:

$$\hat{\rho}\times\hat{\phi}=\hat{z},\quad \hat{\phi}\times\hat{z}=\hat{\rho},\quad \hat{z}\times\hat{\rho}=\hat{\phi},$$

$$\hat{\rho}\times\hat{\rho}=\hat{\phi}\times\hat{\phi}=\hat{z}\times\hat{z}=0,$$

El producto vectorial de dos vectores arbitrarios es

$$\begin{aligned}
& \vec{A}\times\vec{B} \\
= \;& (A_\rho\,\hat{\rho}+A_\phi\,\hat{\phi}+A_z\,\hat{z})\times(B_\rho\,\hat{\rho}+B_\phi\,\hat{\phi}+B_z\,\hat{z}) \\
= \;& A_\rho B_\rho\,(\hat{\rho}\times\hat{\rho})+A_\rho B_\phi(\hat{\rho}\times\hat{\phi}) \\
& +A_\rho B_z\,(\hat{\rho}\times\,\hat{z})+A_\phi B_\rho(\hat{\phi}\times\hat{\rho}) \\
& +A_\phi B_\phi(\hat{\phi}\times\hat{\phi})+A_\phi B_z(\hat{\phi}\times\hat{z}) \\
& +A_z B_\rho\,(\hat{z}\times\hat{\rho})+A_z B_\phi(\hat{z}\times\hat{\phi}) \\
& +A_z B_z\,(\hat{z}\times\,\hat{z}) \\
= \;& \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

**Diferenciales de longitud, superficie y volumen:**

Consideramos un punto arbitrario $\mathrm{P}(\rho,\,\phi,z)$ e incrementamos sucesivamente las tres coordenadas en una cantidad diferencial:

$$\mathrm{P}(\rho,\,\phi,\,z)\rightarrow\mathrm{P}(\rho+\mathrm{d}\rho,\;\phi+\mathrm{d}\phi,\;z+\mathrm{d}z).$$

Quedan así definidos los vértices de un volumen elemental, tal como se muestra en la figura 1.32.

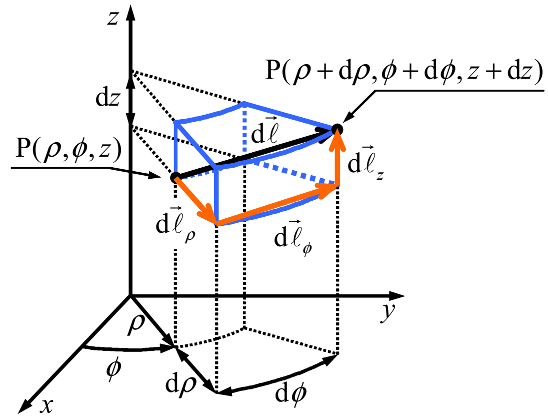


Figura 1.32: Diferencial de longitud en coordenadas cilíndricas

Los lados de este volumen elemental definen los diferenciales de longitud según cada una de las coordenadas. Así

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\ell}_\rho &= \mathrm{d}\rho\,\hat{\rho}, \\
\mathrm{d}\vec{\ell}_\phi &= \rho\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi}, \\
\mathrm{d}\vec{\ell}_z &= \mathrm{d}z\,\hat{z}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que $\mathrm{d}\vec{\ell}_\phi$ es un arco y por lo tanto su longitud es igual al ángulo $\mathrm{d}\phi$ por el radio $\rho$. El diferencial de longitud en su forma más general se define como el vector elemental que va desde el punto $\mathrm{P}(\rho,\,\phi,\,z)$ al punto $\mathrm{P}(\rho+\mathrm{d}\rho,\;\phi+\mathrm{d}\phi,\;z+\mathrm{d}z)$. Por tanto

$$\mathrm{d}\vec{\ell}=\mathrm{d}\vec{\ell}_\rho+\mathrm{d}\vec{\ell}_\phi+\mathrm{d}\vec{\ell}_z=\mathrm{d}\rho\,\hat{\rho}+\rho\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi}+\mathrm{d}z\,\hat{z}$$

Cada cara del volumen elemental define un vector superficie. Así, según se muestra en la figura 1.33 los diferenciales de superficie valen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{S}_\rho &= \mathrm{d}\ell_\phi\mathrm{d}\ell_z\,\hat{\rho}=\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\,\hat{\rho} \\
\mathrm{d}\vec{S}_\phi &= \mathrm{d}\ell_\rho\mathrm{d}\ell_z\,\hat{\phi}=\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\,\hat{\phi} \\
\mathrm{d}\vec{S}_z &= \mathrm{d}\ell_\rho\mathrm{d}\ell_\phi\,\hat{z}=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\,\hat{z}
\end{aligned}$$

