

# Índice General

<b>3</b>	<b>El potencial eléctrico</b> <sup>1</sup>	<b>2</b>
3.1	Introducción . . . . .	2
3.2	Energía potencial eléctrica . . . . .	2
3.2.1	Trabajo electrostático . . . . .	2
3.2.2	Carácter conservativo del campo electrostático . . . . .	4
3.2.3	Energía potencial electrostática . . . . .	4
3.3	Potencial eléctrico . . . . .	6
3.3.1	Superficies equipotenciales . . . . .	7
3.4	Cálculo directo del potencial . . . . .	7
3.4.1	Potencial debido a distribuciones discretas de carga . . . . .	7
3.4.2	Potencial debido a distribuciones continuas de carga . . . . .	8
3.5	Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico . . . . .	11
3.6	Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial. Gradiente del potencial . . . . .	14
3.6.1	Significado del gradiente . . . . .	16
3.7	Energía electrostática de formación de distribuciones de carga . . . . .	17
3.7.1	Energía de formación de una distribución discreta de carga . . . . .	17
3.7.2	Energía de formación de distribuciones continuas de carga . . . . .	19
3.8	¿Quién fue quién en Electromagnetismo?. . . . .	20
3.8.1	James Clerk Maxwell . . . . .	20

---

<sup>1</sup>Versión 2010

## Tema 3

# El potencial eléctrico <sup>1</sup>

### 3.1 Introducción

Como ya sabemos, una distribución de carga produce en el espacio que la circunda un campo eléctrico. En este tema introduciremos otro tipo de campo llamado **potencial eléctrico**, o simplemente **potencial**.

El campo eléctrico  $\vec{E}$  se define como la fuerza por unidad de carga y la fuerza es un vector, por tanto  $\vec{E}$  es un campo vectorial. En este tema definiremos el potencial  $V$  como la energía potencial por unidad de carga y, como la energía es un escalar, el potencial resultará ser un campo escalar. Debido a su naturaleza escalar, muchas veces es más aconsejable trabajar con el potencial que directamente con el campo. En este tema veremos la relación entre  $V$  y  $\vec{E}$ , así como la forma de calcular uno a partir del otro.

### 3.2 Energía potencial eléctrica

#### 3.2.1 Trabajo electrostático

Supondremos una carga puntual fuente  $q'$  fija y otra carga puntual de prueba  $q$ . Nuestro interés inicial es calcular el trabajo  $W$  realizado por la fuerza eléctrica cuando la carga  $q$  se desplaza desde un punto origen A hasta otro punto destino B:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Antes de considerar un desplazamiento general de la carga  $q$ , estudiaremos algunas trayectorias particulares.

#### Trabajo a través de un camino circular:

Consideramos el camino circular de la figura 3.1. En este caso, el trabajo entre los puntos A y B vale:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

El trabajo resultante es nulo ya que el campo creado por  $q'$  es perpendicular al camino.

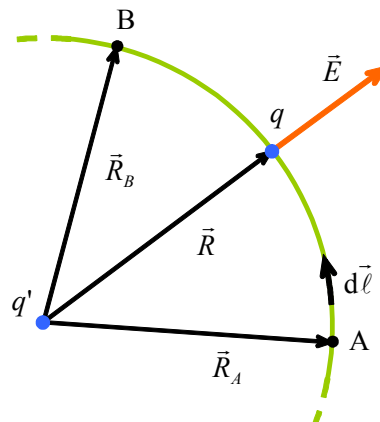


Figura 3.1: Camino circular.

#### Trabajo a través de un camino radial:

En este caso, considerando el camino de la figura 3.2 tenemos

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

y teniendo en cuenta que el campo creado por  $q'$  vale

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R^2} \hat{R},$$

el trabajo resulta

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= q \int_A^B \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R^2} \hat{R} \right) \cdot dR \hat{R} \\ &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{R^2} dR = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{R} \right)_{R_A}^{R_B} \\ &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right). \end{aligned}$$

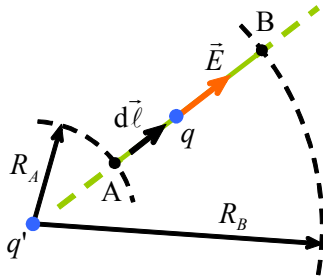


Figura 3.2: Camino radial

### Trabajo a través de un camino radial-circular-radial:

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica a lo largo del camino mostrado en la figura 3.3 es

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_D^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_C} \right) \\ &\quad + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_D} - \frac{1}{R_B} \right), \end{aligned}$$

y como  $R_C = R_D$ , queda

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right).$$

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica depende únicamente de las posiciones inicial ( $R_A$ ) y final ( $R_B$ ) de la carga de prueba  $q$ .

Esto es cierto con independencia del número de tramos radiales y circulares que conformen el camino.

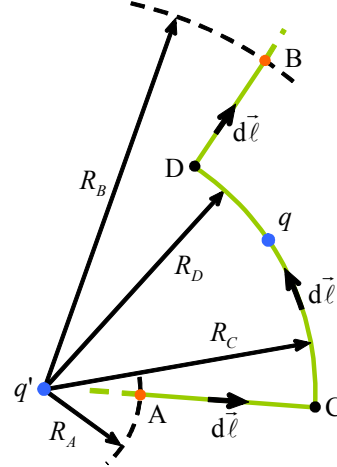


Figura 3.3: Camino radial-circular-radial.

### Trabajo electrostático a través de una trayectoria arbitraria:

Cualquier camino arbitrario puede descomponerse en un número infinito de tramos radiales y circulares, como se ilustra en la figura 3.4.

El trabajo realizado en los tramos circulares es nulo, por tanto el trabajo total es la suma de las contribuciones de los tramos radiales.

Al realizar esta suma, los términos que dependen de distancias distintas de  $R_A$  y  $R_B$  se cancelan entre sí. Por tanto el trabajo realizado al recorrer un camino de forma arbitraria entre A y B es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right).$$

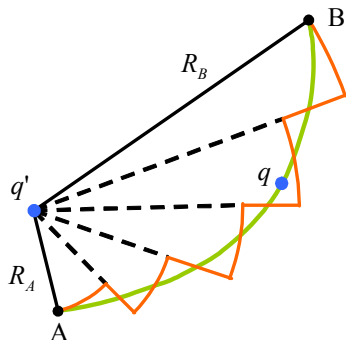


Figura 3.4: Descomposición de una trayectoria arbitraria en caminos circulares y radiales.

### 3.2.2 Carácter conservativo del campo electrostático

Según hemos visto, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es dependiente sólo de las posiciones inicial y final de la carga, siendo independiente del camino seguido. Decimos entonces que la fuerza eléctrica es una **fuerza conservativa** y por tanto el campo eléctrico es un **campo conservativo**. Si hacemos coincidir el punto inicial A y el final B resulta un camino cerrado y el trabajo total realizado a lo largo de este camino será nulo, esto es

$$W_{A \rightarrow B=A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0,$$

de donde podemos poner

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0,$$

es decir, la circulación del campo electrostático es nula.

La expresión anterior junto con la ley de Gauss, estudiada en el tema anterior, constituyen las ecuaciones fundamentales de la electrostática. A mediados del siglo XIX Maxwell unificó las teorías de la electricidad y del magnetismo y las generalizó para el caso fenómenos variables con el tiempo, dando lugar al electromagnetismo. Si bien la ley de Gauss sigue siendo válida para fenómenos variables con el tiempo, la ecuación de la circulación de  $\vec{E}$  debe ser modificada. Este punto será ampliamente discutido en el tema de inducción electromagnética.

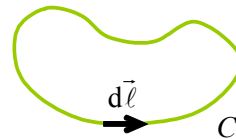


Figura 3.5: Camino cerrado.

