

Índice General

2	Campo electrostático en el vacío ¹	2
2.1	Introducción	2
2.2	Carga eléctrica	2
2.3	Conductores y aislantes: inducción electrostática	3
2.3.1	Electrización por rozamiento	3
2.3.2	Carga de conductores por inducción electrostática	3
2.4	Ley de Coulomb	4
2.5	El campo eléctrico	7
2.6	Campo eléctrico debido a una distribución de cargas puntuales: principio de superposición	8
2.7	Líneas de fuerza del campo eléctrico	10
2.8	Distribuciones continuas de carga. Densidad de carga	11
2.9	Campo eléctrico debido a distribuciones continuas de carga	13
2.9.1	Campo eléctrico debido a distribuciones lineales de carga	13
2.9.2	Campo eléctrico debido a distribuciones superficiales de carga	17
2.9.3	Campo eléctrico debido a distribuciones volúmicas de carga	18
2.10	Flujo de campo eléctrico	18
2.11	Ley de Gauss	20
2.12	Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss	21
2.12.1	Problemas con simetría plana	21
2.12.2	Problemas con simetría cilíndrica	23
2.12.3	Problemas con simetría esférica	26
2.13	¿Quién fue quién en Electromagnetismo?.	29
2.13.1	Charles A. Coulomb	29

¹Versión 2010

Tema 2

Campo electrostático en el vacío ¹

2.1 Introducción

En la naturaleza se suelen considerar cuatro tipos de fuerza distintos: débil, fuerte, gravitatoria y electromagnética. El objeto del electromagnetismo es estudiar los fenómenos producidos por cargas y/o corrientes eléctricas. La electrostática es la parte del electromagnetismo que estudia los fenómenos producidos por cargas eléctricas en reposo o equilibrio.

2.2 Carga eléctrica

Concepto de carga eléctrica:

La carga eléctrica es una propiedad intrínseca de las partículas subatómicas (protones, electrones, etc.), de igual manera que lo es también su masa. La carga del protón es positiva de valor e y la del electrón negativa $-e$, siendo e la unidad fundamental de carga.

Dos partículas con carga de signo opuesto (una positiva y otra negativa) se atraen, sin embargo, si tienen carga del mismo signo (ambas positiva o ambas negativa) se repelen.

Constitución de la materia:

Cada átomo posee núcleo y corteza. El **núcleo** es pequeño y masivo, contiene protones y neutrones. Los **protones** están cargados positivamente y los **neutrones** no poseen carga.

Llamamos **elemento** a las sustancias constituidas por átomos todos iguales. El **número atómico** de un elemento (Z) es el número de protones que hay en un átomo. La **corteza** es la zona que rodea

al núcleo. Tiene un número Z de partículas cargadas negativamente llamadas **electrones**. La masa del protón es aproximadamente 2000 veces mayor que la masa del electrón. La carga del protón y del electrón son iguales, pero de signo opuesto, por tanto, el átomo es eléctricamente neutro.

Cuantización de la carga:

En la naturaleza, todas las cargas se presentan como múltiplos enteros de la carga e . En consecuencia, cualquier carga q que encontremos en la naturaleza puede expresarse como

$$q = \pm Ne,$$

donde N es un número entero

Conservación de la carga:

En cualquier proceso físico o químico la carga total se conserva, es decir, la carga total antes del proceso es igual a la carga total después del mismo.

Por ejemplo, cuando dos objetos se frotan entre sí, uno de ellos queda con un exceso de electrones y se carga, por tanto, negativamente, mientras que el otro queda con un déficit de electrones y, en consecuencia, su carga es positiva. La carga total de los dos objetos considerada globalmente no cambia.

Unidades de la carga

En el sistema internacional (SI) la unidad de la carga es el *culombio* (C). El culombio es una unidad no fundamental que se define en función de la unidad de corriente eléctrica, el *amperio*. Un culombio se define como la cantidad de carga que fluye a través

de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente es de un amperio. Expresada en culombios, la carga del protón vale

$$e = 1,602177 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

2.3 Conductores y aislantes: inducción electrostática

Conductores:

Los **conductores** son materiales en los cuales parte de los electrones son capaces de moverse libremente (ej. metales)

Aislantes:

Los **aislantes** son materiales en los que todos los electrones están ligados a los átomos y ninguno puede moverse libremente (ej. madera o el vidrio)

2.3.1 Electrización por rozamiento

Los antiguos griegos fueron los primeros en darse cuenta de que al frotar el ámbar, éste era capaz de atraer pequeños objetos como pajitas o plumas. En realidad, el término “eléctrico” procede de la palabra griega *electron*, que significa ámbar. A este fenómeno lo llamaremos **electrización por frotamiento o rozamiento**.

Para explicar los fenómenos de electrización por rozamiento desde un punto de vista moderno consideraremos dos objetos aislantes distintos. Supondremos que, inicialmente, ambos objetos son neutros. Al frotarlos mutuamente, parte de los electrones que se encuentran en las capas más externas de los átomos de uno de los objetos se transferirán al otro objeto. Así, al final del proceso, uno de los objetos tendrá un exceso de electrones, por tanto de carga negativa, y el otro un defecto de los mismos, que se traduce en un exceso de carga positiva. De esta forma, ambos objetos quedan con el mismo exceso de carga pero de signo contrario.

No es posible cargar objetos conductores mediante frotamiento, por ello hemos de recurrir a otros métodos, como veremos a continuación.

2.3.2 Carga de conductores por inducción electrostática

El electroscopio:

Es un dispositivo que permite la detección de carga eléctrica. Está formado por dos laminillas metálicas unidas a una varilla conductora que posee una esfera, también metálica, en su parte superior. El extremo de la varilla del que cuelgan las laminillas está dentro de un recipiente aislante. Cuando las laminillas están descargadas cuelgan juntas verticalmente. Cuando se pone en contacto la esfera con un cuerpo cargado negativamente, parte de la carga se transfiere a la esfera y se reparte por todo el conjunto (esfera + varilla + laminillas). En consecuencia, las laminillas, ambas cargadas negativamente, se separan. A su vez, si la esfera se pone en contacto con un material cargado positivamente, parte de los electrones libres de la esfera pasan al material resultado un exceso de carga positiva en todo el conjunto. Como consecuencia las laminillas también se separan.

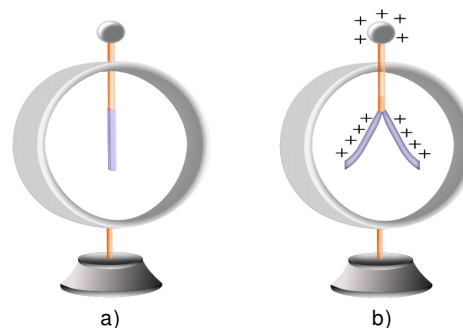


Figura 2.1: a) Electroscopio descargado. b) Electroscopio cargado.

Carga por inducción electrostática:

Un conductor puede cargarse mediante un método llamado **carga por inducción**. Para ilustrar este método consideraremos dos esferas metálicas iguales, descargadas y en contacto. Si acercamos a una de estas esferas una barra cargada positivamente se produce, en las esferas, una reordenación de los electrones:

1) Los electrones son atraídos por la barra, concentrándose en la esfera más próxima, que queda con carga neta negativa.

2) La esfera más alejada de la barra pierde electrones quedando cargada con la misma carga neta que la otra esfera, pero de signo positivo.

Este proceso de separación de cargas dentro de un conductor se denomina **polarización** y se dice que el conductor está polarizado. Si ahora separamos las esferas primero, y retiramos la barra después, ambas esferas quedan cargadas con igual carga neta pero de signo opuesto.

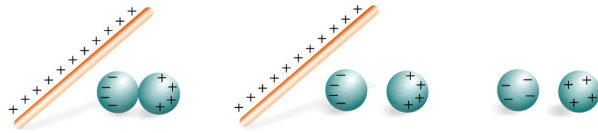


Figura 2.2: Carga de dos esferas conductoras mediante inducción electrostática.

Ejemplo 1 *Dos esferas idénticas se cargan por inducción y posteriormente se separan, quedando la esfera 1 con una carga $+Q$ y la esfera 2 con una carga $-Q$. Una tercera esfera idéntica a las anteriores e inicialmente descargada se pone en contacto con la esfera 1 y luego se separa (a). Posteriormente se ponen en contacto las esferas 2 y 3, y luego se separan (b). ¿Cuál es la carga final en cada una de las esferas? Razone la respuesta.*

Solución:

(a) Al poner en contacto las esferas 1 y 3 la carga en exceso de la esfera 1 se reparte entre ambas. Cuando se separan las dos esferas quedan con cargas $+Q/2$.

(b) Al poner en contacto la esfera 3 con carga $+Q/2$ y la esfera 2 con carga $-Q$, la carga neta total es $-Q/2$; esta carga se repartirá entre las dos esferas y al separarlas ambas quedarán con cargas con una carga $-Q/4$.

Carga por inducción electrostática mediante toma de tierra:

Para muchos propósitos la Tierra puede considerarse como un conductor infinitamente grande. Utilizando el siguiente procedimiento, podemos cargar un conductor, simplemente, uniéndolo a tierra .

1) Tomamos una esfera conductora neutra y acercamos a esta esfera una barra cargada positivamente. Como consecuencia la esfera se polariza.

2) Si ahora unimos la esfera a tierra el fenómeno de polarización se produce en todo el conductor (esfera + tierra), por tanto, electrones de la tierra se transfieren a la esfera.

3) Si a continuación retiramos la conexión a tierra, la esfera queda cargada negativamente.

4) Finalmente, retirando la barra, la carga neta negativa se redistribuye por toda la esfera.

Ejemplo 2 *Una varilla de goma con una carga negativa $-Q$ se acerca, sin tocar, a la esfera de un electroscopio. Como consecuencia las laminillas del electroscopio divergen (a). Se toca la esfera con un dedo y las laminillas caen a la posición vertical (b). Por último, primero se retira el dedo y después la varilla de goma, observando que las laminillas divergen (c). ¿Cuál es la carga final del electroscopio? Razone su respuesta.*

Solución:

(a) Al acercar la varilla de carga $-Q$ a la esfera del electroscopio, éste se polariza apareciendo un exceso de carga $+Q$ en la esfera y un exceso de carga $-Q$ en las laminillas. Como consecuencia las laminillas se repelen mutuamente y divergen.

(b) Al tocar la esfera del electroscopio con el dedo las laminillas se descargan, esto es, la carga $-Q$ de las laminillas se va a tierra. La esfera del electroscopio se mantiene con un exceso de carga $+Q$.

(c) Retirando el dedo desconectamos el electroscopio de tierra, quedando una carga $+Q$ en la esfera. Si después retiramos también la varilla de goma, la carga de la esfera se distribuyen por todo el electroscopio y por tanto las laminillas quedan con carga positiva y se repelen mutuamente. La carga final del electroscopio es, por tanto, $+Q$.

2.4 Ley de Coulomb

La **ley de Coulomb** es una ley experimental, establecida en 1785 por Charles Augustin Coulomb (1736-1806), que expresa matemáticamente la fuerza ejercida entre dos cargas puntuales situadas en el vacío en posiciones fijas. Esta ley requiere antes de

ser enunciada la definición de varios símbolos matemáticos que se ilustran gráficamente en la figura 2.3. Estos símbolos son:

Carga fuente, q' : supondremos la existencia de una carga puntual q' situada en el punto P' de vector de posición \vec{r}'

Carga testigo o de prueba, q : además, consideramos una carga q situada en el punto P de vector de posición \vec{r} .

Vector de posición relativa, \vec{R} : denotamos por \vec{R} el vector que va desde P' a P :

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Distancia entre cargas, $|\vec{R}|$: la distancia entre la cargas q' y q es el módulo de \vec{R} :

$$|\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

Vector unitario, \hat{R} : es el vector unitario según la dirección del vector \vec{R} , luego:

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la ley de Coulomb se enuncia como sigue.