La forma más general del vector diferencial de superficie en coordenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{S} &= \mathrm{d}\vec{S}_\rho+\mathrm{d}\vec{S}_\phi+\mathrm{d}\vec{S}_z \\
&= \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\,\hat{\rho}+\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\,\hat{\phi}+\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\,\hat{z}
\end{aligned}$$

Por último, el diferencial de volumen vale:

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}\ell_\rho\mathrm{d}\ell_\phi\mathrm{d}\ell_z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

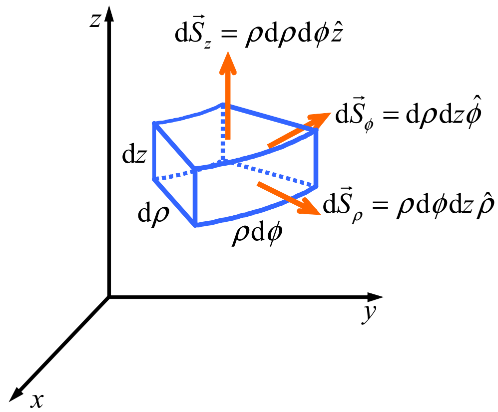


Figura 1.33: Diferenciales de superficie en coordenadas cilíndricas

**Relación entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas**

La representación de puntos y vectores en sistemas de coordenadas distintos no altera el hecho de que los entes a representar son los mismos. Debe haber, por tanto, una forma sencilla de, teniendo las coordenadas de un punto en uno los sistemas de coordenadas, hallar las coordenadas de ese punto en el otro sistema; lo mismo debe suceder con cualquier vector y por tanto con los vectores unitarios. Queda para comprobar por el lector que las relaciones de transformación entre puntos y vectores unitarios son las siguientes:

- Coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z \end{aligned}$$

- Vectores unitarios:

| | $\hat{x}$ | $\hat{y}$ | $\hat{z}$ |
|---|---|---|---|
| $\hat{\rho}$ | $\cos\phi$ | $\sin\phi$ | 0 |
| $\hat{\phi}$ | $-\sin\phi$ | $\cos\phi$ | 0 |
| $\hat{z}$ | 0 | 0 | 1 |

---

**Ejemplo 5** *Transformar el punto $P(3, 210^o, 5)$ de coordenadas cilíndricas a cartesianas.*

**Solución:**

Las coordenadas del punto dado son:

$$\begin{aligned} \rho &= 3 \\ \phi &= 210^o \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Las correspondientes coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi = 3\cos(210^o) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ y &= \rho\sin\phi = 3\sin(210^o) = -\frac{3}{2} \\ z &= z = 5 \end{aligned}$$

Luego, el punto en coordenadas cartesianas es

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}, 5)$$

---

## 1.6 Campos escalares y vectoriales

Uno de los conceptos más importante en el estudio del electromagnetismo es el concepto de campo. En el estudio de esta asignatura encontraremos dos tipos de campos: **campos escalares** y **campos vectoriales**.

**Definición de campo escalar:**

Son funciones escalares de las coordenadas espaciales y/o del tiempo. Empleando coordenadas cartesianas, podemos poner, entonces

$$U \equiv U(x, y, z, t),$$

donde $U$ es la función o campo escalar. Si este campo no depende del tiempo queda

$$U \equiv U(x, y, z).$$

Un ejemplo de campo escalar es la temperatura. Para un instante de tiempo dado, el valor de la temperatura depende del punto del espacio en el que estemos haciendo la observación

$$T \equiv T(x, y, z).$$

Este es el concepto de campo escalar: no tiene “efecto de dirección” asociado, pudiendo tomar

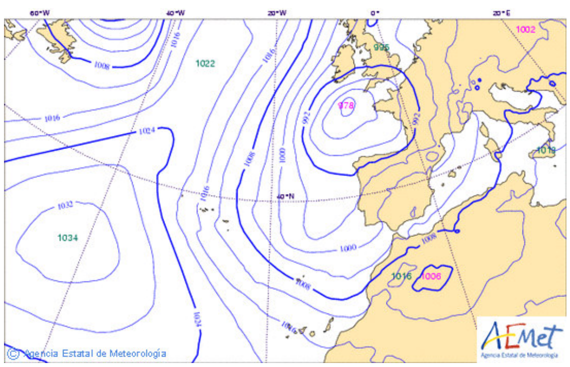


Figura 1.34: Representación gráfica de un campo escalar.