### 3.2.3 Energía potencial electrostática

El trabajo realizado por una fuerza conservativa puede expresarse como la diferencia de energías potenciales entre el punto destino y el punto origen cambiado de signo, luego para la fuerza eléctrica podemos escribir

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}.$$

Para el caso de una carga fuente puntual, la expresión anterior vale

$$\Delta U = U_B - U_A = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right).$$

De las expresiones anteriores, se desprende que sólo las variaciones de energía potencial tienen sentido físico. Es conveniente, no obstante, seleccionar un punto del espacio como origen de energía potencial y asignar a una carga que esté en dicho punto una energía potencial nula. Esto nos permite referirnos a la energía potencial de una carga como la energía potencial en la posición que ocupa y referida al origen de energías potenciales. Siempre que no existan cargas fuente en el infinito, suele tomarse este lugar como origen de energías potenciales, esto es

$$U_\infty = 0,$$

ya que se considera que en este caso las cargas están lo suficientemente separadas entre sí como para que los efectos eléctricos entre ambas sean despreciables. Según esto, la energía potencial de una carga  $q$  en un punto genérico P será la diferencia de energía entre dicho punto y el origen de energías, luego podemos escribir

$$U_P - U_\infty = - \int_\infty^P \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -q \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

y como  $U_\infty = 0$ ,

$$U_P = -q \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Para un campo  $\vec{E}$  creado por una carga puntual  $q'$  resulta

$$U = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Veamos cual es el signo de  $U$  en función del signo de  $qq'$  y sus implicaciones:

- Si  $qq' < 0$  entonces  $U < 0$ .

En este supuesto la carga fuente  $q'$  ejerce una fuerza atractiva sobre la carga de prueba  $q$ . Existe por tanto una “tendencia natural” a que  $q$  se desplace desde el infinito hasta el punto destino P. El trabajo es, por tanto, realizado por la fuerza eléctrica, es decir,

$$\int_\infty^P \vec{F} \cdot d\vec{\ell} > 0.$$

- Si  $qq' > 0$  entonces  $U > 0$ .

Ahora la carga fuente  $q'$  repele a la carga de prueba  $q$ . Para llevar entonces la carga  $q$  desde el infinito hasta el punto P es necesario que actúe una fuerza externa  $\vec{F}^{\text{ext}}$ . Esta fuerza debe oponerse a la fuerza eléctrica, por tanto

$$\vec{F}^{\text{ext}} = -\vec{F}$$

y el trabajo realizado por  $\vec{F}^{\text{ext}}$  será positivo, luego

$$\int_\infty^P \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = - \int_\infty^P \vec{F} \cdot d\vec{\ell} > 0,$$

alternativamente, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es negativo, ya que

$$\int_\infty^P \vec{F} \cdot d\vec{\ell} < 0.$$

En resumen, cuando el trabajo es realizado por fuerzas externas, en contra del campo eléctrico existente, se produce un aumento en la energía potencial del sistema de cargas. Por el contrario, si el trabajo es realizado por la fuerza eléctrica, la energía potencial del sistema de cargas disminuye.

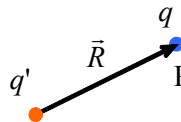


Figura 3.6: Pareja de cargas puntuales separadas una distancia  $R$ .

**Interpretación física de la energía potencial electrostática** de una carga puntual  $q$  en un punto P: es el trabajo que deben realizar las fuerzas externas para llevar la carga  $q$  desde el origen de energía potencial hasta el punto P.

**Ejemplo 1** Una carga puntual  $q' = 1C$  está situada en el origen de coordenadas. Otra carga puntual  $q = 2C$  es desplazada desde el infinito hasta el punto  $P(3, 0, 0)$ . Calcular el trabajo necesario para realizar este desplazamiento. ¿Quién realiza este trabajo, el campo o las fuerzas externas?. Razona la respuesta.

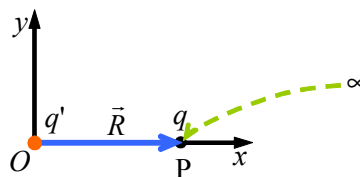


Figura 3.7:

**Solución:**

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica es

$$W_\infty^P = \int_\infty^P \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta U = -(U_P - U_\infty)$$

donde  $U_P$  es la energía potencial de la carga  $q$  en el punto P, que viene dada por

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R}$$

con  $\vec{r}' = 0$ ,  $\vec{r} = 3\hat{x}$  y  $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = 3$ . Teniendo en cuenta que  $U_\infty = 0$ , resulta

$$\begin{aligned} W_\infty^P &= -U_P = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R} \\ &= -6 \times 10^9 \quad [\text{J}], \end{aligned}$$

Es trabajo resulta negativo, por tanto lo realizan las fuerzas externas.

### 3.3 Potencial eléctrico

En el tema anterior introdujimos el campo eléctrico a partir de la fuerza coulombiana que actúa sobre una carga de prueba. Partiendo ahora de la energía potencial, introduciremos dos conceptos de gran importancia dentro de la teoría del campo eléctrico: la **diferencia de potencial eléctrico**  $\Delta V$  y el **potencial eléctrico**  $V$ .

Consideremos una carga puntual de prueba  $q$  positiva situada en el seno de un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Según hemos visto en apartados anteriores, cuando la carga  $q$  se desplaza desde un punto inicial A hasta otro punto final B, siguiendo una trayectoria arbitraria, la variación de energía potencial vale

$$\Delta U = U_B - U_A = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Introduciremos ahora el concepto de diferencia de potencial entre dos puntos  $\Delta V$  como la diferencia de energía potencia por unidad de carga positiva

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior, podemos escribir

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La unidad de diferencia de potencial en el SI es julio dividido por culombio, que se denomina voltio (V).

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}}.$$

Así pues, diremos que la diferencia de potencial entre dos puntos es de 1 V cuando las fuerzas externas deben realizar un trabajo de 1 J para trasladar una carga positiva de valor 1 C entre dichos puntos, siguiendo una trayectoria arbitraria.

Si la diferencia de potencial entre dos puntos es conocida, la diferencia de energía potencial para una carga puntual  $q$  se calcula simplemente como

$$\Delta U = q\Delta V.$$

#### Definición de potencial:

De forma análoga a la diferencia de potencial, podemos definir el potencial  $V$  en un punto P de observación como la energía potencial por unidad de carga positiva:

$$V = \frac{U}{q}$$

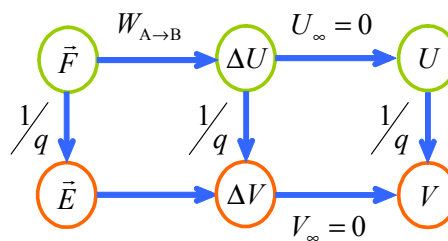


Figura 3.8: Relación conceptual entre la fuerza eléctrica, el campo, la energía potencial y el potencial.

#### Potencial debido a una carga puntual:

Según la definición de potencial anterior, el potencial creado por una carga puntual  $q'$  vale

$$V = \frac{U}{q} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R},$$

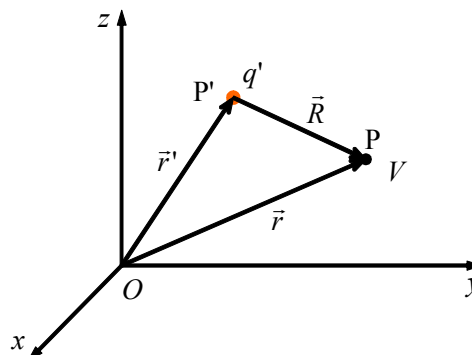


Figura 3.9: Potencial en el punto P debido a una carga puntual  $q'$  situada en el punto P'.

Teniendo en cuenta la definición de  $U$  para un campo general  $\vec{E}$ , podemos escribir el potencial en

un punto P como

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

### Interpretación física del potencial electrostático:

El potencial electrostático puede interpretarse de la siguiente manera:

**“El potencial en un punto P es el trabajo que deben realizar la fuerzas externas para trasladar una carga positiva de valor unidad desde el infinito (origen de potenciales) hasta el punto P”**

Al igual que para la diferencia de potencial, la unidad de medida del potencial en el SI es el voltio.