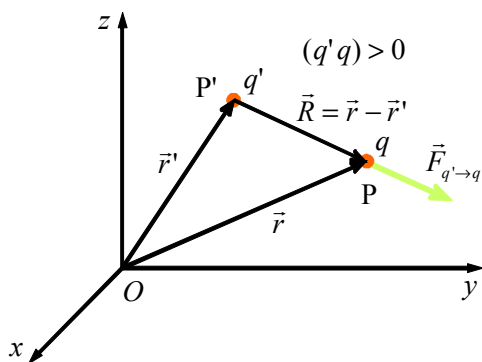


Figura 2.3: Fuerza ejercida por la carga fuente q' sobre la carga de prueba q (ley de Coulomb).

Enunciado de la ley de Coulomb:

“La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia de separación. La fuerza está dirigida según la recta que une ambas cargas; es repulsiva si tienen igual signo y atractiva si tienen signos opuestos”

Las propiedades de la fuerza de Coulomb (magnitud y dirección), recogidas en este enunciado, pueden expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

- Magnitud:

$$|\vec{F}_{q' \rightarrow q}| \propto \frac{q'q}{|\vec{R}|^2}$$

- Dirección:

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} \parallel \hat{R}$$

Por tanto, podemos expresar la ley de Coulomb en forma matemática como

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = K_e \frac{qq'}{|\vec{R}|^2} \hat{R} = K_e \frac{qq'}{|\vec{R}|^3} \vec{R} = K_e \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

donde K_e es una constante de proporcionalidad cuyo valor depende del sistema de unidades. En el SI es usual expresar esta constante en la forma

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

siendo ϵ_0 es una constante universal llamada **permitividad del vacío**. Su valor y unidades en el SI son

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}.$$

Con este valor para ϵ_0 , la constante K_e resulta

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}.$$

En su forma más usual, la ley de Coulomb se expresa en función de ϵ_0 , luego

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

La fuerza de Coulomb puede ser atractiva o repulsiva:

- si ambas cargas son del mismo signo ($qq' > 0$), el sentido de $\vec{F}_{q' \rightarrow q}$ coincide con el sentido de \vec{R} y por tanto la fuerza es repulsiva.
- si las cargas tienen signos opuestos ($qq' < 0$), el sentido de $\vec{F}_{q' \rightarrow q}$ es el opuesto a \vec{R} y por tanto la fuerza es atractiva.

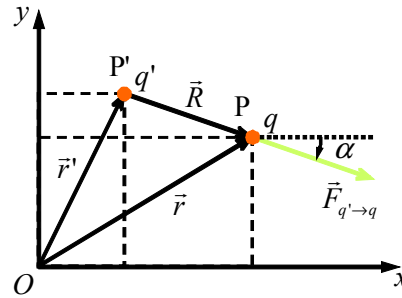


Figura 2.4:

Principio de acción y reacción para la fuerza de Coulomb:

La fuerza electrostática verifica el **principio de acción y reacción**: si suponemos que la carga q es la responsable de ejercer una fuerza sobre q' . Dicha fuerza vendrá dada por

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = \frac{-qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{F}_{q' \rightarrow q}.$$

Por tanto, la fuerza $\vec{F}_{q \rightarrow q'}$ es igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza $\vec{F}_{q' \rightarrow q}$

Ejemplo 3 Calcular la fuerza electrostática producida por una carga puntual de $1C$, situada en el punto $P'(2,4)$, sobre otra carga puntual de $2C$ situada en el punto $P(5,3)$. Determinar la magnitud de la fuerza y el ángulo que forma con el eje x . Las coordenadas de los puntos están dadas en el sistema cartesiano $2D$ y en unidades del SI.

Solución:

Según la ley de Coulomb, la fuerza que una carga puntual fuente q' ejerce sobre otra carga puntual testigo q se expresa

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde \vec{r}' y \vec{r} representan, respectivamente, los vectores de posición a la carga fuente y a la carga testigo.

Para resolver el problema, comenzaremos calculando cada una de las cantidades que aparecen en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} q' &= 1, \\ q &= 2, \\ \vec{r}' &= 2\hat{x} + 4\hat{y}, \\ \vec{r} &= 5\hat{x} + 3\hat{y}, \\ \vec{r} - \vec{r}' &= 5\hat{x} + 3\hat{y} - (2\hat{x} + 4\hat{y}) = 3\hat{x} - \hat{y}, \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Tomando $(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \times 10^9$ y sustituyendo en la expresión de la fuerza resulta

$$\begin{aligned} \vec{F}_{q' \rightarrow q} &= 9 \times 10^9 \frac{2}{10\sqrt{10}} (3\hat{x} - \hat{y}) \\ &= 5.692 \times 10^8 (3\hat{x} - \hat{y}) \text{ N} \end{aligned}$$

El módulo de la fuerza vale

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{q' \rightarrow q}| &= 9 \times 10^9 \frac{2}{10\sqrt{10}} |3\hat{x} - \hat{y}| \\ &= 9 \times 10^9 \frac{2}{10\sqrt{10}} \sqrt{10} = 1.8 \times 10^9 \text{ N} \end{aligned}$$

y el ángulo con el eje x

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \\ &= -0.33 \text{ rad} = -18.4^\circ \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Sean dos masas iguales de electrones separados una distancia igual a la distancia Tierra-Luna. Calcular dichas masas para que la fuerza

eléctrica ejercida entre ambas sea igual (en magnitud) a la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna. Datos: $m_T = 5.98 \times 10^{24}$ Kg, $m_L = 7.41 \times 10^{22}$ Kg, $m_e = 9.1093897 \times 10^{-31}$ Kg, $d_{T-L} = 3.84 \times 10^8$ m, y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/Kg².

Solución:

La fuerza de atracción gravitatoria Tierra-Luna vale

$$F_g = G \frac{m_T m_L}{d_{T-L}^2}.$$

La fuerza de atracción electrostática entre dos cantidades iguales de electrones separadas una distancia d_{T-L} vale

$$F_q = K_e \frac{q^2}{d_{T-L}^2}.$$

Si estas dos fuerzas son iguales tendremos

$$G \frac{m_T m_L}{d_{T-L}^2} = K_e \frac{q^2}{d_{T-L}^2},$$

de donde despejando la carga se obtiene

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{G m_T m_L}{K_e}} \\ &= \sqrt{\frac{6.67259 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times 7.41 \times 10^{22}}{9 \times 10^9}} \\ &= 5.7317 \times 10^{13} \text{ C.} \end{aligned}$$

El número de electrones necesario para obtener esta carga es

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{q}{e} = \frac{5.7317 \times 10^{13}}{1.60217733 \times 10^{-19}} \\ &= 3.5774 \times 10^{32} \text{ electrones} \end{aligned}$$

La masa correspondiente a estos electrones vale

$$\begin{aligned} M_q &= m_e N_e = 9.1093897 \times 10^{-31} \times 3.5774 \times 10^{32} \\ &= \boxed{325.88 \text{ kg.}} \end{aligned}$$

Sumando la masa total de electrones resulta: $2 \times 325.88 \text{ kg} = 651.76 \text{ kg}$. Luego 651.76 kg de electrones producen una fuerza electrostática igual a la fuerza gravitatoria producida por 6.0541×10^{24} kg de materia.

2.5 El campo eléctrico

Concepto de campo eléctrico:

La ley de Coulomb es lo que se conoce como una **ley de acción a distancia**, ya que no explica cómo la carga testigo q "sabe" que una carga fuente q' está en una determinada posición. Además, una variación en la posición de q' se traduce en una variación instantánea de la fuerza sobre q . Este concepto se ilustra en la figura 2.5.

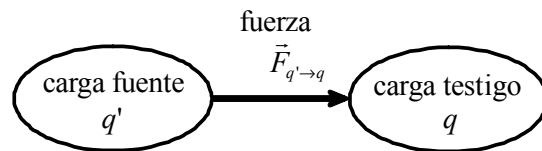


Figura 2.5: Concepto de fuerza mediante una ley de acción a distancia.

Según se muestra en la figura 2.6, es conveniente descomponer el proceso por el cuál la carga q' ejerce fuerza sobre la carga q en dos subprocesos:

- La carga fuente crea un ente en toda la zona del espacio que la rodea. Llamaremos a este ente **campo eléctrico**
- El campo creado es el agente responsable de producir la **fuerza** sobre la carga testigo que se encuentre en la zona del espacio donde exista dicho campo

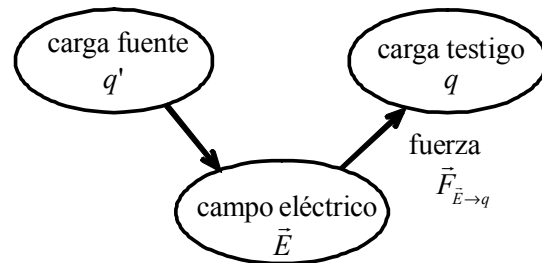


Figura 2.6: Fuerza a través del concepto de campo.

Definición de campo eléctrico. Campo debido a una carga puntual

Según sabemos, la fuerza electrostática ejercida por una carga q' sobre otra carga q es (ley de Coulomb):

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^3} \vec{R}.$$

Siguiendo la idea de descomponer la fuerza en dos subprocesos: 1) la carga fuente genera un campo eléctrico y 2) el campo produce la fuerza sobre la carga testigo, podemos englobar todas las cantidades en la fórmula anterior que dependan de la carga fuente en una nueva expresión, que llamaremos campo eléctrico \vec{E} , así

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Por tanto, según se ilustra en la figura 2.7, la expresión anterior representa el campo eléctrico, en un punto de observación P, creado por una carga puntual q' situada en un punto P'. Podemos escribir esta fórmula de distintas formas alternativas:

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

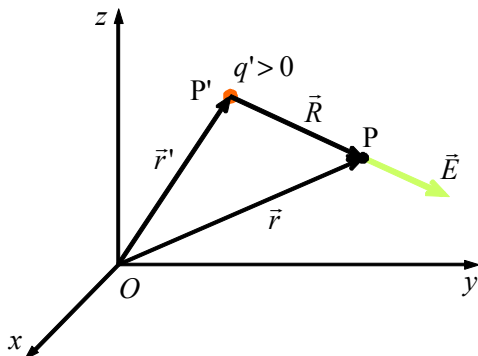


Figura 2.7: Campo eléctrico \vec{E} , en el punto de observación P, debido a la carga fuente $q' > 0$.

Conocido el campo eléctrico en la posición de una carga testigo q , la fuerza ejercida, por el campo eléctrico, sobre q es:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Unidades del campo eléctrico:

De acuerdo con la expresión anterior, las unidades del campo eléctrico en el SI son:

$$[\vec{E}] = \frac{[\vec{F}]}{[q]} = \frac{\text{Newton}}{\text{Culombio}} = \text{N/C}$$

Alternativamente, como ya veremos en temas posteriores, puede utilizarse como unidad del campo eléctrico

$$[\vec{E}] = \frac{\text{Voltio}}{\text{metro}} = \text{V/m}$$

Ejemplo 5 Se coloca una carga puntual de valor 5 nC en un determinado punto del espacio y experimenta una fuerza de valor $2 \times 10^{-4} \text{ N}$ en dirección y sentido del eje x positivo. ¿Cuánto vale el campo en dicho punto?