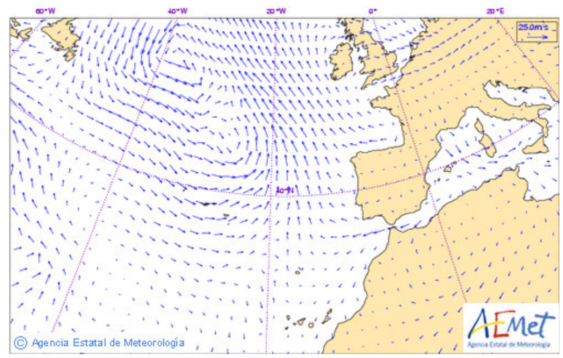


Figura 1.35: Representación gráfica de un campo vectorial

cualquier valor que sólo dependerá del punto e instante de observación.

Los campos escalares se representan gráficamente mediante superficies, de tal manera que todos los puntos de una superficie tienen el mismo valor del campo escalar. En el plano, estas superficies se reducen a curvas, denominadas curvas o líneas de nivel. Así por ejemplo, en la figura 1.34, se muestra un mapa de estudio del tiempo, donde líneas isobaras unen los puntos de presión constante.

**Definición de campo vectorial:**

La diferencia básica entre un campo escalar y otro vectorial es que en este último caso la cantidad tiene, además de una magnitud en cada punto, una propiedad direccional. Son pues funciones vectoriales de las coordenadas espaciales y/o del tiempo. Luego

$$\vec{A} \equiv \vec{A}(x, y, z, t),$$

donde $\vec{A}$ es el campo vectorial. Un ejemplo de campo vectorial podría ser la velocidad del viento. Podemos representar la velocidad del viento en cada punto del espacio mediante vectores (flechas) cuya magnitud se indica a través de la longitud de cada vector y la dirección mediante su orientación, tal como se muestra en la figura 1.35.

Otros ejemplos de campos vectoriales son la fuerza, la aceleración, el campo eléctrico, etc.

## 1.7 Cálculo integral

En la teoría electromagnética es frecuente la necesidad de realizar el cálculo de integrales. Estas integrales pueden involucrar tanto campos escalares como vectoriales. En esta sección se introducen los tipos de integrales que más comúnmente nos encontraremos en temas posteriores. Como veremos, la noción de integral que emplearemos en esta asignatura está estrechamente ligada con la idea de suma.

### 1.7.1 Integral de línea

**Integral de línea de un campo escalar:**

**Definición:**

Sea un campo escalar $U$; se define la integral de línea de $U$ entre los puntos $\mathrm{P}_i$ y $\mathrm{P}_f$ a lo largo de la curva $C$ como

$$\int_{\mathrm{P}_i,\,C}^{\mathrm{P}_f} U \mathrm{d}\ell .$$

Obsérvese que, en esta definición, el diferencial de longitud es un escalar, por tanto, el resultado de la integración es también un escalar.

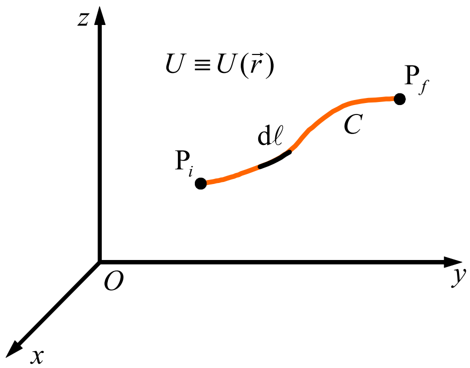


Figura 1.36: Camino de integración, $C$, situado en una región del espacio en la que existe un campo escalar $U$.

**Interpretación:**

Interpretaremos la expresión anterior empleando un ejemplo.

---

**Ejemplo 6** *Considérese un hilo recto como el mostrado en la figura. Desde un punto de vista matemático el hilo viene descrito por un segmento de la recta* $y = 1$*. Los puntos inicial y final de este segmento son* $P_i = P(0,1)$ *y* $P_f = P(8,1)$*, respectivamente. La longitud del hilo es, por tanto, de* $L = 8$ m*. Se desea conocer la masa total del hilo suponiendo que su densidad vale* $\rho_\ell$ g/m *para dos casos distintos:*

*a) Un hilo fabricado de un material homogéneo de densidad* $\rho_\ell = 2$ g/m.

*b) Un hilo cuya densidad varía con la longitud según la ley* $\rho_\ell(x) = 2x^2$ g/m.