Análogamente al caso de la diferencia de energía potencial, la diferencia de potencial entre dos puntos A y B puede expresarse como

$$\Delta V = V_B - V_A.$$

#### 3.3.1 Superficies equipotenciales

Un campo escalar puede representarse gráficamente mediante superficies. Cada una de estas superficies representa el lugar geométrico de puntos en los cuales el campo escalar tiene el mismo valor. Si la función escalar es el potencial, las superficies así construidas se denominan **superficies equipotenciales**.

En general el potencial es función de las tres variables espaciales, por tanto las superficies equipotenciales se representan mediante la ecuación  $V(x, y, z) = V_0 = \text{cte}$ . Si estamos considerando un problema bidimensional, el potencial será sólo función de dos variables y los lugares geométricos de los puntos de igual potencial serán líneas.

El potencial no puede cambiar bruscamente en un punto ya que su valor es sólo función de la distancia a las cargas fuente. En consecuencia, las superficies equipotenciales son cerradas.

**Ejemplo 2** Calcular las superficies equipotenciales para una carga puntual. Dibujar dichas superficies así como las líneas de campo de la carga.

**Solución:**

El potencial creado por una carga puntual de valor  $q$  es

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Las superficies equipotenciales verificarán

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = V_0$$

donde  $V_0 = \text{cte}$ . Despejando ahora  $R$  se obtiene

$$R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 V_0} = \text{cte}.$$

En consecuencia, las superficies equipotenciales son esferas centradas en la posición de la carga y con radio  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 V_0}$ . Dando valores a  $V_0$  se van obteniendo las distintas esferas equipotenciales.

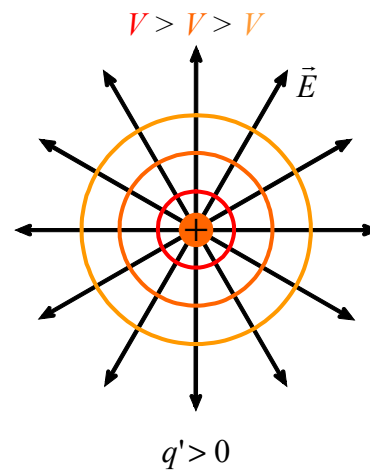


Figura 3.10: Líneas de campo y superficies equipotenciales de una carga puntual positiva y aislada.

## 3.4 Cálculo directo del potencial

### 3.4.1 Potencial debido a distribuciones discretas de carga

En apartados anteriores hemos visto que el potencial en un punto P creado por una carga puntual  $q'$

situada en el punto P' vale

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Consideraremos ahora una distribución formada por  $N$  cargas fuente. Cada una de ellas de valor  $q'_n$  y vector de posición  $\vec{r}'_n$ . El potencial que esta distribución crea en un punto P, de vector de posición  $\vec{r}$ , puede obtenerse simplemente teniendo en cuenta el potencial creado por cada carga puntual y el principio de superposición. En efecto, el potencial  $V$  creado por la distribución será la suma de los potenciales  $V_n$  creados por cada una de las cargas individuales:

$$V = \sum_{n=1}^N V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q'_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|}$$

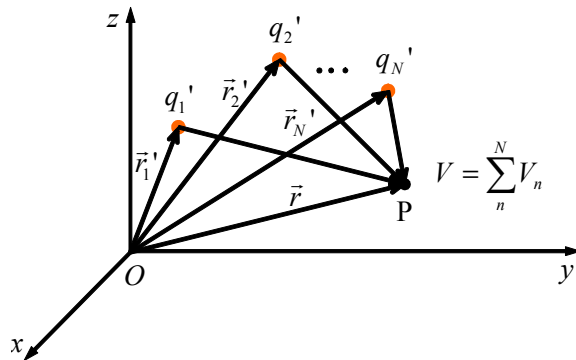


Figura 3.11: Potencial en el punto P debido a una distribución discreta de carga.

**Ejemplo 3** Calcular el potencial en el punto P de la figura, donde las cargas tienen los valores  $q'_1 = 33 \text{ nC}$ ,  $q'_2 = -51 \text{ nC}$  y  $q'_3 = 47 \text{ nC}$ , y el cuadrado tiene de lado  $\ell = 93 \text{ mm}$ .

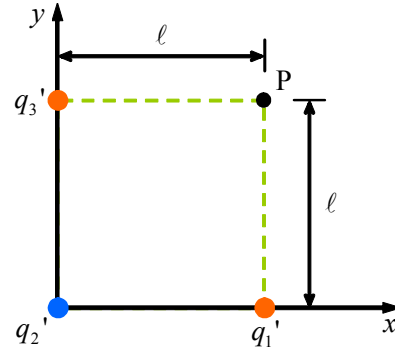


Figura 3.12: Distribución discreta de carga formada por tres cargas puntuales situadas en los vértices de un cuadrado de lado  $\ell$ .

**Solución:**

El potencial en el punto P debido a las tres cargas puntuales es:

$$V = \sum_{n=1}^3 \frac{q'_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|} + \frac{q'_2}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|} + \frac{q'_3}{|\vec{r} - \vec{r}'_3|} \right),$$

donde

$$|\vec{r} - \vec{r}'_1| = |\vec{r} - \vec{r}'_3| = \ell,$$

y

$$|\vec{r} - \vec{r}'_2| = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2}\ell,$$

por tanto

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\ell} \left( q'_1 + \frac{q'_2}{\sqrt{2}} + q'_3 \right),$$

que sustituyendo los valores numéricos resulta

$$V = \frac{9 \times 10^9}{93 \times 10^{-3}} \left( 33 - \frac{51}{\sqrt{2}} + 47 \right) \times 10^{-9} = 4252 \text{ [V]}.$$

### 3.4.2 Potencial debido a distribuciones continuas de carga

Análogamente al caso de una distribución discreta, para calcular el potencial creado por una distribución continua de carga (lineal, superficial o volumétrica) emplearemos el principio de superposición, si



bien en este caso, debido al supuesto carácter continuo de la carga, el proceso de suma debe reemplazarse por el de integración.

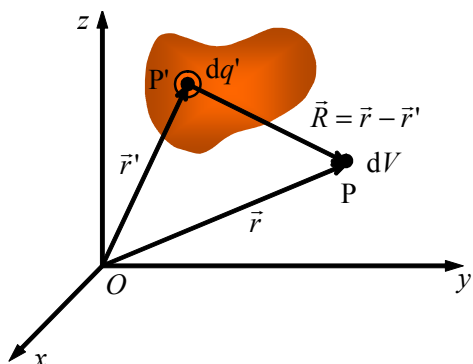


Figura 3.13: Potencial en el punto P debido a un elemento de carga  $dq'$  situado en el punto  $P'$ .

Consideremos una distribución continua de carga, como la mostrada en la figura 3.13 y dentro de ella un elemento de carga  $dq'$ , localizado en un punto arbitrario  $P'$  dentro de la distribución. El potencial  $dV$  creado por  $dq'$  en un punto de observación P cualquiera es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

#### Potencial debido a distribuciones lineales de carga:

Para el caso de una distribución lineal como la mostrada en la figura 3.14, podemos expresar  $dq'$  en función de la densidad lineal de carga como

$$dq' = \rho_\ell dl',$$

por tanto

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_\ell dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Integrando ahora a toda la curva donde exista carga fuente, obtenemos el potencial creado por toda la distribución

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'.$$

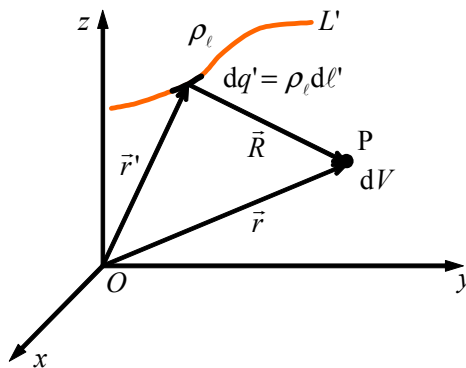


Figura 3.14: Potencial en el punto P debido a un elemento lineal de carga  $dq' = \rho_\ell dl'$ .