Solución:

Según establece el problema $q = 5 \times 10^{-9} \text{ C}$ y $\vec{F} = 2 \times 10^{-4} \hat{x} \text{ N}$, por tanto el campo valdrá

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{2 \times 10^{-4} \hat{x}}{5 \times 10^{-9}} = 4 \times 10^4 \hat{x} \text{ N/C}$$

2.6 Campo eléctrico debido a una distribución de cargas puntuales: principio de superposición

Consideramos un sistema de N cargas fuente puntuales q'_n situadas en una región del espacio, según se muestra en la figura 2.8. A cada carga q'_n le corresponde un vector de posición \vec{r}'_n . Consideramos, además, un punto de observación P cuyo vector de posición será \vec{r} . El vector de posición relativa entre la carga fuente q'_n y el punto P es:

$$\vec{R}_n = \vec{r} - \vec{r}'_n.$$

La distancia entre la carga fuente q'_n y el punto P es:

$$|\vec{R}_n| = R_n = |\vec{r} - \vec{r}'_n|$$

El vector unitario en la dirección de \vec{R}_n vale:

$$\hat{R}_n = \frac{\vec{R}_n}{R_n}.$$

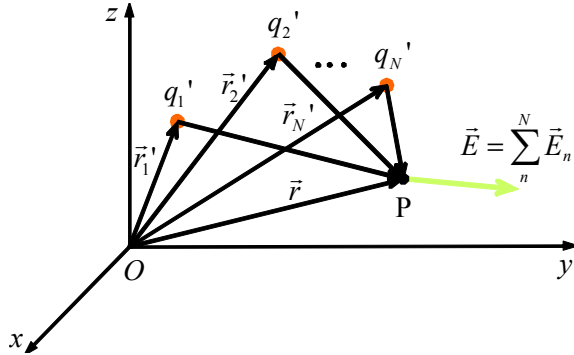


Figura 2.8: Campo eléctrico en el punto P debido a una distribución discreta de carga.

Como ya sabemos, el campo eléctrico que la carga q'_n produce en el punto P se expresa

$$\vec{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_n(\vec{r} - \vec{r}'_n)}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|^3}.$$

Principio de superposición:

“El campo eléctrico total \vec{E} producido por N cargas fuente en el punto P es igual a la suma vectorial del campo \vec{E}_n producido por cada una de las cargas individuales q'_n en el punto P”.

Matemáticamente se expresa:

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N q'_n \frac{\vec{r} - \vec{r}'_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|^3}$$

Una vez determinado el campo eléctrico producido por la distribución, la fuerza sobre una carga puntual q se calcula simplemente como

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \sum_{n=1}^N \vec{E}_n$$

También puede sumarse directamente la fuerza ejercida por cada carga fuente:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^N q\vec{E}_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n$$

Ejemplo 6 Dos cargas puntuales positivas de igual valor q' están situadas sobre el eje x , simétricamente respecto al origen y a una distancia mutua de 2ℓ . Calcular el campo eléctrico en un punto arbitrario del semi-eje $y > 0$. Resolver el problema por dos caminos diferentes:

1) aplicando directamente el principio de superposición

2) teniendo en cuenta la simetría del problema.

Solución:

Tomaremos como punto arbitrario del eje y un punto de coordenadas $P(0, y)$, donde y es un valor cualquiera.

1) Aplicando directamente el principio de superposición

El principio de superposición para dos cargas puntuales establece

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1(\vec{r} - \vec{r}'_1)}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2(\vec{r} - \vec{r}'_2)}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|^3},$$

donde, en nuestro caso,

$$q'_1 = q'_2 = q',$$

$$\vec{r} = y\hat{y}, \quad \vec{r}'_1 = \ell\hat{x}, \quad \vec{r}'_2 = -\ell\hat{x},$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_1 = y\hat{y} - \ell\hat{x}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'_1| = \sqrt{\ell^2 + y^2},$$

$$\vec{r} - \vec{r}'_2 = y\hat{y} + \ell\hat{x}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'_2| = \sqrt{\ell^2 + y^2}.$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión del campo resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(y\hat{y} - \ell\hat{x})}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(y\hat{y} + \ell\hat{x})}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}}$$

Simplificando se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q'y}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}} \hat{y} \quad \text{N/C}$$

2) Teniendo en cuenta la simetría del problema.

Ambas cargas son de igual valor y están a la misma distancia del punto de observación. Por tanto, ambas producen campos eléctricos de igual magnitud, esto es $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$. Los campos eléctricos producidos por cada una de las cargas en el punto $P(0, y)$ se muestran en la figura 2.9. Debido a la simetría del problema, se observa que el campo total

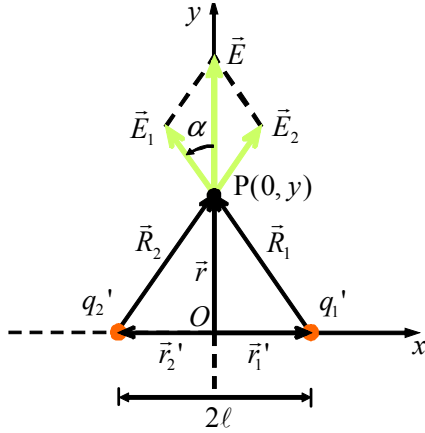


Figura 2.9: Campo eléctrico en $P(0, y)$ debido a dos cargas puntuales positivas situadas en el eje x , simétricamente respecto al origen.

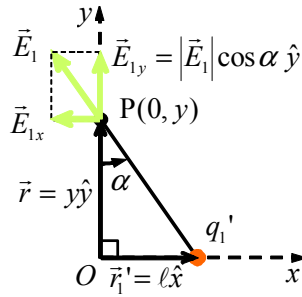


Figura 2.10: Geometría para el cálculo de $|d\vec{E}_1| \cos \alpha$.

\vec{E} tendrá sólo componente y . Su valor será igual a dos veces la componente y del campo eléctrico producido por una de las cargas. Por tanto, el campo eléctrico buscado es de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2|\vec{E}_1| \cos \alpha \hat{y}$$

donde α es el ángulo que forma \vec{E}_1 (o \vec{E}_2) con el eje y . Basta ahora con determinar $|\vec{E}_1|$ y $\cos \alpha$. Para $|\vec{E}_1|$ tenemos

$$|\vec{E}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\ell^2 + y^2}$$

Utilizando el triángulo de la figura 2.10, para $\cos \alpha$ se obtiene

$$\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{\ell^2 + y^2}}$$

Sustituyendo los dos últimos resultados en la expresión de \vec{E} , resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q'y}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}} \hat{y} \quad \text{N/C}$$

2.7 Líneas de fuerza del campo eléctrico

Inicialmente, Faraday desarrolló el concepto básico de campo mediante un método de representación gráfica. El concepto matemático actual de campo es una abstracción posterior. Para introducir el concepto de línea de campo o línea de fuerza consideraremos un campo vectorial que define un vector en cada punto del espacio. Imaginemos ahora una línea que en cada punto del espacio sea tangente al vector campo \vec{E} , tal como se ilustra en la figura 2.11. Dicha línea es una línea de campo.

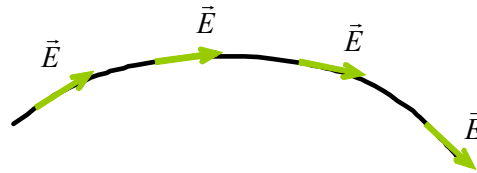


Figura 2.11: Línea de campo eléctrico.

Existen una serie de reglas que se aplican al representar las líneas de campo eléctrico:

- Toda línea de campo eléctrico nace en una carga positiva y muere en una negativa.
- El número de líneas que nacen o mueren en una carga es proporcional al valor de la carga
- Las líneas se dibujan simétricamente, disminuyendo su densidad al alejarse de la carga
- Las líneas de campo sólo pueden cortarse en las cargas puntuales, donde hay singularidades. Si dos líneas se cortaran en un punto habría dos vectores tangentes en el punto.

En las figuras 2.12-2.15 se representan las líneas de campo de cargas individuales aisladas y de parejas de cargas, tanto de igual signo como de signo opuesto.

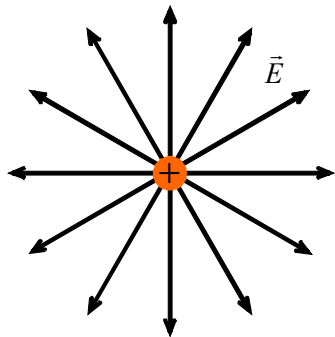


Figura 2.12: Líneas de campo eléctrico debidas a una carga puntual positiva.

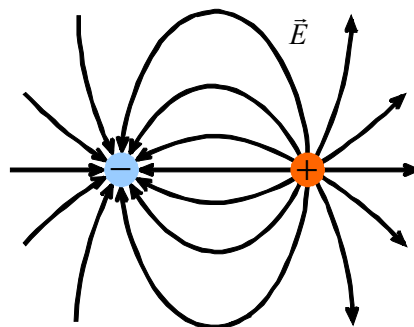


Figura 2.15: Líneas de campo eléctrico debidas a dos cargas de igual valor y signo opuesto.

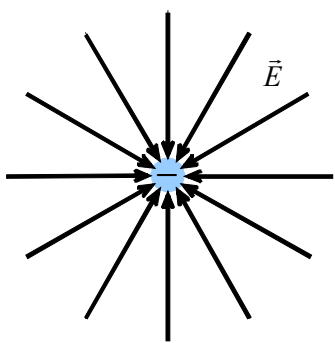


Figura 2.13: Líneas de campo eléctrico debidas a una carga puntual negativa.

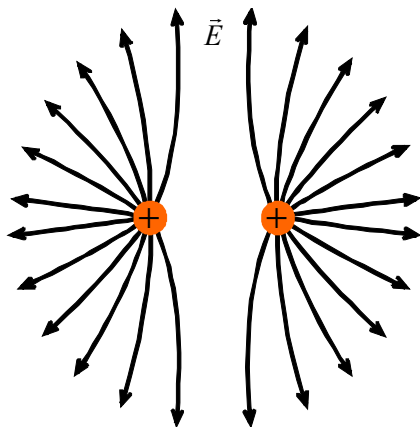


Figura 2.14: Líneas de campo eléctrico debidas a dos cargas positivas de igual valor.

2.8 Distribuciones continuas de carga. Densidad de carga

Como ya sabemos, a escala microscópica la carga está cuantizada. Sin embargo, frecuentemente es necesario trabajar con volúmenes que contienen un gran número de cargas. En estas situaciones, la distancia entre cargas es mucho menor que la dimensión lineal típica del volumen. Podemos suponer, en estos casos, que la carga es una magnitud continua y, en consecuencia, definir una densidad de carga de forma análoga a cómo se define la densidad de masa. Consideraremos tres casos: distribuciones volúmicas, superficiales y lineales de carga

Densidad volúmica de carga:

En el caso de cuerpos tridimensionales la **densidad volúmica de carga** (carga por unidad de volumen) se define como

$$\rho_\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau} \quad \text{C/m}^3,$$

La carga contenida en un elemento de volumen elemental $d\tau$ es:

$$dq = \rho_\tau d\tau.$$

La carga total contenida en un volumen finito τ se obtiene, simplemente, integrando la expresión anterior:

$$Q = \iiint_\tau \rho_\tau d\tau$$

Si $\rho_\tau = \text{cte}$ (carga uniformemente distribuida) en todo el volumen:

$$Q = \rho_\tau \iiint_{\tau} d\tau = \rho_\tau \tau$$

Nota: desde un punto de vista matemático $d\tau$ es un volumen arbitrariamente pequeño. Sin embargo, desde un punto de vista físico $d\tau$ es lo suficientemente grande como para contener un número grande de cargas y a la vez suficientemente pequeño como para considerar que la densidad de carga ρ_τ es constante en dicho volumen.

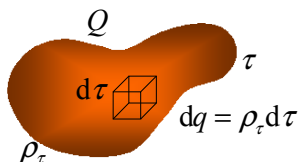


Figura 2.16: Distribución volumétrica de carga

Ejemplo 7 Una cantidad de carga Q está uniformemente distribuida en el volumen de una esfera de radio a . Calcular la densidad volumétrica de carga.

Solución:

La carga total de la esfera se relaciona con la densidad de carga a través de la expresión

$$Q = \iiint_{\text{esfera}} \rho_\tau d\tau.$$

La densidad de carga es constante, ya que la carga está distribuida uniformemente, luego

$$Q = \rho_\tau \iiint_{\text{esfera}} d\tau = \rho_\tau \tau = \rho_\tau \frac{4}{3}\pi a^3,$$

de donde se obtiene

$$\rho_\tau = \frac{3Q}{4\pi a^3} \quad \text{C/m}^3.$$

Densidad superficial de carga:

Si la carga está en la superficie de un volumen o sobre un cuerpo superficial, podemos definir entonces una **densidad superficial de carga** (carga

por unidad de superficie) en la forma

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad \text{C/m}^2.$$

Según esto, la carga contenida en un elemento de superficie es:

$$dq = \rho_s dS$$

La carga total contenida en una superficie finita se calcula como

$$Q = \iint_S \rho_s dS.$$

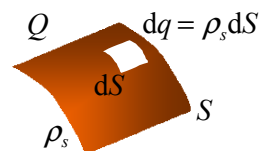


Figura 2.17: Distribución superficial de carga

Ejemplo 8 Un disco de radio $a = 1$ m está cargado con una densidad superficial de carga $\rho_s = -2\rho$ C/m². Calcular la carga del disco.