Figura 1.37:

**Solución:**

a) En este caso la masa del hilo es

$$\boxed{m = \rho_\ell L = 2 \times 8 = 16 \text{ g}.}$$

b) Ahora la densidad del hilo no es constante y en consecuencia no podemos aplicar la expresión del apartado anterior. Podemos, sin embargo, encontrar un valor aproximado de la masa del hilo dividiendo éste en segmentos y aproximando $\rho_\ell(x)$ por un valor constante en cada uno de los segmentos.

Si dividimos el hilo en dos segmentos iguales de longitud $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = 4$ m y tomamos como densidad en cada tramo $\rho_{\ell 1} = \rho_\ell(2) = 8$ y $\rho_{\ell 2} = \rho_\ell(6) = 72$, la masa resulta

$$m \simeq \rho_{\ell 1}\Delta\ell_1 + \rho_{\ell 2}\Delta\ell_2 = (8 + 72) \times 4 = 320 \text{ g}.$$

Como ya hemos comentado este resultado es aproximado. Cabe ahora preguntarse si es posible obtener una mejor aproximación al valor real del hilo, es decir, al valor que obtendríamos al pesar el hilo en una balanza. Como el lector ya habrá intuído la respuesta es afirmativa: para conseguirlo simplemente tenemos que dividir el hilo en un número mayor de segmentos y rehacer el cálculo anterior.

Así por ejemplo, tomando cuatro segmentos de longitud $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell_3 = \Delta\ell_4 = 2$ m, y tomando $\rho_\ell$ constante en cada trozo e igual al valor que toma en el centro del trozo tenemos

$$\begin{aligned} m &\simeq \rho_{\ell 1}\Delta\ell_1 + \rho_{\ell 2}\Delta\ell_2 + \rho_{\ell 3}\Delta\ell_3 + \rho_{\ell 4}\Delta\ell_4 \\ &= \rho_\ell(1) \times 2 + \rho_\ell(3) \times 2 + \rho_\ell(5) \times 2 \\ &\quad + \rho_\ell(7) \times 2 \\ &= (2 + 18 + 50 + 98) \times 2 = 336 \text{ g}. \end{aligned}$$

El resultado será más exacto cuanto más pequeños sean los segmentos en que dividamos el hilo. Para un caso general en el que tomemos un número $N$ de segmentos, la masa se expresaría

$$m \simeq \rho_{\ell 1}\Delta\ell_1 + \rho_{\ell 1}\Delta\ell_2 + \cdots + \rho_{\ell N}\Delta\ell_N,$$

que puede escribirse de forma más compacta como

$$m \simeq \sum_{n=1}^{N} \rho_{\ell n}\Delta\ell_n.$$

Para obtener la masa exacta deberíamos dividir el hilo en un número infinito de segmentos infinitesimales (arbitrariamente pequeños), lo cuál matemáticamente se expresa

$$m = \lim_{\Delta\ell_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\ell n} \Delta\ell_n$$

Este proceso de paso al límite conduce directamente a la idea de integral. En efecto

$$m = \lim_{\Delta\ell_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\ell n} \Delta\ell_n = \int_{\mathrm{P}_i, C}^{\mathrm{P}_f} \rho_\ell \, \mathrm{d}\ell.$$

Con todo esto la masa buscada resulta

$$m = \int_{x_i}^{x_f} \rho_\ell \, \mathrm{d}x = \int_{0, y=1}^{8} 2x^2 \, \mathrm{d}x = 341.33\,\mathrm{g}\,.$$

---

La necesidad de integrar no solamente puede deberse a la dependencia del campo con la posición, como ocurría en el ejemplo anterior, sino también al propio **camino de integración**.

### Integral de línea de un campo vectorial: concepto de circulación

**Definición:**

Consideremos un camino (curva) $C$. Sobre este camino consideraremos dos puntos $\mathrm{P}_i$ y $\mathrm{P}_f$, y un desplazamiento elemental $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Supondremos además la existencia de un campo vectorial $\vec{A}$. La integral de línea del campo $\vec{A}$ entre los puntos $\mathrm{P}_i$ y $\mathrm{P}_f$ siguiendo el camino $C$ se define como

$$\boxed{\lim_{\Delta\ell_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{A}_n \cdot \Delta\vec{\ell}_n = \int_{\mathrm{P}_i, C}^{\mathrm{P}_f} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$$

Otras formas de expresar esta integral son

$$\int_{\mathrm{P}_i, C}^{\mathrm{P}_f} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathrm{P}_i, C}^{\mathrm{P}_f} \vec{A} \cdot \hat{t} \, \mathrm{d}\ell = \int_{\mathrm{P}_i, C}^{\mathrm{P}_f} A \cos\alpha \, \mathrm{d}\ell.$$

donde $\hat{t}$ representa el vector unitario en la dirección de $\mathrm{d}\vec{\ell}$ y $\alpha$ el ángulo formado entre $\mathrm{d}\vec{\ell}$ y $\vec{A}$.