**Ejemplo 4** Calcular el potencial creado por un anillo de radio  $a$  cargado uniformemente con una densidad lineal de carga  $\rho_\ell$  en un punto arbitrario de su eje.

#### Solución:

Para calcular el potencial pedido emplearemos la expresión

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'.$$

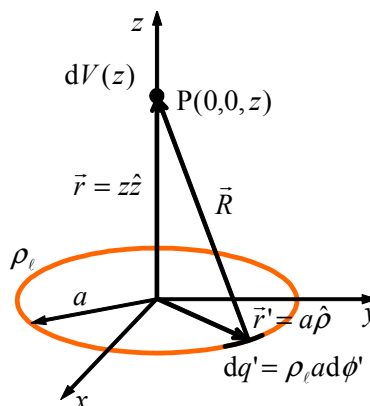


Figura 3.15: Potencial en  $P(0, 0, z)$  debido a un elemento de carga situado en un anillo cargado.

El elemento de línea  $dl'$  se corresponde con un elemento de arco, luego podemos poner

$$dl' = a d\phi',$$

y los vectores de posición valen

$$\vec{r} = z\hat{z}, \quad \vec{r}' = a\hat{\rho},$$

luego

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Sustituyendo estas cantidades en la expresión del potencial queda

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\rho_s}{\sqrt{z^2 + a^2}} \int_0^{2\pi} d\phi',$$

que integrando resulta

$$V(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{a\rho_s}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad [\text{V}].$$

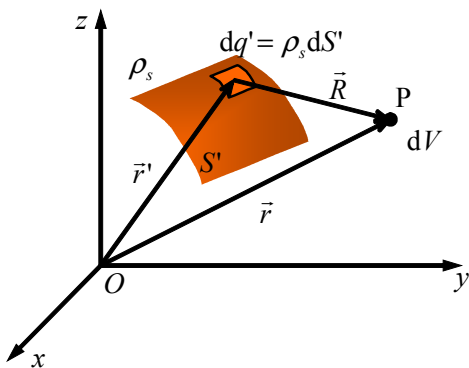


Figura 3.16: Potencial en el punto P debido a un elemento superficial de carga  $dq' = \rho_s dS'$ .

**Potencial debido a distribuciones superficiales de carga:**

En el caso de una distribución superficial de carga como la mostrada en la figura 3.16, el elemento de carga  $dq'$  se expresa, en función de la densidad superficial de carga  $\rho_s$ , como

$$dq' = \rho_s dS'.$$

Escribiendo el potencial creado por este elemento de carga como

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

e integrando a todo el área de la distribución resulta

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'.$$

**Ejemplo 5** Determinar el potencial en un punto de coordenadas  $P(0,0,z)$  situado en el eje de un disco de radio  $a$  cargado uniformemente con una densidad superficial de carga  $\rho_s$ .

**Solución:**

La expresión general para calcular el potencial creado por una distribución superficial de carga es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS',$$

donde

$$dS' = \rho' d\rho' d\phi', \quad \vec{r} = z\hat{z}, \quad \vec{r}' = \rho'\hat{\rho},$$

luego

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho'^2 + z^2}.$$

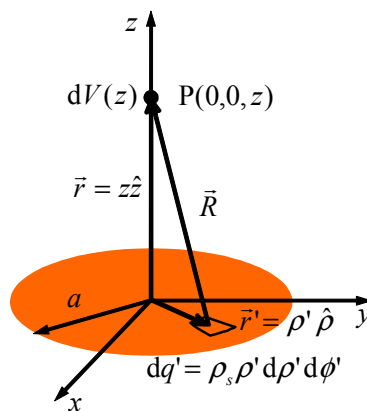


Figura 3.17: Potencial en  $P(0,0,z)$  debido a un elemento de carga situado en un disco cargado.

Para barrer todo el disco los límites de integración deberán variar entre 0 y  $a$  para el radio, y entre 0 y  $2\pi$  para el ángulo  $\phi'$ . Teniendo todo esto en cuenta el potencial resulta

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^{2\pi} d\phi' \right) \left( \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{\rho'^2 + z^2} \right)_0^a \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right). \end{aligned}$$

En esta expresión el valor de  $\sqrt{z^2}$  debe ser siempre positivo ya que físicamente representa una distancia. Por otra parte  $z$  es un punto arbitrario del eje  $z$  y por tanto puede ser positivo o negativo. Teniendo esto en cuenta podemos poner

$$\sqrt{z^2} = \begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ -z & \text{si } z < 0 \end{cases},$$

o alternativamente

$$\sqrt{z^2} = |z|,$$

Entonces la expresión para el potencial finalmente queda,

$$V(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|)$$

y en función de la carga total del disco

$$V(z) = \frac{q}{2\pi a^2 \epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|) \quad [\text{V}].$$

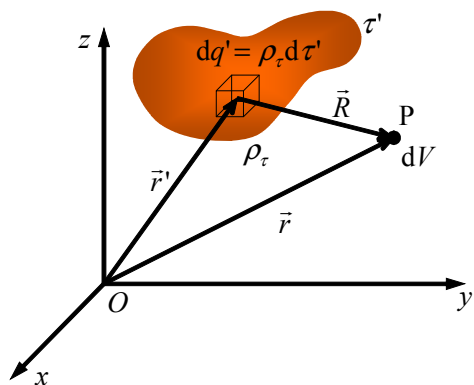


Figura 3.18: Potencial en el punto P debido a un elemento volúmico de carga  $dq' = \rho_\tau d\tau'$ .

### Potencial debido a distribuciones volúmicas de carga:

Considerando una distribución de carga, como la mostrada en la figura 3.18, contenida un volumen  $\tau'$  y caracterizada por una densidad volúmica de carga  $\rho_\tau$ , el potencial creado por un elemento de carga será

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_\tau d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

Integrando a todo el volumen ocupado por la distribución da como resultado el potencial buscado:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho_\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'.$$

## 3.5 Cálculo del potencial a partir del campo eléctrico

Según vimos en el apartado 3, podemos escribir el potencial en un punto P como

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Esta expresión permite calcular el potencial cuando el campo eléctrico se conoce previamente. Este procedimiento de cálculo del potencial se emplea cuando el problema presenta unas propiedades de simetría tales que resulta más sencillo calcular directamente el campo, mediante la ley de Gauss, que calcular directamente el potencial.

La expresión anterior nos permite calcular el potencial mediante una simple integral de línea. Ilustraremos esta idea con varios ejemplos.

**Ejemplo 6** Determinar el potencial electrostático debido a una esfera de radio  $a$ , uniformemente cargada con densidad volúmica de carga  $\rho_\tau$ . Según se obtuvo en el tema anterior aplicando la ley de Gauss, el campo eléctrico creado por esta esfera viene dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_\tau r}{3\epsilon_0} \hat{r} & \text{para } r < a \\ \frac{\rho_\tau a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{para } r > a \end{cases}.$$

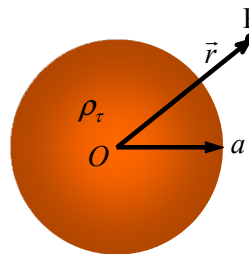


Figura 3.19: Volumen esférico cargado.

**Solución:**

Conocido el campo eléctrico, el potencial en un punto P se calcula mediante la expresión

$$V = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Como el campo eléctrico tiene una expresión distinta para puntos exteriores e interiores de la esfera, deberemos calcular el potencial, de forma independiente, para cada una de estas dos regiones.