Solución:

La carga se calcula como

$$Q = \iint_{\text{disco}} \rho_s dS$$

donde ρ_s viene dada en el enunciado y $dS = \rho d\rho d\phi$. Sustituyendo queda

$$Q = \iint_{\text{disco}} \rho_s dS = \iint_{\text{disco}} -2\rho^2 d\rho d\phi.$$

Para realizar esta integral doble, la factorizamos en dos integrales de línea, una en ϕ con los límites de integración variando de 0 a 2π , y otra en ρ con variación de 0 hasta a :

$$\begin{aligned} Q &= \left(\int_0^a -2\rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \\ &= -\frac{2}{3} (\rho^3)|_0^a (\phi)|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{3} a^3. \end{aligned}$$

El radio de la esfera vale 1 m, luego

$$Q = -\frac{4\pi}{3} \simeq -4.19 \quad \text{C}.$$

Densidad lineal de carga:

Podemos suponer que objetos tales como hilos, varillas delgadas o anillos son infinitamente delgados. Cuando uno de estos objetos está cargado, decimos que posee una distribución lineal de carga, la cual se caracteriza por su **densidad lineal de carga** (carga por unidad de longitud) que definimos como

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\ell} = \frac{dq}{d\ell} \quad \text{C/m.}$$

La carga contenida en un elemento de longitud es, por tanto:

$$dq = \rho_\ell d\ell.$$

La carga total contenida en una longitud finita es

$$Q = \int_L \rho_\ell d\ell$$

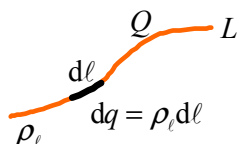


Figura 2.18: Distribución lineal de carga

Ejemplo 9 Calcular la carga de una varilla situada sobre el eje x con su centro en el origen de coordenadas y de longitud $L = 4 \text{ m}$, sabiendo que su densidad lineal de carga viene dada por $\rho_\ell = 3x^2 \text{ C/m}$.

Solución:

La carga total de la varilla se calcula como

$$Q = \int_{\text{varilla}} \rho_\ell d\ell = \int_{-2}^{+2} 3x^2 dx = (x^3)|_{-2}^{+2},$$

de donde

$$Q = 16 \text{ C.}$$

2.9 Campo eléctrico debido a distribuciones continuas de carga

Como ya sabemos, hay situaciones en las que conviene considerar que la carga tiene naturaleza continua. En estos casos, para calcular el campo producido por una distribución de carga deberemos aplicar el principio de superposición, de forma análoga a como hemos hecho para una distribución discreta. Al considerar la carga continua, deberemos reemplazar la suma por una integral.

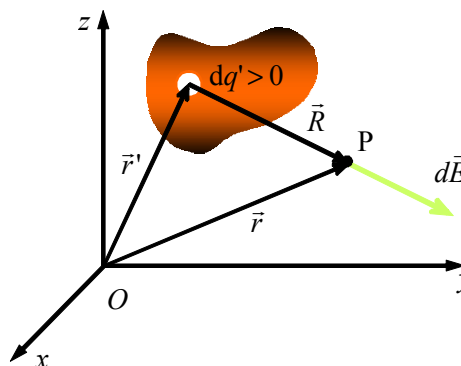


Figura 2.19: Campo eléctrico en P debido a un elemento de carga dq' .

Según sabemos, el campo producido un elemento de carga dq' en un punto P es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Para calcular el campo eléctrico total habrá que expresar dq' en función de la densidad de carga e integrar a toda la distribución. Este proceso se detalla a continuación para distribuciones lineales, superficiales y volúmicas de carga.

2.9.1 Campo eléctrico debido a distribuciones lineales de carga

Consideramos un objeto lineal caracterizado por una densidad lineal de carga ρ'_ℓ , como se muestra en la figura 2.20. En general, la distribución de carga no será uniforme y por tanto ρ'_ℓ será función de la posición. Si tomamos un elemento de línea

$d\ell'$ en una posición arbitraria del cuerpo, la carga contenida en este elemento es

$$dq' = \rho'_\ell d\ell',$$

El campo eléctrico producido por este elemento de carga es:

$$d\vec{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell'.$$

El campo total, debido a toda la distribución, se obtiene mediante integración al camino L' donde existe carga fuente:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \rho'_\ell \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell' \quad \text{N/C.}$$

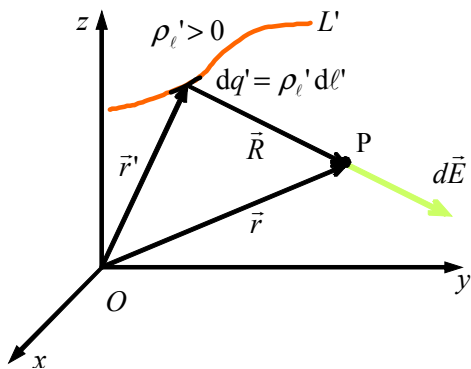


Figura 2.20: Campo eléctrico debido a un elemento lineal de carga $dq' = \rho'_\ell d\ell'$.

Ejemplo 10 Una varilla de longitud L , con densidad de carga ρ'_ℓ constante está situada a lo largo del semi-eje x positivo con uno de sus extremos en el origen. Calcular el campo eléctrico en el punto $P(d, 0)$, con $d > L$.

Solución:

El campo debido a un elemento de longitud situado arbitrariamente dentro de la distribución es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_\ell(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell'.$$

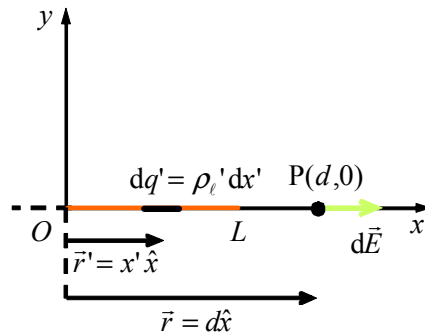


Figura 2.21: Campo eléctrico en $P(d, 0)$ debido a un elemento de carga situado en una varilla que yace en el eje x .

Según se ilustra en la figura 2.21:

$$d\ell' = dx', \quad \vec{r} = d\hat{x}, \quad \vec{r}' = x'\hat{x},$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (d - x')\hat{x}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = d - x'.$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de $d\vec{E}$ se obtiene

$$d\vec{E} = \frac{\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx'}{(d - x')^2} \hat{x}.$$

Para calcular el campo total producido por la varilla cargada tendremos que integrar desde $x' = 0$ hasta $x' = L$, luego

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx'}{(d - x')^2} \hat{x} \\ &= \frac{\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d - x'} \right) \Big|_0^L \hat{x} \\ &= \frac{\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d - L} - \frac{1}{d} \right) \hat{x}, \end{aligned}$$

operando resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_\ell L}{d(d - L)} \hat{x} \quad \text{N/C.}$$

Ejemplo 11 Calcular el campo electrostático producido, en el punto $P(0, \ell)$, por un hilo de longitud 2ℓ , localizado sobre el eje x , centrado en el origen y uniformemente cargado con una densidad lineal de carga ρ'_ℓ .

Solución:

Según se muestra en la figura 2.22, debido a la simetría del problema, el campo producido por dos elementos de carga situados simétricamente respecto al origen viene dado por:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2|d\vec{E}_1| \cos \alpha \hat{y},$$

donde

$$|d\vec{E}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

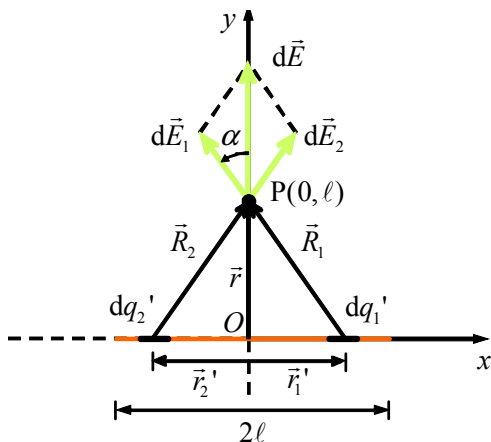


Figura 2.22: Campo eléctrico en $P(0, \ell)$ debido a dos elementos de carga simétricos, situados en un hilo cargado.

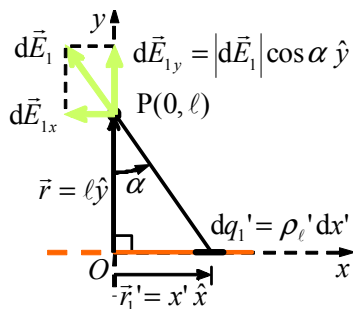


Figura 2.23: Geometría relevante para el cálculo de $|d\vec{E}_1|$ y $\cos \alpha$.

Las cantidades que aparecen en la expresión de $|d\vec{E}_1|$ valen:

$$dq' = \rho'_\ell dl' = \rho'_\ell dx',$$

$$\vec{r} = \ell \hat{y}, \quad \vec{r}'_1 = x' \hat{x}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'_1|^2 = \ell^2 + (x')^2,$$

además, según se observa en la figura 2.23

$$\cos \alpha = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + (x')^2}}.$$

Por tanto,

$$d\vec{E} = 2|d\vec{E}_1| \cos \alpha \hat{y} = \frac{\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ell dx'}{[\ell^2 + (x')^2]^{3/2}} \hat{y}.$$

Integrando en x' con los límites variando entre 0 y ℓ , tenemos

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\rho'_\ell}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\ell \frac{\ell dx'}{[\ell^2 + (x')^2]^{3/2}} \hat{y} \\ &= \frac{\rho'_\ell}{2\pi\epsilon_0 \ell} \int_0^\ell \frac{d\left(\frac{x'}{\ell}\right)}{[1 + \left(\frac{x'}{\ell}\right)^2]^{3/2}} \hat{y} \end{aligned}$$

Para hacer esta integral realizamos el cambio

$$\frac{x'}{\ell} = \tan \alpha,$$

por tanto,

$$d\left(\frac{x'}{\ell}\right) = d(\tan \alpha) = \sec^2 \alpha d\alpha$$

Para los límites de integración tenemos:

$$\begin{aligned} x' = 0 &\rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0) = 0 \\ x' = \ell &\rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\rho'_\ell}{2\pi\epsilon_0 \ell} \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 \alpha d\alpha}{[1 + \tan^2 \alpha]^{3/2}} \hat{y} \\ &= \frac{\rho'_\ell}{2\pi\epsilon_0 \ell} \int_0^{\pi/4} \cos \alpha d\alpha \hat{y} = \frac{\rho'_\ell}{2\pi\epsilon_0 \ell} (\sin \alpha) \Big|_0^{\pi/4} \hat{y} \\ &= \frac{\rho'_\ell}{2\pi\epsilon_0 \ell} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \end{aligned}$$

Por tanto, el campo pedido vale

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sqrt{2}\rho'_\ell}{4\pi\epsilon_0 \ell} \hat{y} \quad \text{N/C}}$$

Ejemplo 12 *Un anillo de metal muy delgado de radio a , tiene una densidad de carga ρ'_ℓ distribuida uniformemente. Hallar el campo producido por este anillo en puntos arbitrarios de su eje.*

Solución:

Teniendo en cuenta la geometría del problema, trabajaremos en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Haremos coincidir el plano del anillo con el plano x - y y su eje con el eje z . Calcularemos el campo eléctrico en un punto genérico de eje z , esto es, en el punto $P(0, 0, z)$.