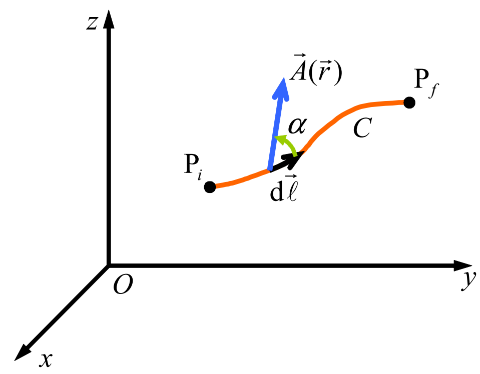


Figura 1.38: Camino de integración, $C$, situado en una región del espacio en la que existe un campo vectorial $\vec{A}$.

El cálculo de la integral de línea es fácil cuando se plantea en un sistema de coordenadas ortogonal. Así en coordenadas cartesianas resulta

$$\int_{\mathrm{P}_i, C}^{\mathrm{P}_f} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{x_i}^{x_f} A_x \, \mathrm{d}x + \int_{y_i}^{y_f} A_y \, \mathrm{d}y + \int_{z_i}^{z_f} A_z \, \mathrm{d}z$$

Cuando el camino de integración es cerrado la integral de línea se denomina **circulación** y se denota

$$C = \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Si la circulación es nula, se dice que $\vec{A}$ es un **campo conservativo**.

Una aplicación usual de la integral del línea de un campo vectorial es el cálculo del trabajo realizado por una fuerza a lo largo de un camino. Esta idea se ilustra en el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 7** *Calcular el trabajo realizado por la fuerza* $\vec{F} = -2(x+y)\,\hat{x} - (2x+3)\,\hat{y}$ *entre los puntos* $P_i = P(1,2)$ *y* $P_f = P(3,5)$ *para los siguientes caminos:*

*a) La recta* $C_1$ *de ecuación* $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

*b) El camino formado por la recta* $C_2$ *de ecuación* $y = 2$ *y la recta* $C_3$ *de ecuación* $x = 3$.

*c) El camino cerrado* $-C_1 + C_2 + C_3$ *recorrido en sentido antihorario.*

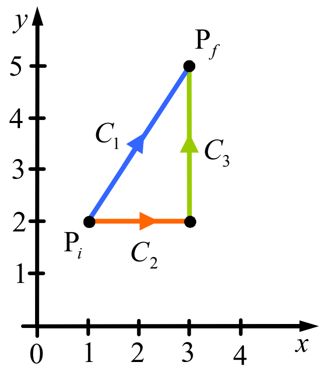


Figura 1.39:

**Solución:**

La forma general de calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ entre los puntos $\mathrm{P}_i$ y $\mathrm{P}_f$ a lo largo de un camino genérico $C$ es

$$W_C = \int_{\mathrm{P}_i,C}^{\mathrm{P}_f} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Teniendo en cuenta que el elemento de línea en coordenadas cartesianas 2D vale

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y}$$

la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned} W_C &= \int_{\mathrm{P}_i,C}^{\mathrm{P}_f} [-2(x+y)\ \mathrm{d}x - (2x+3)dy] \\ &= \underbrace{-2\int_{x_i}^{x_f}(x+y)\ \mathrm{d}x}_{\mathrm{I}_1} \underbrace{-\int_{y_i}^{y_f}(2x+3)\ \mathrm{d}y}_{\mathrm{I}_2}. \end{aligned}$$