**a) Región exterior a la esfera de carga ( $r > a$ ):**

Consideremos un punto P arbitrario situado en el exterior de la esfera de carga. Tomando el origen de potenciales en el infinito, el potencial en P se calcula mediante la expresión

$$V_{\text{ext}} = - \int_{\infty}^P \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell}$$

donde  $\vec{E}_{\text{ext}}$  es el campo eléctrico para  $r > a$ . Elegiremos como camino de integración una semirecta con dirección radial, luego  $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$ . Llamando  $r$  a la distancia del centro de la esfera al punto P, la integral anterior resulta

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}} &= - \int_{\infty}^r \frac{\rho_{\tau} a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{\rho_{\tau} a^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r -\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\rho_{\tau} a^3}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{\rho_{\tau} a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

**b) Región interior a la esfera de carga ( $r < a$ ):**

Consideremos ahora un punto P arbitrario situado a una distancia  $r < a$  del centro de la esfera. Al igual que en el cálculo anterior, tomamos el origen de potenciales en el infinito. El camino de integración será una semirecta radial que va desde el infinito hasta P. Para realizar la integral de línea debemos partirla en dos: una desde el infinito hasta  $a$  y otra desde  $a$  hasta  $r$ , luego

$$V_{\text{int}} = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^a \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} - \int_a^r \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{\ell}$$

La primera de las integrales se corresponde con el potencial en  $r = a$ , es decir

$$- \int_{\infty}^a \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = V_{\text{ext}}(a) = \frac{\rho_{\tau} a^2}{3\epsilon_0}$$

Además, teniendo en cuenta que  $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$  y sustituyendo la expresión para  $\vec{E}_{\text{int}}$ , resulta

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= V_{\text{ext}}(a) - \int_a^r \frac{\rho_{\tau} r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot dr\hat{r} \\ &= \frac{\rho_{\tau} a^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_{\tau}}{6\epsilon_0} (r^2) \Big|_a^r \\ &= \frac{\rho_{\tau} a^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_{\tau}}{6\epsilon_0} (a^2 - r^2) \\ &= \frac{\rho_{\tau}}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) \end{aligned}$$

Recopilando los resultados obtenidos, el potencial producido por la esfera cargada vale

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_{\tau}}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{para } r < a \\ \frac{\rho_{\tau} a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{para } r > a \end{cases}$$

Se observa que el potencial es continuo en  $r = a$ , ya que

$$V_{\text{int}}(a) = V_{\text{ext}}(a).$$

---

**Ejemplo 7** El campo eléctrico debido a una superficie esférica de radio  $a$  uniformemente cargada con una carga total  $Q$  viene dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{para } r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{para } r > a \end{cases}$$

Calcular la función potencial en todo punto del espacio.

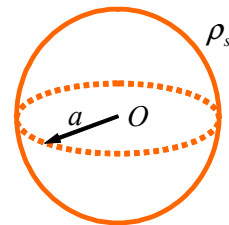


Figura 3.20: Superficie esférica cargada.

**Solución:**

El potencial en un punto P, conocido el campo eléctrico, viene dado por

$$V = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

El campo eléctrico tiene distinta expresión dentro y fuera de la esfera, por tanto consideraremos cada caso por separado.

**a) Región exterior a la superficie de carga ( $r > a$ ):**

Al igual que en ejemplo anterior, tomando  $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$ , tenemos

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}} &= - \int_{\infty}^P \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

**b) Región interior a la superficie de carga ( $r < a$ ):**

El potencial en un punto arbitrario del interior de la esfera vale

$$V_{\text{int}} = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^a \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} - \int_a^r \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{\ell}$$

Teniendo en cuenta que

$$- \int_{\infty}^a \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = V_{\text{ext}}(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

resulta

$$V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \int_a^r \vec{0} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Por tanto, el potencial debido a una superficie esférica vale

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & \text{para } r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{para } r \geq a. \end{cases}$$

Se observa que el potencial es constante en el interior de la esfera y continuo en  $r = a$ .

**Ejemplo 8** Calcular el potencial debido a un plano infinito que coincide con el plano  $x$ - $y$  y tiene una densidad de carga uniforme  $\rho_s$  sabiendo que el campo eléctrico creado por dicho plano vale

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}$$

Calcular la función potencial en todo punto del espacio.

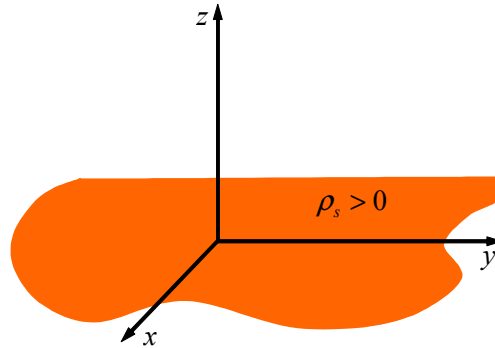


Figura 3.21: Plano cargado.

**Solución:**

Al tratarse de una distribución de carga de tamaño no finito, no podemos tomar el origen de potenciales en el infinito. En estos casos, el origen de potenciales se toma en un punto fijo arbitrario. En este problema tomaremos el origen de potenciales en el origen de coordenadas, luego

$$V(0) = 0.$$

Teniendo esto en cuenta, calcularemos el potencial mediante la expresión

$$V = - \int_{\text{origen}}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

**a) Región ( $z > 0$ ):**

$$V = - \int_0^z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} \cdot dz\hat{z} = - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (z)_0^z = - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} z$$

**b) Región ( $z < 0$ ):**

$$V = - \int_0^z - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} \cdot dz\hat{z} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (z)_0^z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} z$$

Teniendo en cuenta que

$$|z| = \begin{cases} z & \text{para } z > 0 \\ -z & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

podemos expresar el potencial debido a un plano infinito como

$$V(z) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}|z| \quad \forall z$$

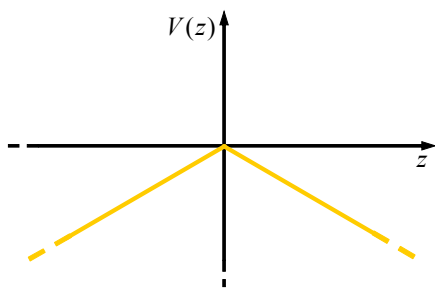


Figura 3.22: Variación con la distancia del potencial eléctrico creado por un plano cargado situado en  $z = 0$ .

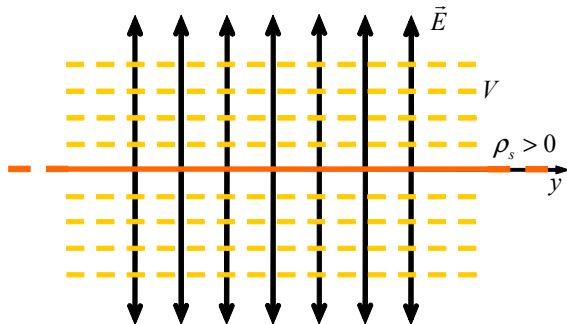


Figura 3.23: Líneas de campo eléctrico y superficies equipotenciales creadas por un plano cargado.

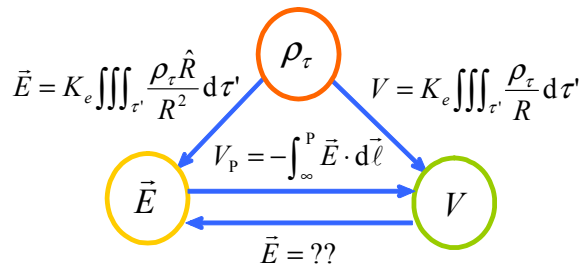


Figura 3.24: Caminos para el cálculo del campo y del potencial utilizando expresiones de tipo integral. El problema del cálculo del campo a partir del potencial se trata en el apartado 3.6.