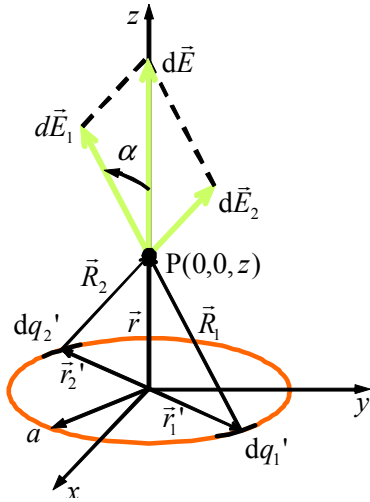


Figura 2.24: Campo eléctrico en $P(0, 0, z)$ debido a dos elementos de carga simétricos situados en un anillo cargado.

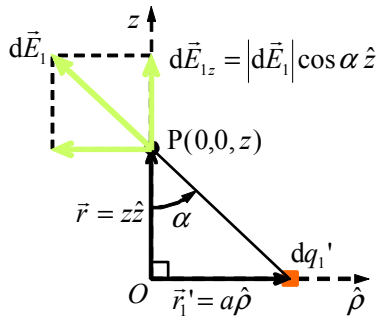


Figura 2.25: Geometría relevante para el cálculo de $|d\vec{E}_1|$ y $\cos \alpha$.

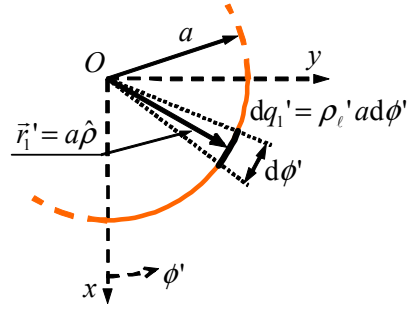


Figura 2.26: Elemento de carga en una posición arbitraria del anillo.

Trataremos de simplificar la resolución de este problema haciendo un estudio previo de su simetría. Para ello tomamos un elemento de carga dq'_1 en una posición arbitraria del anillo y otro elemento dq'_2 en la posición opuesta como se ilustra en la figura 2.24. Debido a la geometría del problema y por ser la distribución de carga uniforme, las componentes de $d\vec{E}_1$ y $d\vec{E}_2$ perpendiculares a z se cancelan, mientras que las componentes paralelas se suman. Por tanto, el campo producido por este par de elementos de carga en P es

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2|d\vec{E}_1| \cos \alpha \hat{z},$$

donde, de acuerdo con la figura 2.25

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}.$$

y

$$|d\vec{E}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^2}$$

Según se muestra en la figura 2.26

$$dq'_1 = \rho'_\ell dl' = \rho'_\ell a d\phi'$$

Además en la figura 2.25 se observa

$$\vec{r} = z\hat{z}, \quad \vec{r}'_1 = a\hat{\rho}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'_1|^2 = z^2 + a^2$$

El campo total es

$$d\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_\ell a z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi' \hat{z}$$

Integrando en ϕ' de 0 a π , queda

$$\vec{E} = \left[\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_\ell a z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\phi' \right] \hat{z},$$

de donde se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\rho'_s a z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad \text{N/C.}$$

2.9.2 Campo eléctrico debido a distribuciones superficiales de carga

Consideramos, como se ilustra en la figura 2.27, un cuerpo sobre el que existe una distribución superficial de carga caracterizada por una densidad superficial ρ_s . La carga contenida en un elemento de área dS' elegido arbitrariamente es

$$dq' = \rho'_s dS'$$

El campo eléctrico producido por este elemento de carga en un punto de observación es:

$$d\vec{E} = \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\rho'_s (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'.$$

Integrando a toda la superficie S' donde existe ρ'_s , la fuerza total resulta

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \rho'_s \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \quad \text{N/C.}$$

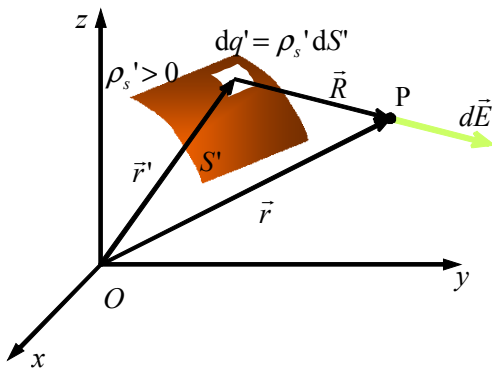


Figura 2.27: Campo eléctrico debido a un elemento superficial de carga $dq' = \rho'_s dS'$.

Ejemplo 13 Determinar el campo eléctrico creado por un disco circular de radio a , uniformemente cargado con una densidad superficial de carga ρ'_s , en un punto arbitrario del eje del disco.

Solución:

Para resolver el problema planteado emplearemos coordenadas cilíndricas y nos ayudaremos de la simetría del mismo.

Tomamos como punto de observación uno localizado sobre el eje z , a una distancia arbitraria del origen z . Consideramos también dos elementos de carga, dq'_1 y dq'_2 , situados simétricamente respecto al origen. Debido a la simetría, el campo creado por estos elementos tiene dirección \hat{z} y viene dado por la expresión

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2|d\vec{E}_1| \cos \alpha \hat{z}$$

con

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + (\rho')^2}}$$

y

$$|d\vec{E}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^2}$$

donde

$$dq'_1 = \rho'_s dS' = \rho'_s \rho' d\rho' d\phi'.$$

$$\vec{r} = z \hat{z}, \quad \vec{r}'_1 = \rho' \hat{\rho}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'_1|^2 = z^2 + (\rho')^2,$$

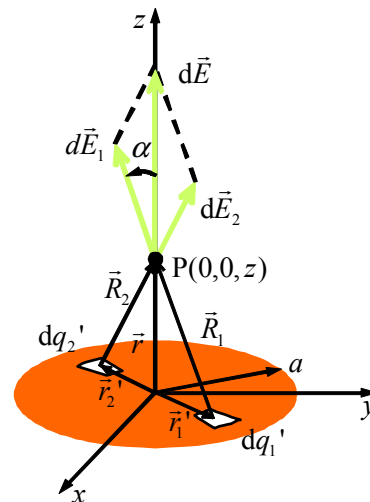


Figura 2.28: Campo eléctrico en $P(0,0,z)$ debido a dos elementos de carga simétricos situados en un disco cargado.

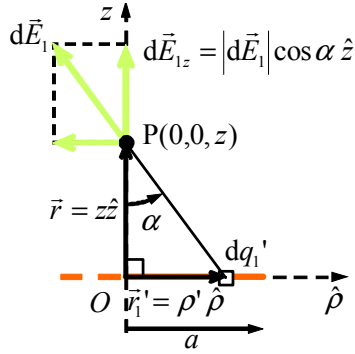


Figura 2.29: Geometría relevante para el cálculo de $|\vec{dE}_1|$ y $\cos \alpha$.

Teniendo en cuenta estos resultados el campo resulta

$$d\vec{E} = \frac{\rho'_s z}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{[z^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \hat{z}$$

Factorizando la expresión anterior en dos términos, uno que sólo depende de ϕ' y otro sólo de ρ' , queda

$$d\vec{E} = \left(\frac{\rho'_s z}{2\pi\epsilon_0} d\phi' \right) \left(\frac{\rho' d\rho'}{[z^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \right) \hat{z}$$

Integrando cada término en su variable correspondiente con ϕ' variando de 0 hasta π , y ρ' de 0 hasta a , resulta

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(\frac{\rho'_s z}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\phi' \right) \left(\int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{[z^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \right) \hat{z} \\ &= \frac{\rho'_s z}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{[z^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{-\rho'_s z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + (\rho')^2}} \right) \Big|_0^a \hat{z} \\ &= \frac{\rho'_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

Estudiemos más detenidamente el primer término del paréntesis. En primer lugar tendremos que tener en cuenta que representa una distancia y por tanto debe ser siempre positivo. Por consiguiente, si el punto de observación está en el semieje $z > 0$, entonces $\sqrt{z^2} = z > 0$; por el contrario, si el punto de observación está en el semieje $z < 0$, entonces $\sqrt{z^2} = -z > 0$. Teniendo esto en cuenta, el campo

buscado resulta

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho'_s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{z} & \text{si } z \geq 0 \\ \frac{-\rho'_s}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{z} & \text{si } z < 0 \end{cases},$$

o de forma más compacta

$$\vec{E} = \frac{\rho'_s}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{z} \quad \text{N/C.}$$

2.9.3 Campo eléctrico debido a distribuciones volúmicas de carga

Procederemos análogamente al caso de distribuciones lineales y superficiales. Para calcular el campo producido por una distribución volúmica de carga de densidad ρ'_τ contenida en un volumen τ' , como la mostrada en la figura 2.30, tomamos un elemento de volumen $d\tau'$, el cual contendrá una carga

$$dq' = \rho'_\tau d\tau'.$$

El campo eléctrico producido por este elemento de carga es

$$d\vec{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\rho'_\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau',$$

El campo total producido por todo el volumen τ' será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \rho'_\tau \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'.$$

En el caso general en el que existan fuentes puntuales, y distribuciones continuas de carga, tanto lineales, superficiales como volúmicas, el campo total producido en un punto de observación será la suma (vectorial) de los campos producidos por cada fuente, luego

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(\text{puntos}) + \vec{E}(\text{líneas}) \\ &\quad + \vec{E}(\text{superficies}) + \vec{E}(\text{volúmenes}). \end{aligned}$$

2.10 Flujo de campo eléctrico

Concepto de flujo del campo eléctrico:

Podemos definir el **flujo de campo eléctrico** de la siguiente manera:

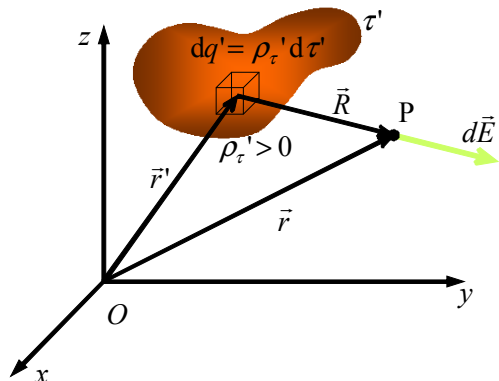


Figura 2.30: Campo eléctrico debido a un elemento volumétrico de carga $dq' = \rho'_\tau d\tau'$.

“El flujo de campo eléctrico Φ_E a través de una superficie S es una medida del número neto de líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie”.

Matemáticamente se expresa

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

donde S puede ser una superficie abierta o cerrada. En el segundo caso, la integral se denota

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Tal como se muestra en la figura 2.31, cuando el campo eléctrico es uniforme en la superficie de integración, es decir, tiene la misma magnitud y dirección en todos los puntos de dicha superficie, el cálculo de Φ_E se simplifica considerablemente ya que

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \iint_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S} = |\vec{E}||\vec{S}| \cos \alpha$$

Se observa que si \vec{E} y \vec{S} son paralelos entonces $\alpha = 0$ y, consecuentemente, el flujo es máximo. Al contrario, si \vec{E} y \vec{S} son mutuamente perpendiculares entonces $\alpha = \pi/2$ y, por tanto, el flujo es nulo.

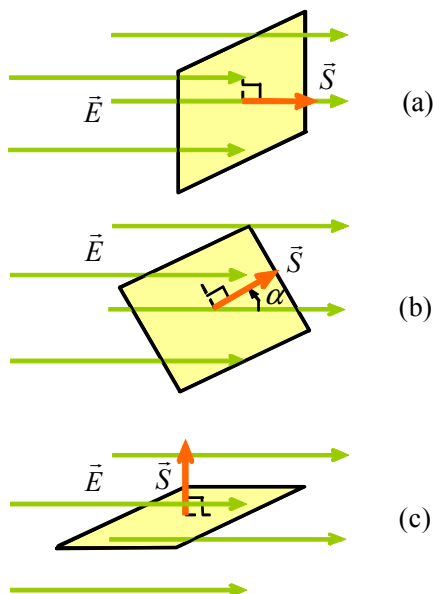


Figura 2.31: Flujo de un campo eléctrico uniforme. (a) \vec{E} paralelo a \vec{S} . (b) \vec{E} y \vec{S} forman un ángulo arbitrario α . (c) \vec{E} es perpendicular a \vec{S} .