Calcularemos ahora estas integrales para los caminos indicados en el enunciado.
a) $\mathrm{I}_1$ es una integral en $x$, sin embargo su integrando depende de $y$. Como la integral se realiza a lo largo del camino $C_1$ los valores que toman las variables $x$ e $y$ están relacionadas por la ecuación del camino $C_1$ así como sus derivadas. Resolvemos entonces el problema utilizando la ecuación del camino $C_1$ y sustituyendo $y$ por su valor en función de $x$, luego

$$\mathrm{I}_1 = -\int_1^3 (5x+1)\ \mathrm{d}x = -22.$$

Análogamente $\mathrm{I}_2$ es una integral en $y$ cuyo integrando depende de $x$. Empleando entonces $C_1$ para obtener $x$ por su valor en función de $y$,

$$x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}$$

y sustituyendo en $\mathrm{I}_2$ se obtiene

$$\mathrm{I}_2 = -\frac{1}{3}\int_2^5 (4y+7)\ \mathrm{d}y = -21.$$

Por tanto el trabajo buscado vale

$$\boxed{W_{C_1} = I_1 + I_2 = -22 - 21 = -43.}$$

b) En este caso el trabajo pedido es

$$W_{C_2+C_3} = W_{C_2} + W_{C_3}.$$

El trabajo $W_{C_2}$ se calcula mediante

$$\begin{aligned} W_{C_2} &= \int_{\mathrm{P}_i,C_2}^{\mathrm{P}_0} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &= -2\int_1^3 (x+y)\ \mathrm{d}x - \int_2^2 (2x+3)\ \mathrm{d}y \\ &= -2\int_1^3 (x+2)\ \mathrm{d}x = -16. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} W_{C_3} &= \int_{\mathrm{P}_0,C_3}^{\mathrm{P}_f} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &= -2\int_3^3 (x+y)\ \mathrm{d}x - \int_2^5 (2x+3)\ \mathrm{d}y \\ &= -\int_2^5 9\ \mathrm{d}y = -27. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{W_{C_2+C_3} = -16 - 27 = -43.}$$

El resultado coincide con el obtenido en el apartado 1), en consecuencia diremos que, para la fuerza dada en el enunciado, el trabajo no depende del camino, sólo depende de los puntos inicial y final.
c) El trabajo pedido coincide con la circulación de $\vec{F}$

$$W_{-C_1+C_2+C_3} = \oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Teniendo en cuenta que el camino debe recorrerse en sentido antihorario y separándolo en tramos rectos tenemos

$$\begin{aligned} W_{-C_1+C_2+C_3} &= \int_{\mathrm{P}_i,C_2}^{\mathrm{P}_0} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &+ \int_{\mathrm{P}_0,C_3}^{\mathrm{P}_f} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &+ \int_{\mathrm{P}_f,-C_1}^{\mathrm{P}i} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \end{aligned}$$

que puede expresarse como

$$\begin{aligned} W_{-C_1+C_2+C_3} &= \int_{\mathrm{P}_i,C_2}^{\mathrm{P}_0} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &+ \int_{\mathrm{P}_0,C_3}^{\mathrm{P}_f} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &- \int_{\mathrm{P}_i,C_1}^{\mathrm{P}f} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora los resultados de los apartados anteriores se obtiene

$$\boxed{W_{-C_1+C_2+C_3} = -43 - (-43) = 0.}$$

El trabajo total realizado por $\vec{F}$ a lo largo del camino cerrado es nulo, por tanto se trata de una fuerza conservativa. En los capítulos siguientes volveremos sobre esta idea, ya que, como veremos, el campo electrostático es conservativo.

### 1.7.2 Integral de superficie

**Integral de superficie de un campo escalar**

**Definición:**

Se define la integral del campo escalar $U$ en la superficie $S$ como

$$\boxed{\lim_{\Delta S_n\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} U_n\Delta S_n = \iint_S U\ \mathrm{d}S.}$$

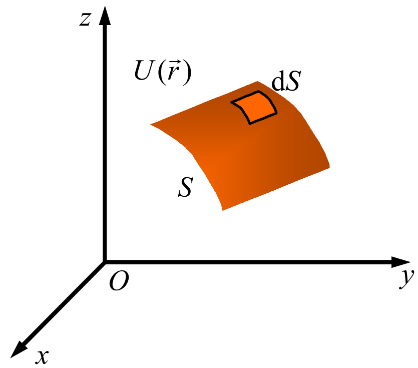


Figura 1.40: Superficie $S$ situada en una región del espacio en la que existe un campo escalar $U$.

**Ejemplo 8** *Determinar, por integración directa, el área lateral de un cilindro de radio $R$ y altura $L$.*

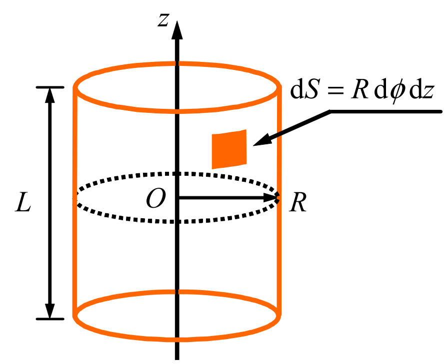


Figura 1.41:

**Solución:**

Calcularemos mediante integración el área de la superficie lateral del cilindro

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\text{S. lat.}} \mathrm{d}S_\rho \\ &= \iint_{\text{S. lat.}} R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= R\left(\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_{z=0}^{z=L}\mathrm{d}z\right) = 2\pi RL \end{aligned}$$

**Ejemplo 9** *Calcular la masa de un disco de radio* $a = 1$ m *y densidad* $\sigma_m = (20 + \sin\phi)$ g/m$^2$.

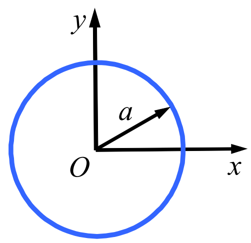


Figura 1.42:

**Solución:**

La masa pedida se calcula mediante la expresión

$$m = \iint\limits_{\text{sup. disco}} \sigma_m \, \mathrm{d}S.$$

Debido a la geometría del problema resulta conveniente realizar la integral el coordenadas polares $(\rho, \phi)$. Tomaremos entonces un elemento de área $\mathrm{d}S = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$. Para "barrer" la superficie completa del disco en el proceso de integración la coordenada $\rho$ variará entre 0 y $a$, mientras que la coordenada $\phi$ lo hará entre 0 y $2\pi$. Teniendo esto en cuenta la masa resulta

$$\begin{aligned} m &= \left(\int_0^a \rho \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}(20+\sin\phi)\mathrm{d}\phi\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho^2\right)_0^a \ (20\phi - \cos\phi)_0^{2\pi}\,,. \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{m = 20\pi a^2 = 20\pi\,\mathrm{g}\,.}$$

**Integral de superficie de un campo vectorial. Flujo**

**Definición:**

Consideremos una superficie $S$ y en ella un elemento de superficie $\mathrm{d}\vec{S}$. Supondremos también la existencia de un campo vectorial $\vec{A}$. La integral de superficie del campo $\vec{A}$ sobre la superficie $S$, también llamada *flujo de* $\vec{A}$ *a través de* $S$, se define como

$$\boxed{\Phi = \lim_{\Delta S_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{A}_n \cdot \Delta\vec{S}_n = \iint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

La integral anterior también puede expresarse como

$$\iint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \iint_S A\cos\alpha\mathrm{d}S$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario asociado al elemento de superficie $\mathrm{d}\vec{S}$ y $\alpha$ representa el ángulo formado por $\vec{A}$ y $\mathrm{d}\vec{S}$.

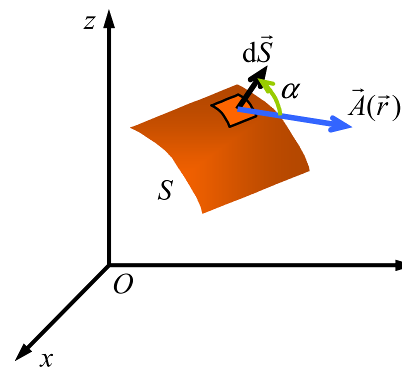


Figura 1.43: Superficie $S$ situada en una región del espacio en la que existe un campo vectorial $\vec{A}$.

Cuando la superficie de integración es cerrada, se indica mediante la notación

$$\Phi = \oint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

De las definiciones anteriores se desprende que el valor del flujo depende fuertemente del ángulo formado por el campo y la superficie.

**Ejemplo 10** *La lluvia puede modelarse mediante una función vectorial que establece los litros por metro cuadrado y por hora* (l/m$^2$/h) *que "atraviesan" un punto arbitrario del espacio y en que dirección lo hacen. Supongamos que en una región del espacio dicha función vectorial viene dada por* $\vec{A} = (3x+y)\hat{x} + (y^2-2z)\hat{y} - (x^2+2z)\hat{z}$. *Calcular la cantidad de agua, en* l/h, *recogida en un recipiente en forma de cubo cuya boca tiene una superficie*

1 m$^2$, *está centrada en el origen de coordenadas y contenida en el plano $x-y$.*

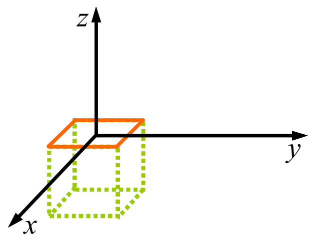


Figura 1.44:

**Solución:**

Para determinar los litros de agua recogidos en el cubo durante 1 hora deberemos calcular el flujo ("cantidad") de lluvia que atraviesa su boca. Por tanto el cálculo a realizar es

$$\Phi = \iint\limits_{\text{boca cubo}} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

En este problema el elemento de superficie viene dado por $\mathrm{d}\vec{S} = -\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \hat{z}$. El signo negativo se debe a que nos interesa calcular el flujo dirigido hacia el interior del cubo. La integral a realizar es entonces

$$\Phi = \iint\limits_{\text{boca cubo}} A_z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2+2z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teniendo en cuanta ahora que la boca del cubo está en el plano $z=0$ resulta

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (y)_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

que operando da

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{12}\ \mathrm{l/h}\,.}$$

### 1.7.3 Integral de volumen

**Integral de volumen de un campo escalar**

**Definición:**

Se define la integral del campo escalar $U$ en el volumen $\tau$ como

$$\boxed{\lim_{\Delta\tau_n\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} U_n\Delta\tau_n = \iiint_{\tau} U\ \mathrm{d}\tau.}$$

**Ejemplo 11** *Determinar, por integración directa, el volumen de un cilindro de radio $R$ y altura $L$.*

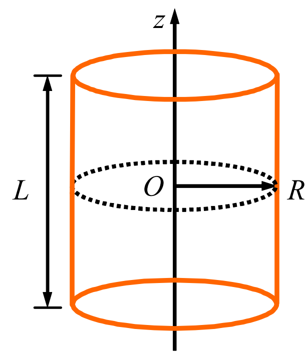


Figura 1.45:

**Solución:**

El volumen total es

$$\begin{aligned}\tau &= \iiint\limits_{\text{cilindro}} \mathrm{d}\tau \\ &= \iiint\limits_{\text{cilindro}} \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\ &= \left(\int_0^R \rho\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^L \mathrm{d}z\right) \\ &= \left(\frac{R^2}{2}\right)(2\pi)(L) = \pi R^2 L\end{aligned}$$

**Ejemplo 12** *Determinar la masa de una esfera de radio $a = 2$ m cuya densidad volúmica en g/m$^3$*

*varía con el radio de la forma*

$$\rho_\tau = \begin{cases} 10 & r \leq 1 \\ 10/r & 1 \leq r \leq 2 \end{cases} .$$

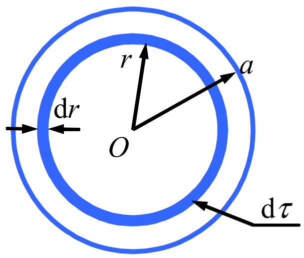


Figura 1.46:

**Solución:**

La masa pedida se obtendrá integrando la densidad a toda la esfera

$$m = \iiint_{\text{esfera}} \rho_\tau \; \mathrm{d}\tau$$

Para resolver este problema no resulta adecuado utilizar coordenadas cartesianas, ni coordenadas cilíndricas. En el caso en el que la región de integración es esférica y el integrando es una función que sólo depende de la distancia al centro, es decir del radio, podemos tomar como diferencial de volumen el resultado de derivar el volumen de una esfera respecto del radio. Según esto, el volumen de una esfera de radio $r$ vale

$$\tau = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

derivando respecto de $r$, resulta

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2,$$

de donde el diferencial de volumen buscado vale

$$\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 \mathrm{d}r.$$

Empleando esta expresión para $\mathrm{d}\tau$ la masa de la esfera se calcula simplemente como

$$m = 4\pi \int_0^a \rho_\tau r^2 \; \mathrm{d}r = 4\pi \left( \int_0^1 10r^2 \; \mathrm{d}r + \int_1^2 10r \; \mathrm{d}r \right),$$

que integrando resulta

$$\boxed{m = \frac{220\pi}{3}\,\mathrm{g}\,.}$$

---

**Integral de volumen de un campo vectorial**

**Definición:**

La integral de volumen de un campo vectorial es menos usual que el resto de integrales anteriormente definidas. Sin embargo, la incluimos por completitud.

Consideremos un volumen $\tau$ y en el un elemento de volumen $\mathrm{d}\tau$. Supondremos también la existencia de un campo vectorial $\vec{A}$. La integral de volumen de $\vec{A}$ en el volumen $\tau$ se define como

$$\boxed{\lim_{\Delta\tau_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{A}_n \Delta\tau_n = \iiint_\tau \vec{A} \; \mathrm{d}\tau.}$$

Nótese que el volumen es un escalar, por tanto el resultado de la integral anterior es un vector.