### 3.6 Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial. Gradiente del potencial

El cálculo del potencial es, en general, más sencillo que el cálculo del campo eléctrico. Esto se debe a que el potencial es un campo escalar, mientras que el campo eléctrico es un campo vectorial. Resulta, por tanto, de gran interés obtener una expresión que nos permita calcular el campo eléctrico creado por una distribución de carga a partir del potencial. El procedimiento inverso, el cálculo del potencial a partir del campo, ha sido ya tratado en este tema. En concreto, la diferencia de potencial entre dos puntos se calcula a partir de campo eléctrico como

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

que es una expresión de tipo integral, ya que aparece la integral de línea del campo. Para calcular el campo en función del potencial deberemos despejar  $\vec{E}$ , lo que nos conducirá a una expresión en la que aparecerán derivadas, es decir, a una expresión de tipo diferencial.

Para obtener la forma diferencial buscada comenzaremos haciendo un estudio de la expresión integral anterior para varios casos particulares.

Supondremos en primer lugar que el camino de integración es paralelo al eje  $x$  con los puntos inicial y final muy próximos, tal como se muestra en la figura 3.25. Podemos expresar los vectores de

posición a dichos puntos como

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}, \\ \vec{r}_B &= (x + \Delta x) \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}.\end{aligned}$$

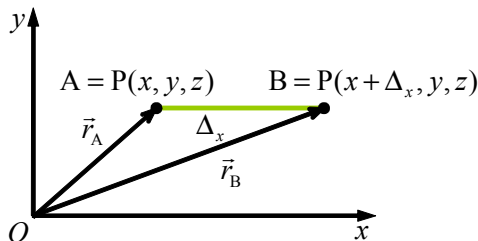


Figura 3.25: Desplazamiento finito según la dirección  $x$ .

El diferencial de longitud para este camino será  $d\vec{l} = dx \hat{x}$ , y el campo eléctrico se expresa en coordenadas cartesianas como

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

luego

$$\begin{aligned}& V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) \\ &= - \int_x^{x+\Delta x} (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) \cdot dx \hat{x} \\ &= - \int_x^{x+\Delta x} E_x dx.\end{aligned}$$

Resolveremos esta integral de forma aproximada. Para ello, teniendo en cuenta que los puntos inicial y final están muy cercanos, supondremos que el campo es constante a lo largo del camino de integración, lo cual nos permitirá sacarlo fuera de la integral obteniendo

$$V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) \simeq -E_x \Delta x.$$

Obsérvese que, en la expresión anterior, hemos sustituido el símbolo de igualdad por el símbolo “ $\simeq$ ”, lo cual indica que la expresión es aproximada. Despejando ahora  $E_x$  tenemos

$$E_x \simeq - \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}$$

Podemos ahora recobrar la igualdad en la expresión anterior haciendo que los puntos inicial y final

del camino de integración estén infinitamente próximos. Para ello simplemente tendremos que calcular el límite de la expresión anterior cuando la longitud del camino tiende a cero, esto es

$$E_x = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right].$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha (salvo el signo menos) es por definición la derivada parcial de  $V$  respecto de la coordenada  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right] \equiv \frac{\partial V}{\partial x},$$

luego hemos llegado al resultado

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Esta expresión nos permite calcular la componente  $x$  del campo eléctrico a partir del potencial.

Repetiendo el proceso anterior para caminos de integración paralelos los ejes  $y$  y  $z$ , llegamos a las siguientes expresiones, respectivamente

$$E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Podemos entonces escribir el campo eléctrico en función del potencial, en forma vectorial, como

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right).$$

Esta expresión puede escribirse de forma más compacta empleando el operador vectorial nabla, que en coordenadas rectangulares se define como

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z},$$

con lo cual

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Por tanto, el campo eléctrico se obtiene aplicando el operador nabla al potencial y cambiando el signo del resultado. Como ya sabemos, el potencial eléctrico es un campo escalar.

La aplicación del operador nabla a un campo escalar recibe el nombre de **gradiente** del escalar y suele escribirse como  $\text{grad } V$ . Diremos entonces que el campo eléctrico es el gradiente del potencial cambiado de signo.

**Ejemplo 9** Calcular el campo eléctrico en el eje de un anillo de radio  $a$  con densidad de carga uniforme  $\rho_\ell$  a partir de su potencial

$$V(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{a\rho_\ell}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

Repetir el ejercicio para el caso de un disco de radio  $a$  y densidad superficial  $\rho_s$  constante, cuyo potencial en el eje vale

$$V(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right)$$

**Solución:**

Debido a la simetría, las componentes  $E_x$  y  $E_y$  del campo eléctrico son nulas. Para obtener  $E_z$  basta evaluar la expresión

$$E_z = -\frac{dV}{dz}.$$

Para el anillo, resulta

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{d}{dz} \left( \frac{a\rho_\ell}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \\ &= -\frac{a\rho_\ell}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \left[ (z^2 + a^2)^{-1/2} \right] \\ &= \frac{a\rho_\ell}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} (z^2 + a^2)^{-3/2} 2z \\ &= \frac{a\rho_\ell}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Para el disco

$$E_z = -\frac{d}{dz} \left[ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right) \right]$$

La función  $|z|$  es discontinua en  $z = 0$ , por lo que calcularemos  $E_z$  para  $z > 0$  y para  $z < 0$ .

Para  $z > 0$

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{d}{dz} \left[ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{a^2 + z^2} - z \right) \right] \\ &= -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Para  $z < 0$

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{d}{dz} \left[ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{a^2 + z^2} + z \right) \right] \\ &= -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

### 3.6.1 Significado del gradiente

Como ya conocemos, la diferencia de potencial entre dos puntos se expresa en función del campo como

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

Escribiendo el primer miembro en la forma

$$V_B - V_A = \int_A^B dV,$$

Podemos poner entonces

$$\int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

Igualando los integrandos resulta

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{E} = -\nabla V$ , la relación anterior se transforma en

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{\ell}.$$

Considérese ahora un punto localizado en la superficie equipotencial  $V(x, y, z) = V_1$ , tal como se muestra en la figura 3.26. Mediante un desplazamiento  $d\vec{\ell}_1$ , nos movemos desde este punto a otro punto localizado en la misma superficie equipotencial. Al realizarse el desplazamiento sobre una superficie equipotencial, no hay variación en el valor del potencial, esto es,  $dV = 0$ . Entonces

$$\nabla V \cdot d\vec{\ell}_1 = 0,$$

por tanto  $\nabla V$  y  $d\vec{\ell}_1$  son vectores perpendiculares, lo que significa que el gradiente es un vector perpendicular a la superficie equipotencial. Además, como  $\vec{E} = -\nabla V$  también se verifica

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell}_1 = 0,$$

es decir, el campo eléctrico también es perpendicular a las superficies equipotenciales.



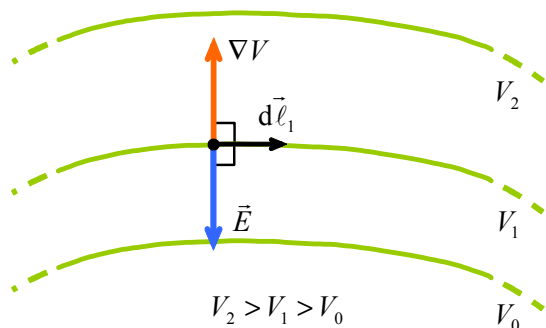


Figura 3.26: Desplazamiento sobre una superficie equipotencial.

Consideremos ahora, tal como se ilustra en la figura 3.27, varios desplazamientos  $d\vec{\ell}'$ ,  $d\vec{\ell}''$ ,  $d\vec{\ell}'''$  en direcciones distintas, pero de igual longitud, esto es,

$$|d\vec{\ell}'| = |d\vec{\ell}''| = |d\vec{\ell}''| = d\ell_0.$$

El cambio en el potencial debido a estos desplazamientos es

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{\ell} = |\nabla V| d\ell_0 \cos \alpha,$$

siendo  $\alpha$  el ángulo entre  $\nabla V$  y  $d\vec{\ell}$ . El valor de  $dV$  será distinto para cada desplazamiento y será máximo cuando  $\alpha = 0$ , es decir, cuando  $\nabla V$  y  $d\vec{\ell}$  sean paralelos. Esto significa que el gradiente tiene la dirección según la cual el escalar tiene una mayor variación, o en otras palabras, el gradiente es la derivada direccional máxima. Por otra parte, como  $\vec{E} = -\nabla V$  la dirección de  $\vec{E}$  es aquella según la cual el potencial disminuye más rápidamente.