Ejemplo 14 Una carga puntual de valor q' está situada en el origen. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa una esfera de radio a con centro en la carga.

Solución:

El flujo pedido se calcula mediante la expresión general:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico creado por la carga puntual y evaluado en la superficie de integración. Según la ley de Coulomb este campo vale

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{a^2},$$

por tanto, teniendo en cuenta que $d\vec{S} = dS \hat{r}$, el

flujo resulta

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_{\text{esfera } r=a} \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r} \cdot dS \hat{r} \\ &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a^2} \oint_{\text{esfera } r=a} dS = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a^2} 4\pi a^2 \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q'}{\epsilon_0} \text{ V m.}}$$

El flujo es proporcional a la carga q' y no depende del radio de la esfera de integración a .

2.11 Ley de Gauss

Enunciado de la ley de Gauss:

La **ley de Gauss**, también conocida como teorema de Gauss, constituye una de las leyes fundamentales de la electrostática. Esta ley puede enunciarse de la siguiente manera:

“El flujo neto del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada dentro de la superficie dividida por ϵ_0 ”

La expresión matemática de esta ley es:

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}}$$

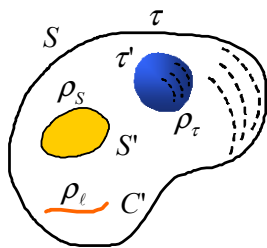


Figura 2.32: Ley de Gauss

La expresión particular que debemos emplear para el cálculo de la carga neta encerrada, Q_{enc} , depende del tipo de distribuciones de carga presentes

en el problema. Para ilustrar el caso más general consideremos un volumen τ limitado por una superficie cerrada S tal como se muestra en la figura 2.32. Suponiendo que dentro de τ existen tanto cargas puntuales como distribuciones continuas de carga, la carga neta encerrada dentro de S es:

$$\begin{aligned} Q_{\text{enc}} &= \sum_n q_n + \int_{L'} \rho_\ell dl' \\ &+ \iint_{S'} \rho_s dS' + \iiint_{\tau'} \rho_\tau d\tau' \end{aligned}$$

Nótese que tal como se indica en la figura 2.32, en general, el volumen τ' ocupado por las distribuciones volumétricas de cargas no coincide con el volumen τ . Análogamente, en general, S y S' son superficies distintas.

Puntualizaciones sobre la ley de Gauss:

- Las cargas que están fuera del volumen τ no afectan al flujo de \vec{E} a través de S . En el caso de la figura 2.33

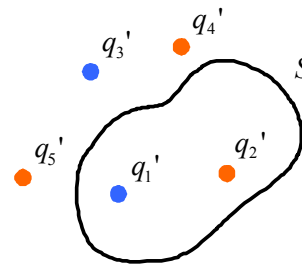


Figura 2.33:

$$\Phi_E = \frac{q'_1 + q'_2}{\epsilon_0}$$

Sin embargo, q'_3, q'_4 y q'_5 sí afectan al valor de \vec{E} en cada punto de la superficie S .

- El flujo es sólo función del valor neto de las cargas dentro de S , pero no de las posiciones de estas cargas. Sin embargo, al cambiar las posiciones, sí cambia el valor de \vec{E} en cada punto de S .

2.12 Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

La ley de Gauss puede utilizarse para calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga cuando dicha distribución tiene ciertas propiedades de simetría. La idea general consiste en aplicar la expresión

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

en unas condiciones que nos permitan despejar el campo eléctrico, es decir, sacarlo fuera de la integral. Para ello, debe elegirse una superficie imaginaria S , también llamada **superficie gaussiana**. La superficie gaussiana óptima es aquella en la que en cada una de sus partes (superficies que la conforman) el campo eléctrico es nulo, perpendicular o paralelo al vector superficie en cada punto. En el caso de ser paralelo, la magnitud del campo eléctrico debe ser además constante en la superficie. Si se cumplen estas condiciones, resulta sencillo despejar el campo eléctrico ya que si es nulo o perpendicular a la superficie el flujo es cero, y si es constante y paralelo a la superficie se puede sacar fuera de la integral.

Como se desprende de la discusión anterior, la aplicación de la ley de Gauss al cálculo del campo eléctrico requiere el conocimiento previo de cuál es la dirección del campo y de qué coordenadas depende.

Procedimiento para calcular el campo eléctrico mediante la ley de Gauss:

El cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Elegir convenientemente un sistema de coordenadas
2. Determinar de qué coordenadas depende el campo eléctrico utilizando argumentos basados en la simetría de la distribución de carga
3. Determinar la dirección del campo eléctrico a partir de la simetría de la distribución de carga
4. Elegir una superficie gaussiana S
5. Calcular el flujo eléctrico a través de S

6. Calcular la carga encerrada dentro de S
7. Sustituir los dos últimos resultados en la ecuación de la ley de Gauss y despejar el campo eléctrico

Existen tres grandes grupos de problemas que pueden ser abordados mediante la ley de Gauss: problemas con simetría plana, con simetría cilíndrica y con simetría esférica. A continuación discutiremos cada uno de ellos.

2.12.1 Problemas con simetría plana

Para resolver este tipo de problemas consideraremos coordenadas cartesianas (x, y, z) . Diremos que una distribución de carga tiene simetría plana cuando la densidad de carga es, a lo sumo, función de una única coordenada, digamos z . Ejemplos de interés que corresponden a este tipo de simetría se muestran en la figura 2.34; son el plano infinito cargado uniformemente y la lámina infinita con densidad de carga ρ_τ , siendo ésta bien constante o bien función de z .

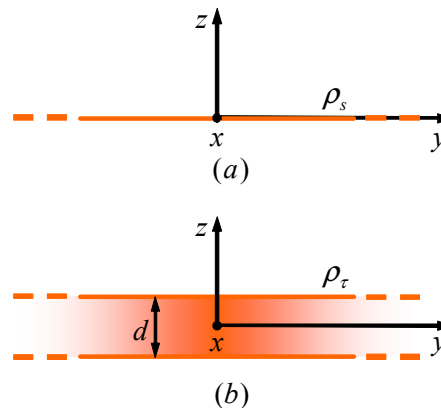


Figura 2.34: Distribuciones de carga con simetría plana. (a) Plano infinito. (b) Lámina infinita de espesor d .

Ejemplo 15 Determinar el campo eléctrico creado por un plano infinito cargado uniformemente con una densidad superficial de carga $\rho_s > 0$.

Solución:

1) Sistema de coordenadas

Tal y como hemos mencionado anteriormente, emplearemos coordenadas cartesianas y haremos coincidir el plano de carga con el plano coordenado x - y .

2) Dependencia con las coordenadas

Tomando un punto de observación $P(x, y, z)$ en una posición arbitraria y variando las coordenadas x y/o y seguimos viendo las mismas fuentes (cargas) y a la misma distancia que en la posición inicial, por tanto el campo eléctrico no depende de x ni de y . Sin embargo, si variamos la coordenada z , cambia la distancia del punto de observación a las fuentes. Por tanto, el campo eléctrico dependerá, a lo sumo, de la coordenada z , esto es, buscamos un campo de la forma $\vec{E} = \vec{E}(z)$. Cómo el campo sólo depende de z , tomaremos $x = y = 0$ sin que esto suponga ninguna pérdida de generalidad, es decir, vamos a calcular el campo en un punto arbitrario del eje z .

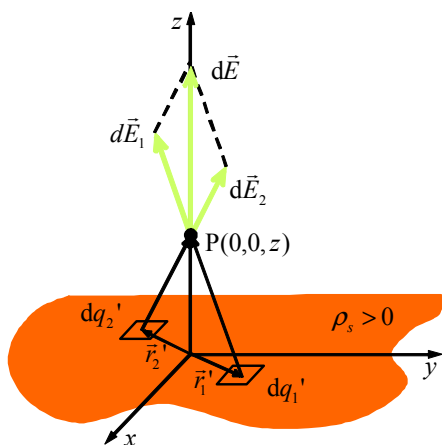


Figura 2.35: Campo eléctrico debido a dos elementos de carga tomados simétricamente en un plano infinito uniformemente cargado.

3) Dirección

Para ver la dirección del campo basta tomar una pareja de elementos de carga, dq_1' y dq_2' , situados simétricamente respecto al origen, como se muestra en la figura 2.35. El campo creado por estos elementos tendrá dirección \hat{z} ($+\hat{z}$ si $z > 0$ y $-\hat{z}$ si $z < 0$). Además, el plano completo se puede interpretar como una distribución de carga constituida por parejas de estos elementos simétricos; en con-

secuencia, el campo total creado por el plano tiene también dirección \hat{z} . Además, debido a la simetría, el campo ha de tener igual valor a igual distancia del plano, ya estemos por encima o por debajo de éste. Entonces, podemos poner

$$\vec{E} = \begin{cases} +E \hat{z} & \text{si } z > 0 \\ -E \hat{z} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

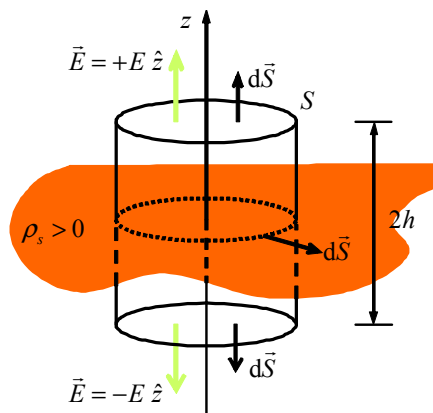


Figura 2.36: Geometría relevante para el cálculo, mediante la ley de Gauss, del campo eléctrico debido a un plano infinito uniformemente cargado.

4) Superficie gaussiana

Tomaremos como superficie gaussiana un cilindro cuyo eje coincida con el eje z , con base de área S y situado con una mitad en el semiespacio $z > 0$ y con la otra en el semiespacio $z < 0$, tal como se muestra en la figura 2.36.

5) Flujo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través del cilindro gaussiano vale

$$\oint_{\text{cilindro gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{base superior}} E \hat{z} \cdot dS \hat{z} + \iint_{\text{base inferior}} (-E \hat{z}) \cdot (-dS \hat{z}) + \iint_{\text{superficie lateral}} \vec{E}(z) \cdot d\vec{S}$$

En la superficie lateral del cilindro $d\vec{S}$ tiene dirección radial, por tanto los vectores \vec{E} y $d\vec{S}$ son mu-

tuamente perpendiculares en cualquier punto de dicha superficie; consecuentemente el flujo lateral es nulo. Además, los flujos a través de las bases son iguales, luego

$$\oint_{\text{cilindro gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{\text{base}} E dS = 2E \iint_{\text{base}} dS = 2ES$$

5) Carga neta encerrada

La carga encerrada dentro del cilindro gaussiano se corresponde con la carga contenida en el círculo punteado de la figura 2.36, luego

$$Q_{\text{enc}} = \iint_{\text{círculo}} \rho_s dS' = \rho_s \iint_{\text{círculo}} dS' = \rho_s S.$$

6) Resolución

Sustituyendo los dos resultados anteriores en la expresión de la ley de Gauss queda

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}.$$

Por tanto, el resultado final es

$$\vec{E} = \begin{cases} +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Una forma más compacta de escribir este resultado es

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z} \quad \text{N/C.}$$

En la figura 2.37 se muestran las líneas de campo eléctrico debidas al plano cargado uniformemente. Si la densidad de carga fuese negativa, las líneas de campo tendrían la misma dirección pero con sentido contrario, es decir, entrante al plano. La variación del campo eléctrico con la distancia al plano se muestra en la figura 2.38. Se observa que el campo es discontinuo al atravesar la superficie cargada. El valor del salto es igual a la densidad de carga dividida por ϵ_0 , esto es,

$$E(0^+) - E(0^-) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}.$$

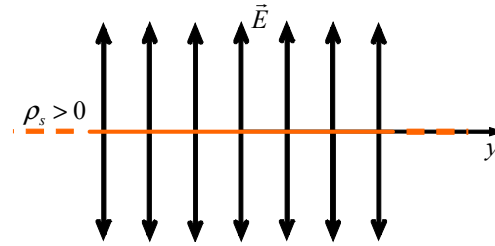


Figura 2.37: Líneas de campo eléctrico debidas a un plano infinito uniformemente cargado.

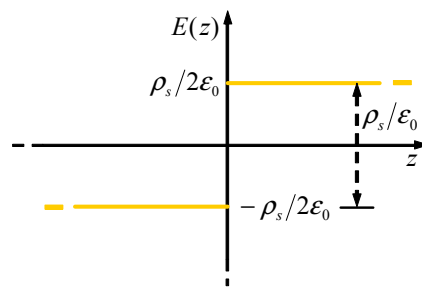


Figura 2.38: Variación del campo eléctrico con la distancia a un plano infinito uniformemente cargado (la posición del plano coincide con $z = 0$).

2.12.2 Problemas con simetría cilíndrica

Consideremos coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Diremos que una distribución de carga tiene simetría cilíndrica cuando la densidad de carga depende, a lo sumo, de la coordenada radial ρ . Ejemplos de distribuciones de carga con simetría cilíndrica son el hilo recto con densidad lineal de carga ρ_ℓ constante, la superficie cilíndrica con densidad superficial de carga ρ_s constante, y el volumen cilíndrico con densidad volumétrica de carga ρ_τ constante o función de la coordenada ρ . En todos los casos, la distribución debe ser de longitud infinita. Estos ejemplos se ilustran en la figura 2.39.

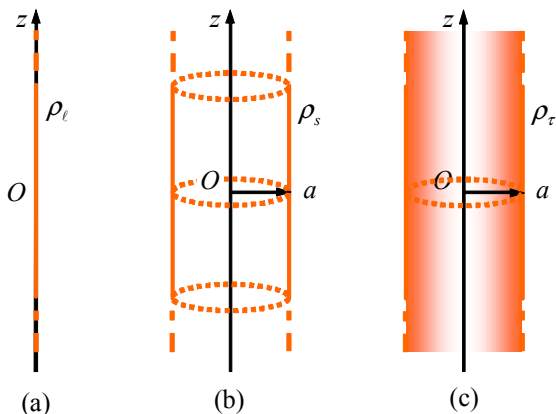


Figura 2.39: Distribuciones de carga con simetría cilíndrica. (a) Hilo infinito. (b) Superficie cilíndrica de longitud infinita. (c) Volumen cilíndrico de longitud infinita.

Ejemplo 16 *Calcular, mediante la ley de Gauss, el campo eléctrico debido a un hilo recto, infinito, con densidad de carga lineal ρ_ℓ positiva y constante.*

Solución:

1) Sistema de coordenadas

Haremos coincidir el hilo con el eje z y emplearemos coordenadas cilíndricas para resolver el problema.

2) Dependencia con las coordenadas

Tomamos un punto de observación $P(\rho, \phi, z)$ en una posición arbitraria del espacio. Se observa que incrementando las coordenadas ϕ y/o z del punto se “ven” las mismas fuentes y a la misma distancia que en la posición inicial; por tanto, el campo no puede ser función de ϕ ni de z . Sin embargo, si cambiamos el valor de la coordenada ρ del punto de observación, la distancia al hilo cambia; en consecuencia cambiará también el valor del campo eléctrico. Concluimos entonces que el campo creado por el hilo depende sólo de la coordenada ρ , esto es, $\vec{E} = \vec{E}(\rho)$.

3) Dirección

Tomamos una pareja de elementos de carga, dq'_1 y dq'_2 , situados simétricamente respecto al origen y un punto de observación situado a una distancia ρ del origen, como se ilustra en la figura 2.40. El campo resultante en dicho punto tendrá dirección $\hat{\rho}$.

Por tanto, debido a la simetría de la distribución y a la uniformidad de ρ_ℓ , el campo eléctrico debido al hilo completo tendrá también dirección $\hat{\rho}$. Entonces, el campo buscado es de la forma $\vec{E} = E(\rho) \hat{\rho}$.

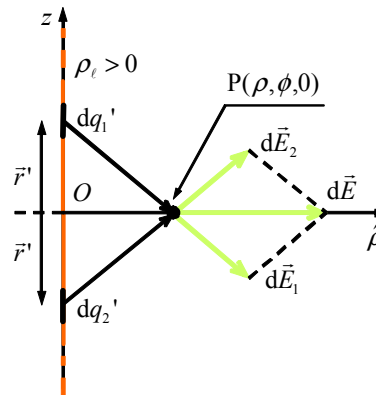


Figura 2.40: Campo eléctrico debido a dos elementos de carga tomados simétricamente en un hilo infinito uniformemente cargado.

3) Superficie gaussiana

Como superficie gaussiana tomaremos un cilindro cuyo eje coincida con el eje z , de longitud finita L y de radio ρ , tal como se ilustra en la figura 2.41. Esta superficie cumple las condiciones de la ley de Gauss ya que \vec{E} es perpendicular a $d\vec{S}$ en las bases del cilindro, y es paralelo a $d\vec{S}$ y constante en la superficie lateral.

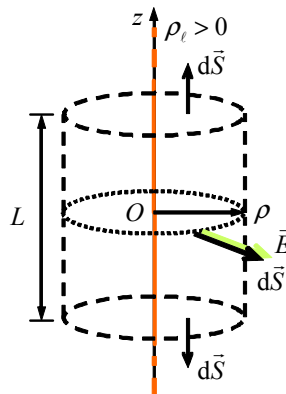


Figura 2.41: Geometría relevante para el cálculo, mediante la ley de Gauss, del campo eléctrico debido a un hilo infinito uniformemente cargado.

4) Flujo eléctrico

El flujo eléctrico a través del cilindro gaussiano de la figura 2.41 es

$$\oint_{\text{cilindro gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{base superior}} E(\rho) \hat{\rho} \cdot dS \hat{z} + \iint_{\text{base inferior}} E(\rho) \hat{\rho} \cdot (-dS \hat{z}) + \iint_{\text{superficie lateral}} E \hat{\rho} \cdot dS \hat{\rho}$$

El flujo a través de las bases es nulo, ya que el campo eléctrico es perpendicular al vector superficie, además el valor del campo eléctrico en la superficie lateral es constante, luego

$$\oint_{\text{cilindro gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \iint_{\text{superficie lateral}} dS = E2\pi\rho L.$$

5) Carga neta encerrada

La carga neta encerrada dentro del cilindro gaussiano es

$$Q_{\text{enc}} = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_{\ell} d\ell' = \rho_{\ell} \int_{-L/2}^{L/2} d\ell' = \rho_{\ell} L.$$

6) Resolución

Sustituyendo los dos últimos resultados en la ecuación de la ley de Gauss resulta

$$E = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

y por tanto el resultado final es

$$\vec{E} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}.$$

En la figura 2.42 se muestra una vista transversal de un hilo cargado y las líneas de campo eléctrico creadas.

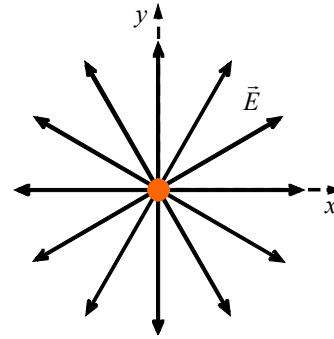


Figura 2.42: Líneas de campo creadas por un hilo de longitud infinita uniformemente cargado.

Solución:

Análogamente al ejemplo del hilo infinito, el campo eléctrico creado por la superficie cilíndrica dependerá sólo de la variable ρ y tendrá dirección $\hat{\rho}$, es decir, $\vec{E}(\rho) = E(\rho) \hat{\rho}$.

Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, en este problema se observa que la distribución de carga divide el espacio en dos regiones: la región interior al cilindro ($\rho < a$) y la región exterior ($\rho > a$). En estos casos debe aplicarse la ley de Gauss en cada región por separado.

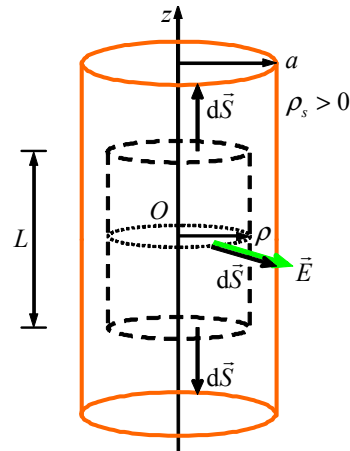


Figura 2.43: Geometría relevante para el cálculo del campo eléctrico debido a una superficie cilíndrica infinita uniformemente cargada. Caso $\rho < a$.

Ejemplo 17 Calcular el campo eléctrico debido a una superficie cilíndrica de longitud infinita y radio a , uniformemente cargada con una densidad superficial de carga positiva ρ_s .

a) Región interior al cilindro de carga ($\rho < a$)
Tomaremos como superficie gaussiana un cilindro

de altura L y radio $\rho < a$, tal como se muestra en la figura 2.43. De forma análoga al problema anterior, el flujo del campo eléctrico a través de la gaussiana es

$$\oint_{\text{cilindro gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{superficie lateral}} E \hat{\rho} \cdot dS \hat{\rho} = E \iint_{\text{superficie lateral}} dS = E2\pi\rho L.$$

La carga encerrada dentro de la gaussiana es cero

$$Q = 0,$$

por tanto, el campo en esta región resulta nulo

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para } \rho < a$$

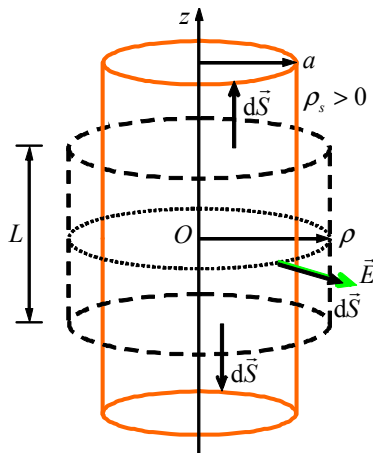


Figura 2.44: Geometría relevante para el cálculo del campo eléctrico debido a una superficie cilíndrica infinita uniformemente cargada. Caso $\rho > a$.

b) Región exterior al cilindro de carga ($\rho > a$)

Tomamos como gaussiana un cilindro de altura L y radio $\rho > a$, tal como se ilustra en la figura 2.44. Se observa que el flujo, en este caso, tiene la misma expresión matemática que en el caso anterior:

$$\oint_{\text{cilindro gaussiano}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E2\pi\rho L.$$

La carga encerrada en el cilindro gaussiano se corresponde con la carga existente en una longitud L de la superficie cargada, luego

$$Q_{\text{enc}} = \iint_{\text{superficie } \rho=a} \rho_s dS' = \rho_s \iint_{\text{superficie } \rho=a} dS' = \rho_s 2\pi a L.$$

Por tanto, el campo resulta

$$\vec{E} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad \text{para } \rho > a$$

Se observa que en $\rho = a$ el campo eléctrico es discontinuo dando un salto de valor

$$E(a^+) - E(a^-) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} - 0 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}.$$

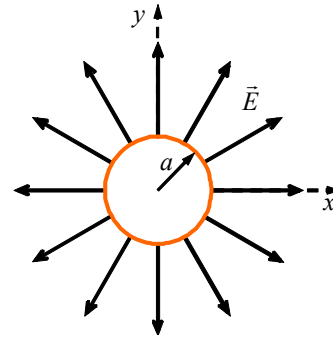


Figura 2.45: Líneas de campo creadas por una superficie cilíndrica de longitud infinita uniformemente cargada.