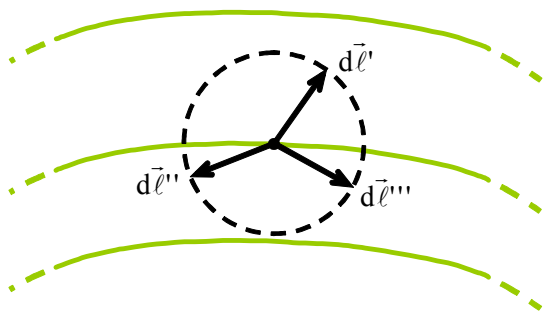


Figura 3.27: Desplazamientos de igual longitud y distinta dirección.

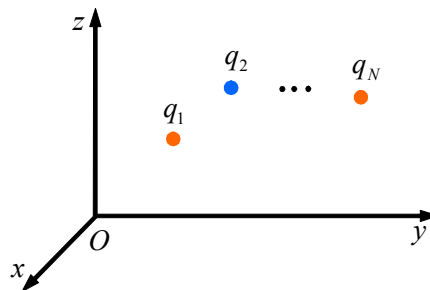


Figura 3.28: Distribución discreta de cargas.

### 3.7 Energía electrostática de formación de distribuciones de carga

En apartados anteriores determinamos la energía potencial de una carga puntual de prueba en un campo electrostático. Nuestro propósito ahora es calcular la energía de formación de una distribución de carga, lo cual puede interpretarse como la cantidad de trabajo que deben hacer las fuerzas externas para formar la distribución de carga. El origen de este trabajo radica en que las fuerzas externas deben trasladar la carga desde el origen de energías potenciales (el infinito) hasta la posición que ocupa dentro de la distribución.

#### 3.7.1 Energía de formación de una distribución discreta de carga

Formaremos una distribución discreta de tres cargas trayendo cada una de las cargas individuales desde el infinito. Posteriormente extenderemos la expresión obtenida al caso de  $N$  cargas mediante simple inducción.

Para traer la primera carga  $q'_1$  no es necesario realizar ningún trabajo, ya que no existe ningún campo que se oponga al desplazamiento de  $q'_1$ . Por tanto la energía  $U_1$  de la carga  $q_1$  en ausencia de las demás cargas es nula:

$$U_1 = 0.$$

Para traer otra carga  $q'_2$  desde el infinito hasta un punto  $P_2$  localizado a una distancia  $R_{12}$  de  $q'_1$  será necesario hacer un trabajo en contra del campo creado por  $q'_1$ . Según hemos visto a lo largo de este

tema, ese trabajo aumenta la energía del sistema en una cantidad

$$U_2 = q'_2 V_{12} = q'_2 \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}},$$

lo cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} q'_1 \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}} + \frac{1}{2} q'_2 \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} \\ &= \frac{1}{2} q'_1 V_{21} + \frac{1}{2} q'_2 V_{12}. \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $R_{12} = R_{21}$ .

Si traemos una tercera carga puntual  $q'_3$  hasta el punto  $P_3$  localizado a distancias  $R_{13}$  y  $R_{23}$  de  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente, la energía adicional del sistema será

$$U_3 = q'_3 (V_{13} + V_{23}) = q'_3 \left( \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \right),$$

que expresaremos como

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{1}{2} q'_1 \frac{q'_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} + \frac{1}{2} q'_3 \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} \\ &\quad + \frac{1}{2} q'_2 \frac{q'_3}{4\pi\epsilon_0 R_{32}} + \frac{1}{2} q'_3 \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} \\ &= \frac{1}{2} q'_1 V_{31} + \frac{1}{2} q'_3 V_{13} + \frac{1}{2} q'_2 V_{32} + \frac{1}{2} q'_3 V_{23}. \end{aligned}$$

La energía total del sistema de cargas será

$$\begin{aligned} U_e &= U_2 + U_3 \\ &= \frac{1}{2} q'_1 V_{21} + \frac{1}{2} q'_2 V_{12} + \frac{1}{2} q'_1 V_{31} \\ &\quad + \frac{1}{2} q'_3 V_{13} + \frac{1}{2} q'_2 V_{32} + \frac{1}{2} q'_3 V_{23}, \end{aligned}$$

que puede organizarse como

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} q'_1 (V_{21} + V_{31}) \\ &\quad + \frac{1}{2} q'_2 (V_{12} + V_{32}) + \frac{1}{2} q'_3 (V_{13} + V_{23}) \end{aligned}$$

o alternativamente

$$U_e = \frac{1}{2} q'_1 V_1 + \frac{1}{2} q'_2 V_2 + \frac{1}{2} q'_3 V_3 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 q'_n V_n$$

donde  $V_1$  representa el potencial creado, en la posición de  $q'_1$ , por el resto de las cargas de la distribución. Los potenciales  $V_2$  y  $V_3$  se definen análogamente.

Si en vez de tres, trajéramos  $N$  cargas puntuales desde el infinito, la energía de la distribución resultante sería

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N q'_n V_n.$$

**Ejemplo 10** Calcular la energía electrostática de una distribución de carga formada por tres cargas puntuales de  $q'_1 = 10\mu\text{C}$ ,  $q'_2 = 15\mu\text{C}$  y  $q'_3 = -5\mu\text{C}$  situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $\ell = 10\text{cm}$ .

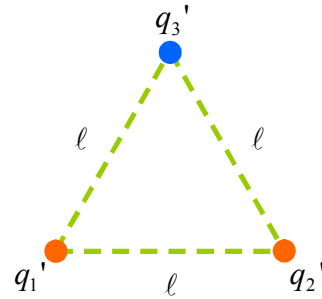


Figura 3.29: Distribución discreta de carga formada por tres cargas situadas en los vértices de un triángulo de lado  $\ell$ .

#### Solución:

Resolveremos este problema por dos caminos diferentes: en primer lugar lo haremos calculando el trabajo necesario para traer cada una de las cargas desde el infinito (1), y posteriormente lo haremos aplicando la fórmula directamente (2).

1. Para traer la carga  $q_1$  hasta su posición en ausencia de las demás cargas no es necesario realizar ningún trabajo, luego  $W_1 = 0$ .

El trabajo necesario para traer  $q_2$  en presencia de  $q_1$  será

$$W_2 = q_2 V_{12} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 \ell}.$$

Por último, el trabajo necesario para traer  $q_3$  en presencia de  $q_1$  y de  $q_2$  es

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 V_{13} + q_3 V_{23} \\ &= \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} = \frac{q_3 (q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 \ell}, \end{aligned}$$

La energía de la distribución será igual al trabajo total realizado, luego

$$U_e = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\ell}(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3),$$

que sustituyendo valores numéricos resulta

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{9 \times 10^9}{10^{-1}} \times 10^{-12} \\ &\quad \times (10 \times 15 - 10 \times 5 - 15 \times 5) \\ &= \boxed{2.25 \text{ [J]}.} \end{aligned}$$

2. Aplicando la fórmula directamente tenemos

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V_i = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3),$$

donde  $V_i$  es el potencial en la posición de  $q_i$  creado por el resto de las cargas. Estos potenciales valen