2.12.3 Problemas con simetría esférica

En la figura 2.46 se muestra una superficie esférica uniformemente cargada y un volumen esférico con una densidad volúmica de carga ρ_r . Ambos son ejemplos de distribuciones con simetría esférica, ya que la densidad de carga depende, a lo sumo, de la distancia del centro de la esfera al punto de observación. En otras palabras, desde cualquier punto situado a una distancia fija r del centro de la esfera se ve la misma distribución de carga. En el caso de

la distribución volúmica de la figura 2.46, la densidad de carga puede ser constante o depender de la coordenada r .

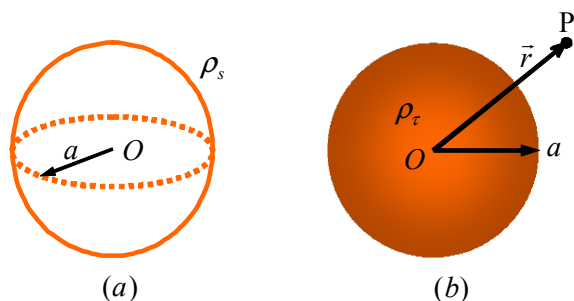


Figura 2.46: Distribuciones con simetría esférica. (a) Superficie esférica. (b) Volumen esférico.

Ejemplo 18 Calcular el campo eléctrico debido a una superficie esférica de radio a con densidad superficial de carga ρ_s positiva y constante.

Solución:

Haremos coincidir el centro de la esfera con el origen de coordenadas. Debido a la geometría de la densidad de carga, el campo será únicamente función de la distancia r del origen al punto de observación. Además, tal como se muestra en la figura 2.47, tomando elementos de carga situados simétricamente observamos que el campo resultante en el punto P tendrá dirección radial, lo cual indicaremos mediante el vector \hat{r} . Podemos “barrer” la esfera completa considerando elementos simétricos de carga, por tanto el campo total debido a la superficie esférica tendrá dirección \hat{r} . En consecuencia, estamos buscando un campo de la forma $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.

En los problemas con simetría esférica, la superficie gaussiana adecuada es una esfera de radio r concéntrica con la distribución de carga, ya que en dicha superficie el campo eléctrico tiene magnitud constante y es paralelo al vector superficie.

Al igual que sucedió con el ejemplo de la superficie cilíndrica, en este problema es necesario distinguir entre las regiones interior y exterior a la esfera de carga y aplicar la ley de Gauss en cada una de ellas.

a) Región interior a la esfera de carga ($r < a$)

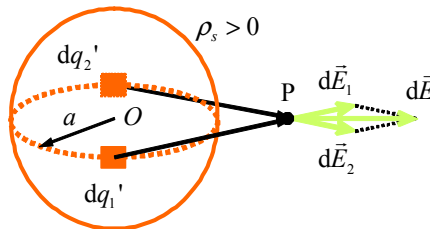


Figura 2.47: Campo eléctrico debido a dos elementos de carga simétricos tomados sobre una superficie esférica.

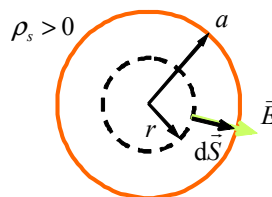


Figura 2.48: Geometría relevante para el cálculo del campo eléctrico debido a una superficie esférica uniformemente cargada. Caso $r < a$.

La superficie gaussiana para esta región se muestra en la figura 2.48. El flujo eléctrico a través de la esfera gaussiana vale

$$\begin{aligned} \oint_{\text{esfera gaussiana}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_{\text{esfera gaussiana}} E \hat{r} \cdot dS \hat{r} \\ &= E \oint_{\text{esfera gaussiana}} dS = E4\pi r^2. \end{aligned}$$

Como se observa en la figura 2.48, en esta región la carga neta encerrada por la gaussiana es nula

$$Q_{\text{enc}} = 0,$$

por tanto, el campo eléctrico también lo es, luego

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para } r < a.$$

b) Región exterior a la esfera de carga ($r > a$)

El flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana mostrada en la figura 2.49 vale

$$\oint_{\text{esfera gaussiana}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E4\pi r^2.$$

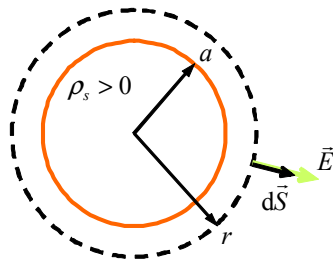


Figura 2.49: Geometría relevante para el cálculo del campo eléctrico debido a una superficie esférica uniformemente cargada. Caso $r > a$.

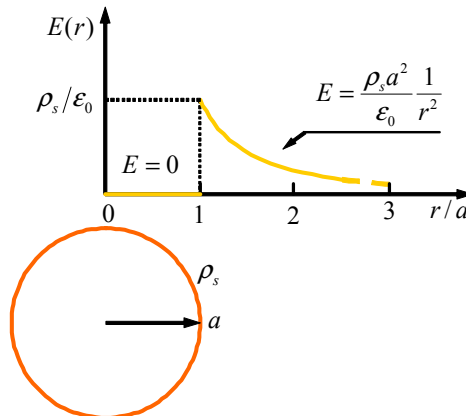


Figura 2.50: Variación del campo eléctrico con la distancia al centro de una superficie esférica de radio a , uniformemente cargada .

que es el mismo resultado que obtuvimos para $r < a$. Esto es debido a que, en la aplicación de la ley de Gauss a problemas con varias regiones, la expresión del flujo a través de la gaussiana es el mismo con independencia de la región en la que estemos.

Para la zona exterior, la carga encerrada por la gaussiana es la carga total de la esfera

$$Q_{\text{enc}} = \iint_{\text{esfera } r=a} \rho_s dS = \rho_s 4\pi a^2.$$

Empleando la expresión de la ley de Gauss, el campo eléctrico resulta

$$\vec{E} = \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r > a.$$

A partir de los resultados obtenidos, se observa que el campo eléctrico es discontinuo al atravesar la superficie esférica cargada. Tal como se ilustra en la figura 2.50, el salto en el valor del campo es

$$E(a^+) - E(a^-) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} - 0 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0},$$

es decir, se obtiene el mismo resultado que en los ejemplos del plano y de la superficie cilíndrica.

Ejemplo 19 Determinar el campo eléctrico debido a una densidad volumétrica de carga ρ_τ constante contenida en una esfera de radio a .

Solución:

Al igual que en el ejemplo anterior, el campo eléctrico buscado es de la forma $\vec{E} = E(r) \hat{r}$; la distribución volumétrica de carga divide el espacio en dos regiones: $r > a$ y $r < a$; y, por ser un problema con simetría esférica, tomaremos superficies gaussianas en forma de esfera de radio r .

En ambas regiones el flujo eléctrico tiene la expresión

$$\oint_{\text{esfera gaussiana}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2.$$

Para calcular la carga encerrada por la gaussiana consideraremos cada región por separado.

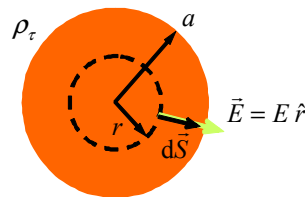


Figura 2.51: Geometría relevante para el cálculo del campo eléctrico debido a un volumen esférico uniformemente cargado. Caso $r < a$.

a) Región interior a la esfera de carga ($r < a$)

Según se observa en la figura 2.51, la carga neta

encerrada dentro de la gaussiana vale

$$Q_{\text{enc}} = \iiint_{\text{esfera gaussiana}} \rho_{\tau} d\tau = \rho_{\tau} \frac{4}{3} \pi r^3.$$

El campo resulta entonces

$$\vec{E} = \frac{\rho_{\tau} r}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad \text{para } r < a.$$

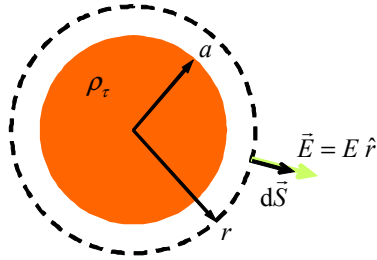


Figura 2.52: Geometría relevante para el cálculo del campo eléctrico debido a un volumen esférico uniformemente cargado. Caso $r > a$.

b) Región exterior a la esfera de carga ($r > a$)

En este caso, como se ilustra en la figura 2.52, la carga neta encerrada dentro de la gaussiana se corresponde con la carga total, luego

$$Q_{\text{enc}} = \iiint_{\text{esfera } r=a} \rho_{\tau} d\tau = \rho_{\tau} \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Sustituyendo estos dos resultados en el teorema de Gauss y añadiendo la dirección se obtiene

$$\vec{E} = \frac{\rho_{\tau} a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r > a.$$

Es interesante expresar este resultado en función de la carga total de la esfera, que vale

$$Q_{\text{total}} = \rho_{\tau} \frac{4}{3} \pi a^3 = Q_{\text{enc}}$$

entonces, también podemos expresar el campo como

$$\vec{E} = \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r > a,$$

lo cual muestra que el campo producido por la esfera en la región exterior es igual al que produciría

una carga puntual del mismo valor situada en el centro de la esfera.

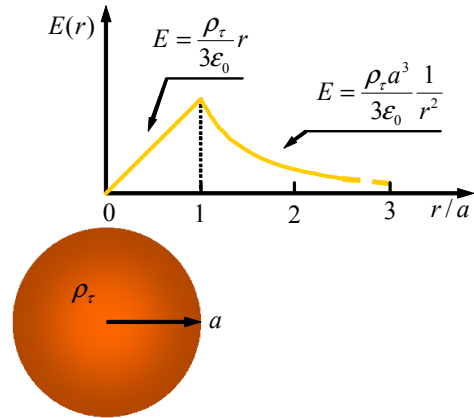


Figura 2.53: Variación del campo eléctrico con la distancia al centro de un volumen esférico uniformemente cargado de radio a .

2.13 ¿Quién fue quién en Electromagnetismo?.

2.13.1 Charles A. Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (Angoulême, Francia, 14 de junio de 1736 - París, 23 de agosto de 1806)². Físico e ingeniero militar francés. Se recuerda por haber descrito de manera matemática la ley de atracción entre cargas eléctricas. En su honor la unidad de carga eléctrica lleva el nombre de coulomb (C). Entre otras teorías y estudios se le debe la teoría de la torsión recta y un análisis del fallo del terreno dentro de la Mecánica de suelos.

Fue el primer científico en establecer las leyes cuantitativas de la electrostática, además de realizar muchas investigaciones sobre magnetismo, rozamiento y electricidad. Sus investigaciones científicas están recogidas en siete memorias, en las que expone teóricamente los fundamentos del magnetismo y de la electrostática. En 1777 inventó la balanza de torsión para medir la fuerza de atracción o

² Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_de_Coulomb



Figura 2.54: Charles A. Coulomb (1736-1806)

conocido como "Leyes de Coulomb".

repulsión que ejercen entre sí dos cargas eléctricas, y estableció la función que liga esta fuerza con la distancia. Con este invento, en 1785 estableció el principio, que rige la interacción entre las cargas eléctricas, actualmente conocido como ley de Coulomb.

Fue educado en la École du Génie en Mézières y se graduó en 1761 como ingeniero militar con el grado de Primer Teniente. Durante nueve años sirvió en las Indias Occidentales, donde supervisó la construcción de fortificaciones en la Martinica. En 1774, se convirtió en corresponsal de la Academia de Ciencias de París. Compartió el primer premio de la Academia por su artículo sobre las brújulas magnéticas y recibió también el primer premio por su trabajo clásico acerca de la fricción, un estudio que no fue superado durante 150 años. Durante los siguientes 25 años, presentó 25 artículos a la Academia sobre electricidad, magnetismo, torsión y aplicaciones de la balanza de torsión, así como varios cientos de informes sobre ingeniería y proyectos civiles.

Coulomb murió en 1806, cinco años después de convertirse en presidente del Instituto de Francia (antiguamente la Academia de Ciencias de París). Su investigación sobre la electricidad y el magnetismo permitió que esta área de la física saliera de la filosofía natural tradicional y se convirtiera en una ciencia exacta. La historia lo reconoce con excelencia por su trabajo matemático sobre la electricidad