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} = \frac{(q_2 + q_3)}{4\pi\epsilon_0\ell} \\ &= \frac{9 \times 10^9}{10^{-1}} \times 10^{-6} \times (15 - 5) \\ &= 9 \times 10^5 \text{ [V]}, \\ V_2 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{32}} = \frac{(q_1 + q_3)}{4\pi\epsilon_0\ell} \\ &= \frac{9 \times 10^9}{10^{-1}} \times 10^{-6} \times (10 - 5) \\ &= 4.5 \times 10^5 \text{ [V]}, \\ V_3 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{23}} = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0\ell} \\ &= \frac{9 \times 10^9}{10^{-1}} \times 10^{-6} \times (15 + 10) \\ &= 22.5 \times 10^5 \text{ [V]}. \end{aligned}$$

La energía total resulta

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3) \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{-6} \\ &\quad \times (10 \times 9 + 15 \times 4.5 - 5 \times 22.5) \times 10^5 \\ &= 2.25 \text{ [J]}. \end{aligned}$$

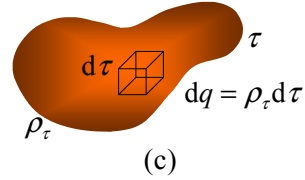
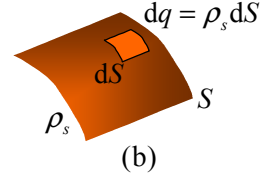
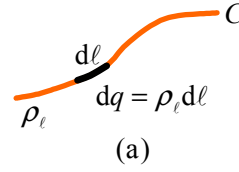


Figura 3.30: Distribuciones discretas de carga. (a) lineal, (b) superficial y (c) volúmica.

### 3.7.2 Energía de formación de distribuciones continuas de carga

El proceso que debemos seguir para formar una distribución continua de carga es análogo al realizado en el caso de la distribución discreta. La única diferencia es que, en este caso, traeremos del infinito elementos de carga  $\Delta q'_n$ , en vez de cargas puntuales. Podemos entonces adaptar la expresión obtenida para cargas puntuales al caso distribuciones continuas:

$$U_e = \lim_{\substack{\Delta q'_n \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \Delta q'_n V_n \right) = \frac{1}{2} \int V dq'.$$

Escribiremos ahora esta fórmula según se trate de distribuciones lineales, superficiales o volúmicas.

#### Distribuciones lineales:

En este caso  $dq' = \rho_\ell d\ell'$ , luego

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{C'} \rho_\ell V d\ell'.$$

**Distribuciones superficiales:**

Ahora  $dq' = \rho_s dS'$ , por tanto

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{S'} \rho_s V dS'$$

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq a \end{cases}$$

**Distribuciones volúmicas:**

En una distribución volúmica  $dq' = \rho_\tau d\tau$ , podemos entonces escribir la energía como

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\tau'} \rho_\tau V d\tau'$$

En los casos anteriores las integrales se han extendido a la región del espacio donde existe carga, sin embargo, si fuera conveniente puede integrarse a todo el espacio, ya que fuera de la distribución se supone que no hay carga y por tanto la contribución de estas zonas a la integral es nula.

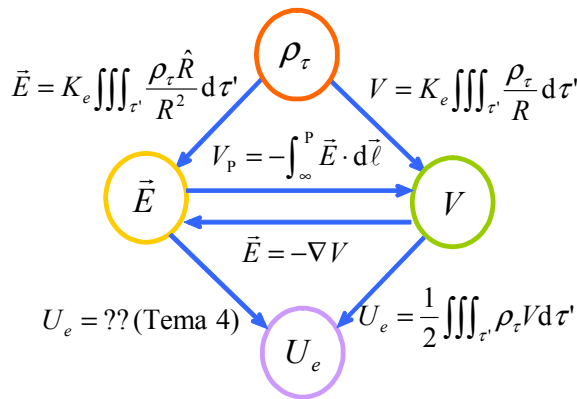


Figura 3.31: Caminos para el cálculo del campo, el potencial y la energía. La forma de calcular la energía en función del campo se aborda en el siguiente tema.

**Ejemplo 11** Determinar la energía de formación de una distribución uniforme de carga en forma de esfera de radio  $a$  y de carga total  $Q$ . Suponer que el potencial es conocido.

**Solución:**

El potencial creado por una esfera cargada se determinó en un ejemplo anterior; su valor es:

La energía potencial de esta distribución será

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{esfera}} \rho_\tau V d\tau,$$

donde  $\rho_\tau = \text{cte}$  y se puede sacar de la integral. Además, el potencial sólo depende de la variable  $r$ , por tanto podemos tomar

$$d\tau = 4\pi r^2 dr,$$

e integrar a lo largo del radio, luego

$$U_e = \frac{\rho_\tau}{2} \int_0^a V 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_\tau Q}{4\epsilon_0 a} \int_0^a \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr.$$

Integrando resulta

$$U_e = \frac{\rho_\tau Q}{4\epsilon_0 a} \left(r^3 - \frac{r^5}{5a^2}\right)_0^a = \frac{\rho_\tau Q a^2}{5\epsilon_0}.$$

Teniendo en cuenta ahora que  $\rho_\tau = \frac{3Q}{4\pi a^3}$  resulta

$$U_e = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad [\text{J}].$$

## 3.8 ¿Quién fue quién en Electromagnetismo?.

### 3.8.1 James Clerk Maxwell

James Clerk. Maxwell (Edimburgo, Escocia, 13 de junio de 1831 – Cambridge, Inglaterra, 5 de noviembre de 1879)<sup>2</sup>. Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica. Nació en el seno de una familia escocesa de la clase media. Con dieciséis años ingresó en la universidad de Edimburgo, y en 1850 pasó a la Universidad de Cambridge donde se graduó cuatro años más tarde. En 1856, fue nombrado

<sup>2</sup>[http://es.wikipedia.org/wiki/James\\_Clerk\\_Maxwell](http://es.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)  
<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/maxwell.htm>

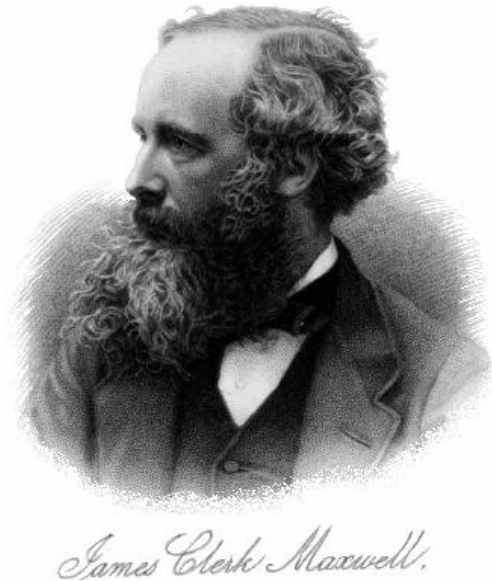


Figura 3.32: James C. Maxwell (1831-1879).

profesor de filosofía natural en el Marischal College de Aberdeen. Dos años después se casó con Katherine Mary Dewar.

En 1860 obtuvo el puesto de profesor de filosofía natural en el King's College de Londres. En esta época inició la etapa más fructífera de su carrera, e ingresó en la Royal Society (1861). En 1871 fue nombrado director del Cavendish Laboratory.

Sus aportaciones al campo del electromagnetismo lo sitúan entre los grandes científicos de la historia. Desarrolló la teoría electromagnética clásica, sintetizando en sus célebres ecuaciones todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad y magnetismo en una teoría consistente. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético.

Aplicó el análisis estadístico a la interpretación de la teoría cinética de los gases, con la denominada función de distribución de Maxwell-Boltzmann. Justificó las hipótesis de Avogadro y de Ampère; demostró la relación directa entre la viscosidad de un gas y su temperatura absoluta, y enunció la ley de equipartición de la energía. Descubrió la birrefringencia temporal de los cuerpos elásticos translúcidos sometidos a tensiones mecánicas y elabo-

ró una teoría satisfactoria sobre la percepción cromática, desarrollando los fundamentos de la fotografía tricolor.

Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX.