

# Índice General

<b>4 Campos electrostáticos en medios materiales <sup>1</sup></b>	<b>2</b>
4.1 Introducción . . . . .	2
4.2 Conductores en equilibrio electrostático . . . . .	2
4.3 Conductores con cavidades: apantallamiento electrostático . . . . .	9
4.4 Capacidad y condensadores . . . . .	12
4.4.1 Capacidad de un conductor . . . . .	12
4.4.2 Condensadores . . . . .	13
4.4.3 Asociación de condensadores . . . . .	16
4.5 Energía de un condensador . . . . .	16
4.6 Energía en función del campo eléctrico . . . . .	17
4.7 Medios dieléctricos. Consideraciones generales . . . . .	18
4.8 Experimento de Faraday . . . . .	20
4.9 Interpretación del experimento de Faraday . . . . .	20
4.9.1 Densidad de carga de polarización . . . . .	21
4.9.2 Vectores polarización y desplazamiento. Susceptibilidad y permitividad dieléctricas	22
4.10 Diseño de condensadores . . . . .	23
4.11 Ley de Gauss en medios dieléctricos . . . . .	24
4.12 Energía eléctrica en problemas con dieléctricos . . . . .	26

---

<sup>1</sup>Versión 2010

## Tema 4

# Campos electrostáticos en medios materiales <sup>1</sup>

### 4.1 Introducción

Hasta ahora hemos estudiado el campo eléctrico y el potencial suponiendo que las cargas estaban en el vacío. En este tema estudiaremos que ocurre cuando tenemos medios materiales.

Históricamente, Gilbert no pudo electrizar por frotamiento algunos materiales. Posteriormente, Gray encontró que estos materiales conducían las cargas eléctricas y clasificó todos los materiales en dos grupos: conductores y aislantes (también llamados dieléctricos)

Un material conductor es aquel cuerpo que tiene en su interior gran cantidad de **carga libre** (electrones) que puede moverse libremente por su interior. Los metales son un ejemplo de buen conductor. En un metal los electrones de las capas externas de los átomos están pocos atraídos por los núcleos, ya que están apantallados por los electrones de las capas internas, en consecuencia los electrones externos son compartidos por todos los átomos y se mueven por todo el conductor.

Los dieléctricos tienen los electrones fuertemente ligados a los núcleos, de manera que sólo pueden hacer pequeños desplazamientos en torno a sus posiciones de equilibrio. A la carga eléctrica que tiene estas condiciones se la llama **carga ligada o de polarización**.

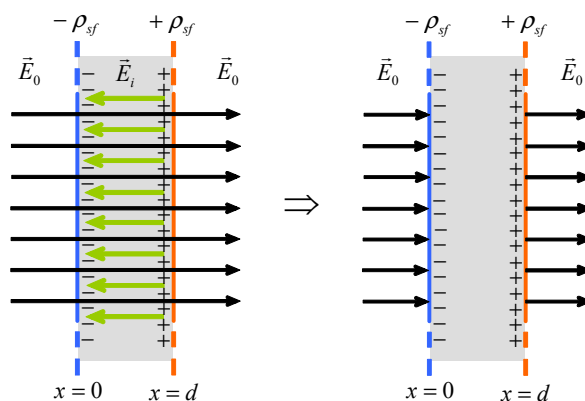


Figura 4.1: Equilibrio electrostático.

### 4.2 Conductores en equilibrio electrostático

#### Concepto de equilibrio electrostático:

Consideremos una lámina conductora eléctricamente neutra. Al colocarla en una región del espacio en la que exista un campo eléctrico aplicado  $\vec{E}_0$ , tal como se muestra en la figura 4.1, los electrones se verán sometidos a una fuerza eléctrica que tiende a acumularlos en la pared  $x = 0$ . A su vez, en la pared  $x = d$ , aparecerá un exceso de carga positiva debida al movimiento de electrones hacia la izquierda. Por tanto, el campo  $\vec{E}_0$  produce una separación de cargas o polarización del conductor. Como consecuencia, dentro del conductor aparece un campo eléctrico  $\vec{E}_i$  que se opone a  $\vec{E}_0$ . El proce-

so de separación de cargas termina cuando ambos campos se equilibran, es decir, cuando  $\vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$ . A partir de este momento el campo eléctrico total dentro del conductor es nulo, cesa el movimiento de cargas y se dice que el conductor está en **equilibrio electrostático**.

El tiempo necesario para alcanzar el equilibrio electrostático depende del tipo de conductor. Para los buenos conductores, como es el caso de los metales, este tiempo es del orden de  $10^{-16}$  s.

### Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático:

Un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

1. “El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo”

Esta propiedad se deriva directamente del concepto de equilibrio electrostático introducido anteriormente. No obstante, podemos llegar a ella mediante el siguiente razonamiento. Supongamos un conductor en equilibrio electrostático. Si el campo eléctrico no fuera nulo en su interior, las cargas libres se acelerarían por la acción de dicho campo. En consecuencia, las cargas se moverían y por tanto no estaríamos en equilibrio electrostático, lo cual entra en contradicción con la suposición de partida. Esto nos permite concluir que el campo eléctrico debe ser nulo.

2. “Si un conductor tiene exceso de carga, ésta se encuentra distribuida en su superficie en forma de una densidad superficial de carga  $\rho_s$ ”

Aplicaremos la ley de Gauss tomando como gaussiana una superficie  $S$  situada en el interior del conductor y muy próxima a la superficie de éste, como se ilustra en la figura 4.2.

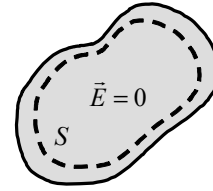


Figura 4.2: Superficie gaussiana interior a un conductor en equilibrio.

Al ser el campo eléctrico nulo, resulta

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \implies Q_{\text{enc}} = 0,$$

por tanto, no habrá carga neta en el interior del conductor. Toda la carga en exceso estará en la superficie.

3. “El campo eléctrico en el exterior, justo en la superficie, de un conductor en equilibrio electrostático es perpendicular a la superficie y tiene un valor  $\rho_s/\epsilon_0$ ”

Esta propiedad tiene dos partes, veamos primero que el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie. Para ello, supondremos inicialmente que el campo eléctrico en un punto de la superficie del conductor tiene dirección arbitraria, tal como se muestra en la figura 4.3

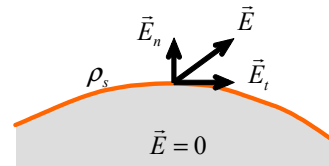


Figura 4.3: Campo eléctrico en la superficie de un conductor en equilibrio.

Podemos entonces expresarlo como  $\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_t$ , donde  $\vec{E}_n$  es la componente normal a la superficie y  $\vec{E}_t$  la componente tangencial. Ésta última debe ser nula, ya que de lo contrario las cargas se moverían por la superficie del conductor y no estaríamos en equilibrio electrostático, por tanto  $\vec{E} = \vec{E}_n$ .

El valor del campo eléctrico en la superficie del conductor puede obtenerse aplicando la ley de

Gauss en un cilindro de base muy pequeña  $\Delta S$  y altura, como se muestra en la figura 4.4.

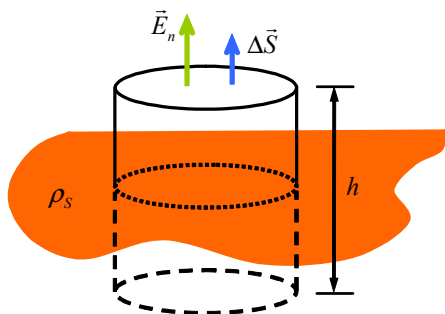


Figura 4.4: Cilindro gaussiano con su mitad inferior inmersa en un conductor en equilibrio.

No habrá flujo por la base inferior, ya que está en el interior del conductor. Además, haciendo que  $h$  tienda a cero tampoco tendremos flujo por la superficie lateral, ya que el campo es normal a la superficie del conductor. Entonces

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n \Delta S = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_0},$$

de donde

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}.$$

Este resultado indica que el valor del campo eléctrico en un punto de la superficie de un conductor es proporcional a la densidad de carga superficial que exista en dicho punto.

4. “**Todos los puntos de un conductor en equilibrio electrostático están al mismo potencial**”

Tomemos dos puntos,  $A$  y  $B$ , en el conductor, tal como se ilustra en la figura 4.5.

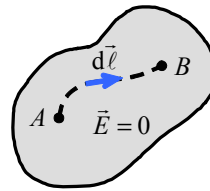


Figura 4.5: Camino arbitrario entre los puntos  $A$  y  $B$  situados en el interior de un conductor en equilibrio.

La diferencia de potencial entre estos dos puntos será

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Dentro del conductor el campo es nulo, luego

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{0} \cdot d\vec{\ell} = 0 \implies V_A = V_B.$$

Por tanto, los puntos  $A$  y  $B$  están al mismo potencial. Al ser estos puntos arbitrarios, podemos decir que todo el conductor es un volumen equipotencial y, en particular, su superficie es equipotencial.

5. “**En un conductor de forma irregular, cargado y en equilibrio electrostático, la carga tiende a acumularse en las zonas de menor radio de curvatura**”

En consecuencia, el campo eléctrico en la superficie de un conductor cargado es también más intenso en las puntas, haciendo que, en ocasiones, la carga abandone el conductor dando lugar a la formación de **descargas de arco**. Esta propiedad se ilustra en la figura 4.6.

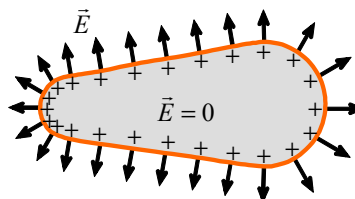


Figura 4.6: Acumulación de la carga en las puntas de un conductor en equilibrio.

A continuación veremos dos ejemplos que ilustran las propiedades anteriores. En concreto, el segundo de ellos se hace referencia a la distribución de carga y el campo en conductores de forma irregular.

---

**Ejemplo 1** Una esfera conductora en equilibrio electrostático, aislada y de radio  $a$  tiene carga neta  $Q$ . Calcular el potencial y el campo dentro y fuera de la esfera.

**Solución:**

Por tratarse de un conductor en equilibrio electrostático, el campo eléctrico en el interior de la esfera es nulo y toda la carga  $Q$  está distribuida en la superficie. Además, por ser la esfera una figura geométrica con radio de curvatura constante y estar aislada, la carga está uniformemente distribuida. En efecto, la densidad de carga vale

$$\rho_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} = \text{cte.}$$

Al existir simetría esférica, podemos calcular el campo  $\vec{E}$ , en el exterior de la esfera, aplicando la ley de Gauss,  $\Phi_e = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ .

Según se discutió en temas anteriores, en estos casos, el campo eléctrico es sólo función de la distancia radial y tiene dirección también radial, luego  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ . Además, tomando como superficie gaussiana una esfera de radio  $r$  (arbitrario, pero constante), el elemento de superficie tiene también dirección radial,  $d\vec{S} = dS\hat{r}$ .

Teniendo todo esto en cuenta, el flujo eléctrico, a través de la superficie gaussiana, resulta

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2.$$

La carga encerrada por la gaussiana es toda la carga de la esfera, esto es,  $Q_{\text{enc}} = Q$ . Sustituyendo los dos últimos resultados en la expresión de la ley de Gauss, despejando el campo eléctrico y añadiendo la dirección, se obtiene

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r \geq a.$$

Calcularemos ahora el potencial a partir del campo eléctrico. Para ello, tomaremos el origen de potenciales en el infinito, luego

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Tomado  $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$ . Para calcular el potencial debemos considerar por separado los casos  $r \geq a$  y  $r < a$ :

- Caso  $r \geq a$ :

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

- Caso  $r < a$ :

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{\infty}^r E dr \\ &= - \int_{\infty}^a E_{(r \geq a)} dr - \int_a^r E_{(r < a)} dr \end{aligned}$$

La primera integral es idéntica a la calculada en el caso anterior con  $r = a$ . La segunda integral es nula, ya que  $E_{(r < a)} = 0$ . Por tanto, como es de esperar el potencial de la esfera conductora es constante y de valor igual al potencial en la superficie

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad r \leq a.$$

En la figura 4.7 se muestran las líneas de campo eléctrico debidas a una esfera con carga positiva.

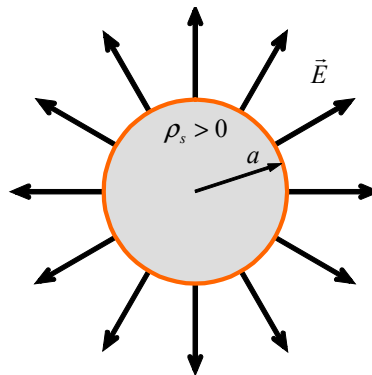


Figura 4.7: Líneas de campo eléctrico debidas a una esfera conductora cargada positivamente.

---

---

**Ejemplo 2** Dos esferas conductoras de radios  $a$  y  $b$  ( $a > b$ ) están separadas una distancia entre sus centros  $d \gg a + b$ . Se deposita una carga sobre una de las esferas y luego se conectan entre sí mediante un hilo conductor.

a) ¿Cuál es el cociente de las cargas sobre cada esfera,  $Q_1$  y  $Q_2$ , después de la conexión?

b) Idem sobre las densidades de carga y el campo eléctrico en la superficie.

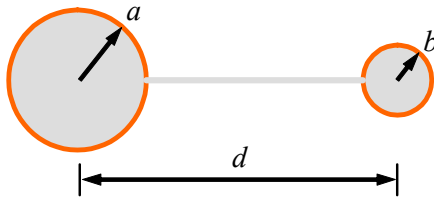


Figura 4.8: Esferas conductoras conectadas mediante un hilo también conductor.

**Solución:**

Una vez realizada la conexión y alcanzado el equilibrio electrostático, las dos esferas estarán al mismo potencial. Además, al ser la distancia entre ambas esferas mucho mayor que su radio, supondremos que una no influye sobre la otra, y por tanto, la distribución de carga sobre cada una de ellas será uniforme. La condición de igualdad de potencial se expresa como

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b},$$

de donde

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a}{b} > 1$$

Expresando la carga en función de la densidad de carga, se obtiene

$$\frac{\rho_{s1} 4\pi a^2}{\rho_{s2} 4\pi b^2} = \frac{a}{b},$$

con lo cual

$$\frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} = \frac{a}{b} > 1.$$

Este resultado indica que la esfera más pequeña almacena mayor densidad de carga.

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico en la superficie de una esfera cargada vale

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0},$$

podemos expresar el cociente entre los campos en la superficie de cada esfera como

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} = \frac{a}{b} > 1.$$

lo cual indica que el campo eléctrico es más intenso en las vecindades de la esfera más pequeña.

---

**Cálculo del campo eléctrico debido a conductores en equilibrio electrostático:**

Como ya sabemos, en un conductor en equilibrio, el campo eléctrico en el interior es nulo y la carga en exceso se distribuye en su superficie. De estas propiedades se deriva que el cálculo del campo eléctrico debido a conductores cargados se reduce al cálculo, en el exterior del conductor, del campo debido a las correspondientes distribuciones superficiales de carga. En consecuencia, como ya hemos adelantado en el ejemplo 1, podemos aplicar, a este problema, las mismas técnicas para el cálculo de campos y potenciales, vistas en temas anteriores. A continuación mostraremos ejemplos con simetría plana, cilíndrica y esférica. Los resultados obtenidos se emplearán posteriormente en el cálculo de capacidades.

---

**Ejemplo 3** Calcular el campo eléctrico debido a dos planos conductores paralelos, infinitos, separados una distancia  $d$ , con la misma densidad superficial de carga  $\rho_s$  C/m<sup>2</sup>, pero de signo opuesto.

**Solución:**

Una forma conveniente de resolver este problema es calcular el campo eléctrico que produce cada uno de los planos conductores y aplicar el principio de superposición.

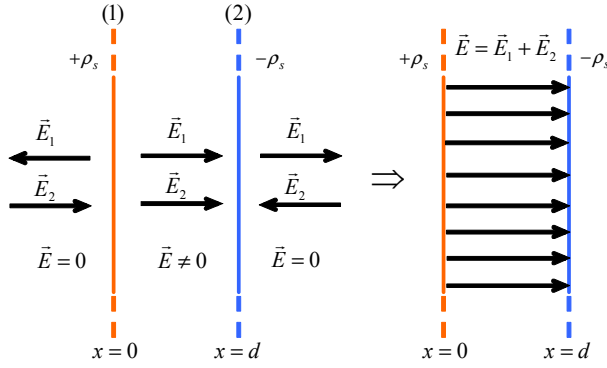


Figura 4.9: Determinación, mediante el principio de superposición, del campo eléctrico debido a dos planos cargados.

Según vimos en el tema 2, el campo eléctrico producido por un plano infinito con densidad de carga uniforme  $\rho_s > 0$ , situado en  $x = 0$  es

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{x} & \text{para } x > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{x} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Para un plano con densidad de carga uniforme  $-\rho_s$  situado en  $x = d$ , el correspondiente resultado es

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{x} & \text{para } x > d \\ +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\hat{x} & \text{para } x < d \end{cases}$$

En virtud del principio de superposición, el campo total es la suma de los campos producidos por cada uno de los planos conductores, luego

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{\rho_s}{\epsilon_0}\hat{x} & \text{para } 0 < x < d \\ 0 & \text{para } d < x \end{cases}$$

**Ejemplo 4** *Dos superficies cilíndricas conductoras coaxiales, infinitamente largas, de radios  $a$  y  $b$  (con  $a < b$ ) tienen cargas iguales y opuestas. El cilindro interior tiene una carga positiva  $Q_\ell$  C/m por unidad de longitud. Calcular el campo eléctrico.*

**Solución:**

En primer lugar debe entenderse que una carga  $Q_\ell$  por unidad de longitud, significa que en un tramo de cilindro de longitud  $\ell$  hay una carga total  $Q = Q_\ell\ell$ , es decir, el dato  $Q_\ell$  representa una densidad lineal de carga. Por tanto, para que los dos cilindros, de igual longitud, tengan la misma carga, deben tener la misma densidad lineal de carga. Por otra parte, los cilindros son superficies, por tanto podemos calcular también su densidad superficial de carga. Así, para el cilindro interior tenemos

$$\rho_s(a) = \frac{Q}{S} = \frac{Q_\ell\ell}{2\pi a\ell} = \frac{Q_\ell}{2\pi a} \text{ C/m}^2,$$

mientras que para el cilindro exterior resulta

$$\rho_s(b) = \frac{-Q_\ell}{2\pi b} \text{ C/m}^2,$$

Se observa que las densidades superficiales de cada cilindro son distintas, lo cual era esperado ya que ambos tienen igual carga (salvo el signo) y distinta superficie.

Una vez discutido el significado de  $Q_\ell$ , abordaremos el cálculo del campo eléctrico. Por tratarse de un problema con simetría cilíndrica, aplicaremos la ley de Gauss de forma análoga a cómo lo hicimos en el tema 2.

El campo que buscamos tiene la forma  $\vec{E} = E(\rho)\hat{\rho}$ . Además, los conductores dividen el espacio en tres regiones: 1) el interior del cilindro interno ( $\rho < a$ ), 2) el espacio intermedio ( $a < \rho < b$ ) y 3) el espacio exterior ( $\rho > b$ ). Las superficies gaussianas son cilindros de radio  $\rho$  arbitrario (pero constante). Por tanto, el flujo eléctrico tiene la misma expresión general en todas ellas

$$\begin{aligned} & \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_{\text{inf.}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{sup.}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{lat.}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

En ambas bases,  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son perpendiculares, en consecuencia, no hay flujo a través de las bases, es decir, las dos primeras integrales son nulas. En la superficie lateral  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  son paralelos, además,  $E$  es constante en toda la superficie lateral (ya que  $\rho$  también lo es), por tanto

$$\Phi_e = \iint_{\text{sup. lat.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \iint_{\text{sup. lat.}} dS = E2\pi\rho\ell$$

Para calcular la carga encerrada, consideraremos cada región por separado:

- Caso  $\rho < a$ :

Toda la carga está en la superficie  $\rho = a$ , por tanto  $Q_{\text{enc}} = 0$ , en consecuencia

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para } \rho < a$$

- Caso  $a < \rho < b$ :

Ahora, la carga encerrada es la carga correspondiente a un tramo de cilindro interno de longitud  $\ell$ , es decir,  $Q_{\text{enc}} = Q\ell$ . Relacionando este resultado con el flujo, a través, de la ley de Gauss, se obtiene

$$\vec{E} = \frac{Q\ell}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho} \quad \text{para } a < \rho < b$$

donde se ha añadido el vector unitario  $\hat{\rho}$  que indica la dirección.

- Caso  $\rho > b$ :

Al tener ambos cilindros la misma carga, pero de sentido contrario, resulta  $Q_{\text{enc}} = 0$ . Por tanto

$$\vec{E} = 0 \quad \text{para } \rho > b$$

Las líneas de campo eléctrico resultantes se muestran en la figura 4.10.

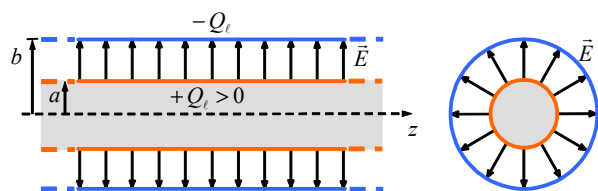


Figura 4.10: Líneas de campo eléctrico debidas a dos superficies cilíndricas, coaxiales, con carga por unidad de longitud de igual valor y signo opuesto.

**Ejemplo 5** Una esfera conductora de radio  $a$  tiene carga neta positiva  $Q$ . Concéntrica con ella hay una superficie esférica conductora de radio  $b > a$  y carga neta  $-Q$ . Calcular el campo eléctrico.

**Solución:**

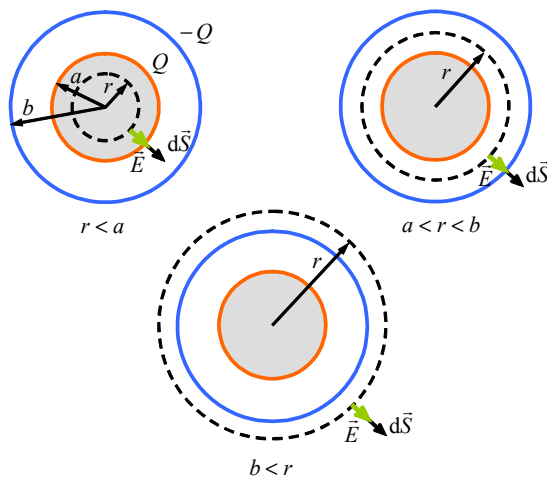


Figura 4.11: Esfera gaussiana (con trazo discontinuo) para cada una de las regiones del espacio  $r < a$ ,  $a < r < b$  y  $b < r$ .

El problema tiene simetría esférica. En consecuencia, el campo buscado es de la forma  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ . Para determinar  $E(r)$  aplicaremos la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

Las superficies gaussianas serán esferas de radio  $r$  con centro en el origen de coordenadas.

Las dos esferas concéntricas dividen el espacio en tres regiones:  $r < a$ ,  $a < r < b$  y  $b < r$ . En cualquiera de ellas, el elemento de superficie es de la forma  $d\vec{S} = dS\hat{r}$ , y por tanto, el flujo vale

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = E4\pi r^2.$$

Para calcular la carga encerrada hay que considerar por separado las tres regiones mostradas en la figura 4.11.

Para  $r < a$  la carga encerrada es nula ya que toda la carga está en la superficie del conductor. Por tanto, en esta región el campo es nulo.



Para  $b < r$  la carga encerrada es la suma algebraica (con su signo) de la carga de ambos conductores, por tanto  $Q_{\text{enc}} = 0$ . En consecuencia, el campo eléctrico fuera del conductor externo también es nulo.

Por último, la carga encerrada para  $a < r < b$  es la carga del conductor interno, es decir,  $Q_{\text{enc}} = +Q$ . Relacionando este resultado con el flujo, a través de la ley de Gauss, se obtiene

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Despejando  $E$  y añadiendo el vector unitario que indica la dirección, resulta

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Por tanto

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{para } r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{para } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{para } b < r \end{cases}$$

La figura 4.12 ilustra las líneas de campo eléctrico debidas a las dos esferas.

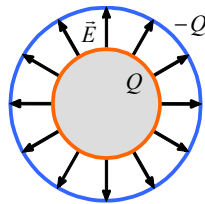


Figura 4.12: Líneas de campo eléctrico debidas a dos esferas concéntricas con carga de igual valor y signo opuesto.

### 4.3 Conductores con cavidades: apantallamiento electrostático

Los conductores con cavidades interiores presentan propiedades de interés. Veamos algunas de ellas:

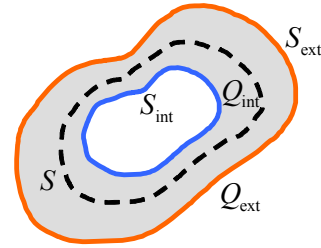


Figura 4.13: Conductor con una cavidad en su interior

1. “En un conductor con una cavidad en su interior, cargado y en equilibrio, toda la carga se sitúa únicamente en la superficie exterior”.

En efecto, considerando una superficie  $S$  enteramente situada dentro del cuerpo conductor, como se muestra en la figura 4.13, y aplicando la ley de Gauss, llegamos a

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = 0$$

es decir, la carga neta encerrada dentro de  $S$  debe ser nula. Como el único lugar donde puede haber carga es la superficie de la cavidad, concluimos que la carga neta en dicha superficie debe ser nula, es decir  $Q_{\text{int}} = 0$ .

Como consecuencia, el campo dentro de la cavidad es nulo y el volumen completo, conductor y cavidad, forman un volumen equipotencial.

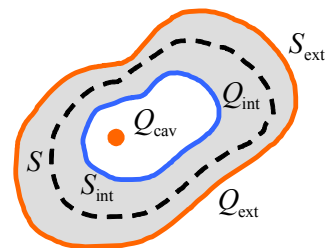


Figura 4.14: Conductor con una cavidad que contiene una carga  $Q_{\text{cav}}$ .

2. “Si en el interior de la cavidad de un conductor neutro y en equilibrio se introduce una carga de determinado valor, en la

superficie externa del conductor aparece una carga de igual valor”.

Para demostrar esta propiedad basta con aplicar la ley de Gauss en una superficie gaussiana situada en el conductor como la mostrada en la figura 4.14 con trazo discontinuo. Dentro de un conductor en equilibrio el campo es nulo, por tanto, el flujo también lo es, resultando

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = 0$$

La carga encerrada será la suma de  $Q_{\text{cav}}$  más la carga neta inducida en la superficie interior  $S_{\text{int}}$ , por tanto

$$Q_{\text{enc}} = Q_{\text{cav}} + Q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{int}} = -Q_{\text{cav}}.$$

El conductor es neutro, luego

$$Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{ext}} = -Q_{\text{int}} = Q_{\text{cav}},$$

es decir, en la superficie  $S_{\text{ext}}$  aparece una carga igual a la de la cavidad.

Si el conductor no fuera neutro y tuviera, por ejemplo, una carga neta  $Q_c$ , tendríamos

$$Q_{\text{int}} + Q_{\text{ext}} = Q_c$$

y la carga resultante en  $S_{\text{ext}}$  sería

$$Q_{\text{ext}} = Q_c - Q_{\text{int}} = Q_c + Q_{\text{cav}}.$$

---

**Ejemplo 6** *Un cascarón conductor, esférico, hueco, de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  está descargado. En el centro de la cavidad hay una carga puntual positiva  $q$ .*

a) *Calcular la densidad de carga en cada superficie del conductor.*

b) *Determinar el campo eléctrico y el potencial en todas las regiones del espacio.*

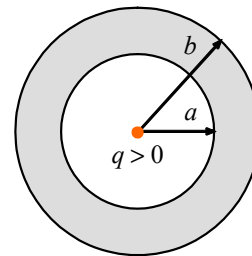


Figura 4.15: Cascarón conductor, esférico y hueco con una carga en el centro de la cavidad.

**Solución:**

a) Denotaremos por  $Q_a$  y  $Q_b$  a la carga en la superficie interna y externa del cascarón, respectivamente. Para determinar estas cargas, aplicaremos la ley de Gauss.

Tomando como gaussiana una circunferencia de radio  $b > r > a$  y teniendo en cuenta que el campo eléctrico dentro del conductor es nulo, resulta

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{q + Q_a}{\epsilon_0} = 0,$$

de donde  $Q_a = -q$ . Como el cascarón es neutro,  $Q_a + Q_b = 0$ , luego  $Q_b = q$ .

Las densidades de cargas buscadas son:

$$\begin{aligned} \rho_s(a) &= \frac{Q_a}{S_a} = \frac{-q}{4\pi a^2}, \\ \rho_s(b) &= \frac{Q_b}{S_b} = \frac{q}{4\pi b^2}. \end{aligned}$$

b) Para calcular el campo eléctrico, aplicaremos la ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

Teniendo en cuenta la simetría esférica del problema, el campo eléctrico será de la forma  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ . Como es usual en estos casos, tomando superficies gaussianas en forma de circunferencia centrada en la posición de la carga puntual  $q$ , el flujo resulta

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

Para calcular  $Q_{\text{enc}}$  consideraremos 3 regiones:  $r < a$ ,  $a < r < b$  y  $r > b$ .

- $r < a$  :

En este caso  $Q_{\text{enc}} = q$ . Sustituyendo este resultado en la ley de Gauss se obtiene

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- $b > r > a$  :

En esta región  $Q_{\text{enc}} = q + Q_a = 0$ . En consecuencia y como era de esperar, el campo eléctrico dentro del conductor es nulo.

- $r > b$  :

Ahora  $Q_{\text{enc}} = q + Q_a + Q_b = q$ . El campo resultante es

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para determinar el potencial, consideraremos las mismas regiones que en el cálculo del campo. Sin embargo, en este caso conviene empezar a hacer los cálculos en la región más externa. Así

- $r \geq b$  :

$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

- $b \geq r \geq a$  :

$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \end{aligned}$$

- $r \leq a$  :

$$\begin{aligned} &V(r) - V(\infty) \\ &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + 0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

### Apantallamiento electrostático:

Consideremos un conductor en equilibrio, neutro y con una cavidad interior. Supongamos que en la cavidad hay una carga  $Q_{\text{cav}} > 0$ . Según hemos visto anteriormente, en la superficie interior del conductor se induce una carga  $-Q_{\text{cav}}$  y en la superficie exterior una carga  $Q_{\text{cav}}$  que produce un campo en el exterior del conductor. Si ahora conectamos el conductor a tierra, las cargas de la superficie exterior abandonarán el conductor. En consecuencia, no habrá campo en el exterior del conductor, es decir, la carga de la cavidad no producirá ningún efecto en el exterior del conductor. Decimos entonces que la carga de la cavidad está apantallada electrostáticamente. Un conductor con una cavidad que produce este apantallamiento se denomina **jaula de Faraday**.

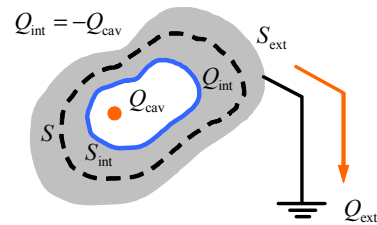


Figura 4.16: Jaula de Faraday

---

**Ejemplo 7** *Un cascarón conductor, esférico, hueco, de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  está conectado a tierra. En el centro de la cavidad hay una carga puntual positiva  $q$ . Determinar el campo eléctrico y el potencial en todas las regiones del espacio.*

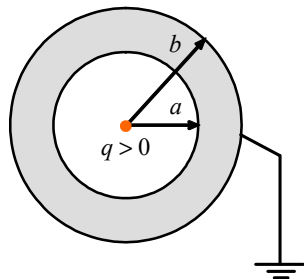


Figura 4.17: Cascarón conductor, esférico y conectado a tierra con una carga en el centro.

### Solución:

Este problema es igual al anterior con la diferencia de que en aquel la carga neta en el conductor era un dato y el potencial era desconocido, mientras que en éste la carga es desconocida y el potencial es dato ( $V = 0$ , por estar unido a tierra).

Para resolver este problema, supondremos cargas  $Q_a$  y  $Q_b$  en las superficies  $r = a$  y  $r = b$ , respectivamente. Como ya sabemos  $Q_a$  debe ser igual a la carga de la cavidad cambiada de signo, luego  $Q_a = -q$ . El valor de  $Q_b$  es desconocido. Determinaremos primeramente el campo y luego el potencial.

Por ser un conductor en equilibrio, el campo dentro de la corona es nulo. Para calcular el campo dentro de la cavidad ( $r \leq a$ ) y en el exterior del conductor ( $r \geq b$ ) emplearemos la ley de Gauss,  $\Phi_e = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ . En ambas regiones el flujo vale

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2.$$

La carga encerrada para  $r \leq a$  es  $Q_{\text{enc}} = q$ . Sustituyendo en la ley de Gauss, resulta

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Para  $r \geq b$  la carga encerrada es  $Q_{\text{enc}} = q + Q_a + Q_b = Q_b$ . El campo resulta

$$E(r) = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde  $Q_b$  es aún desconocida.

El potencial en la cavidad se puede obtener a

partir del campo mediante la expresión

$$\begin{aligned} V(r) - V(a) &= - \int_a^r \vec{E}_{(r \leq a)} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_a^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

El conductor está unido a tierra, por tanto su potencial es nulo, es decir

$$V = 0 \quad \text{para} \quad a \leq r \leq b.$$

Utilizaremos este dato para calcular  $Q_b$ . La diferencia de potencial entre  $r = b$  y  $r = \infty$  es

$$\begin{aligned} V(b) - V(\infty) &= - \int_{\infty}^b \vec{E}_{(r \geq b)} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_{\infty}^b \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b} = 0, \end{aligned}$$

de donde  $Q_b = 0$ . Por tanto en el exterior no hay campo y el potencial es nulo. En consecuencia, la carga situada en el interior de la cavidad no produce ningún efecto en el espacio exterior al conductor.

## 4.4 Capacidad y condensadores

### 4.4.1 Capacidad de un conductor

Los conductores pueden almacenar carga eléctrica y por tanto pueden almacenar energía. En la práctica, la forma más sencilla de cargar un conductor es conectarlo a una batería, como se ilustra en la figura 4.18

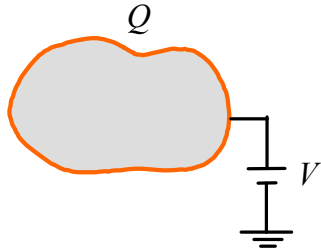


Figura 4.18: Conductor cargado.

Resulta interesante conocer la cantidad de carga que puede almacenar el conductor en relación a su potencial, lo cual se conoce como capacidad o capacitancia del conductor. Matemáticamente, la capacidad de un conductor se define como

$$C \equiv \frac{Q}{V},$$

donde  $V$  representa el potencial del conductor respecto al origen de potenciales (la tierra).

La capacidad de un conductor no depende de su carga ni de su potencial, solamente depende de su geometría (forma y dimensiones físicas) y del dieléctrico que haya en el espacio circundante.

La unidad de la capacidad en el SI es el faradio (F), que, a partir de la expresión anterior, puede definirse como la capacidad de un conductor que cargado con un culombio adquiere un potencial de un voltio, luego

$$1 \text{ Faradio} = \frac{1 \text{ Culombio}}{1 \text{ Voltio}}.$$

El faradio es una unidad muy grande, de poco interés práctico; por ello se usan submúltiplos. Los más utilizados son:

$$\begin{aligned} 1 \mu\text{F} &= 10^{-6} \text{ F}, \\ 1 \text{ nF} &= 10^{-9} \text{ F}, \\ 1 \text{ pF} &= 10^{-12} \text{ F}. \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo.

---

**Ejemplo 8** *Calcular la capacidad de una esfera conductora de radio  $a$ . ¿Cuál debe ser su radio para que la capacidad resultante sea 1 faradio?*

**Solución:**

Según vimos en un ejemplo anterior, el potencial de una esfera conductora de radio  $a$  y con carga  $Q$  vale

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a},$$

por tanto

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 a \text{ F}.$$

Para que la capacidad sea de un faradio, el radio debe valer

$$a = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ m},$$

es decir, se necesita una esfera de ¡9 millones de kilómetros!

---

La expresión de la capacidad de una esfera, obtenida en el ejemplo anterior, nos permite introducir una unidad nueva para la permitividad, ya que

$$\epsilon_0 = \frac{C}{4\pi a},$$

luego, en el SI podemos expresar  $\epsilon_0$  en unidades de F/m, que es una unidad muy utilizada.

## 4.4.2 Condensadores

**Concepto de condensador:**

Los condensadores son dispositivos que se usan para almacenar carga y por tanto energía eléctrica. Tal como se muestra en la figura 4.19, un condensador está formado por dos conductores con cargas iguales y opuestas,  $+Q$  y  $-Q$ , que presentan influencia total, es decir, todas las líneas de campo que salen del conductor con carga  $+Q$  mueren en el conductor con carga  $-Q$ .

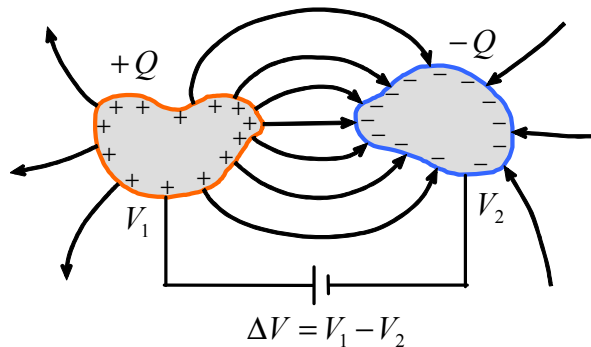


Figura 4.19: Condensador cargado.

Los conductores que forman un condensador, también llamados armaduras, no tienen porqué ser de la misma forma y tamaño. Por tanto, la igualdad de carga en ambos conductores, no implica que las correspondientes densidades de carga deban ser también iguales.

#### Capacidad de un condensador:

Consideramos un condensador que cargamos mediante un batería con una diferencia de potencial  $\Delta V = V_1 - V_2$ . La capacidad de dicho condensador se define como

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

donde  $Q$  es la carga adquirida por el conductor positivo (el otro conductor tendrá una carga  $-Q$ ).

#### Cálculo de capacidades:

Podemos determinar la capacidad de un condensador empleando el siguiente procedimiento:

1. Elegir un sistema de coordenadas adecuado a la geometría del problema
2. Suponer un conductor cargado con carga  $+Q$  y el otro con carga  $-Q$
3. Calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$  a partir de la carga
4. Utilizar el campo eléctrico para determinar la diferencia de potencial entre los conductores

mediante la expresión

$$\Delta V = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

5. Finalmente, la capacidad se obtiene evaluando el cociente  $Q/\Delta V$ .

Tanto para un único conductor como para un condensador, la capacidad es una propiedad física que depende sólo de la geometría y del tipo de dieléctrico que rellene el espacio circundante. Por tanto el cociente  $Q/\Delta V$  no debe depender de la carga ni de la densidad de carga en los conductores.

A continuación veremos 3 ejemplos de cálculo de capacidades mediante el procedimiento que acabamos de describir. Cada uno se corresponde con un tipo de simetría: plana, cilíndrica y esférica.

---

**Ejemplo 9** Calcular la capacidad de un condensador formado por dos placas conductoras, paralelas, circulares de radio  $a$  y separadas una distancia  $d \ll a$ .

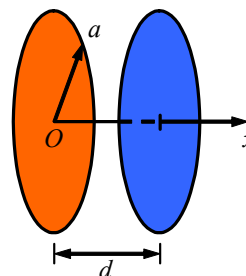


Figura 4.20: Condensador de placas planoparalelas circulares.

#### Solución:

Siguiendo el procedimiento anteriormente descrito, comenzaremos asignando una carga neta  $+Q$  al conductor situado en  $x = 0$  y una carga neta  $-Q$  al otro.

Seguidamente, calcularemos el campo eléctrico debido a los dos conductores cargados. Teniendo en cuenta que  $d \ll a$ , los efectos de borde son pequeños y podemos aproximar el campo eléctrico en el condensador por el campo eléctrico debido a dos

planos conductores infinitos. Según se obtuvo en el ejemplo 3, este campo vale

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{x} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{x}$$

El siguiente paso consiste en calcular la diferencia de potencial entre los conductores. Para ello empleamos la expresión

$$\Delta V = V(0) - V(d) = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

El camino de integración debe llevarnos del conductor negativo ( $x = d$ ) al conductor positivo ( $x = 0$ ). El resultado final es independiente de la trayectoria particular de integración, por lo que tomaremos una recta a lo largo del eje  $x$ , que es la más sencilla. En consecuencia  $d\vec{\ell} = dx\hat{x}$  y

$$\Delta V = - \int_d^0 \frac{Q}{\epsilon_0 S} \hat{x} \cdot dx\hat{x} = - \frac{Q}{\epsilon_0 S} \int_d^0 dx = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

Por último, sustituyendo este resultado en la definición de capacidad  $C = Q/\Delta V$ , se obtiene

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \quad \text{F}$$

---

**Ejemplo 10** Un condensador cilíndrico está compuesto por dos cilindros conductores coaxiales de radios  $a$  y  $b$  (con  $a < b$ ) y longitud  $\ell \gg a, b$ . Calcular su capacidad.

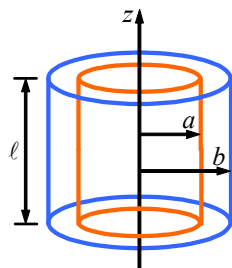


Figura 4.21: Condensador cilíndrico.

**Solución:**

Comenzamos cargando los conductores con igual carga de distinto signo:  $Q > 0$  el cilindro interno y  $-Q$  el cilindro externo.

A continuación determinamos el campo producido por los conductores cargados. Teniendo en cuenta la condición  $\ell \gg a, b$ , supondremos que el condensador es lo suficientemente largo como para despreciar los efectos de borde. En esta situación el campo puede aproximarse por el debido a los coaxiales de longitud infinita con una carga  $Q$  por cada tramo de longitud  $\ell$ . Según se obtuvo en un problema anterior el campo buscado vale

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell\rho} \hat{\rho} \quad a \leq \rho \leq b.$$

El siguiente paso consiste en calcular la diferencia de potencial entre los conductores que forman el condensador:

$$\Delta V = V(a) - V(b) = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La trayectoria de integración será una línea radial, por tanto  $d\vec{\ell} = d\rho\hat{\rho}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell\rho} \hat{\rho} \cdot d\rho\hat{\rho} \\ &= - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell} \int_b^a \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell} \ln(b/a) \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la definición de capacidad  $C = Q/\Delta V$ , resulta

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln(b/a)} \quad \text{F}$$

---

**Ejemplo 11** Un condensador esférico está formado por dos esferas conductoras concéntricas de radios  $a$  y  $b$  (con  $a < b$ ). Calcular su capacidad.

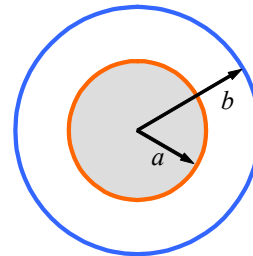


Figura 4.22: Condensador esférico.

**Solución:**

Comenzaremos cargando el condensador, es decir asignando una carga  $+Q$  a la esfera interna y una carga  $-Q$  a la esfera externa.

El siguiente paso consiste en calcular el campo eléctrico. En realidad este cálculo se hizo en un problema anterior, obteniéndose

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad a \leq r \leq b.$$

A continuación determinaremos la diferencia de potencial entre los dos conductores:

$$\Delta V = V(a) - V(b) = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

En este caso, tomamos como trayectoria de integración una línea radial, por tanto  $d\vec{\ell} = dr\hat{r}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr\hat{r} \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la definición de capacidad  $C = Q/\Delta V$ , resulta

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \text{ F}$$

**4.4.3 Asociación de condensadores**

- Los condensadores se pueden asociar en serie y en paralelo
- Asociación en paralelo:

$$C_{eq} = \sum_{n=1}^N C_n$$

- Asociación en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}$$

(Para más detalles ver asignatura Análisis de Circuitos)

**4.5 Energía de un condensador****Energía almacenada en un conductor:**

Según vimos en temas anteriores, la energía electrostática almacenada en una distribución superficial de carga es

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_S \rho_s V \, dS$$

donde la integral se extiende a toda la distribución de carga.

Supongamos un conductor cargado con carga neta  $Q$  y potencial  $V$ . La carga estará distribuida sobre su superficie con una densidad  $\rho_s$ . En principio, para calcular la energía electrostática almacenada en el conductor tendríamos que evaluar la integral anterior. Sin embargo, teniendo en cuenta que la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es equipotencial ( $V = \text{cte}$ ), resulta

$$U_e = \frac{1}{2} V \iint_S \rho_s \, dS,$$

además, reconociendo la integral que nos queda como la carga neta del conductor, resulta

$$U_e = \frac{1}{2} QV.$$

**Ejemplo 12** Determinar la energía electrostática almacenada por una esfera conductora de radio  $a$  con carga neta  $Q$ .

**Solución:**

Al tratarse de un conductor en equilibrio electrostático, la energía almacenada se calcula mediante la expresión

$$U_e = \frac{1}{2} QV,$$

donde  $Q$  es la carga del conductor y  $V$  su potencial. Según obtuvimos en problemas anteriores, el potencial de una esfera conductora de radio  $a$  y carga  $Q$  vale

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a},$$



Por tanto la energía resulta

$$U_e = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad \text{J}$$

Se observa que  $U_e$  es siempre positiva con independencia del signo de  $Q$ .

Si tuviésemos varios conductores, la energía total sería simplemente la suma de la energía de cada uno de los conductores individuales.

### Energía almacenada en un condensador:

La energía almacenada en un condensador es la suma de las energías almacenadas en cada uno de los dos conductores que los forman, luego

$$U_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2,$$

donde  $Q_{1,2}$  y  $V_{1,2}$  son la carga y el potencial de cada conductor. Por tratarse de un condensador, y suponiendo que el conductor 1 está cargado positivamente, podemos hacer  $Q_1 = +Q$  y  $Q_2 = -Q$ , luego

$$U_e = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2),$$

donde identificamos el término  $V_1 - V_2$  como la diferencia de potencial entre ambos conductores. Escribiendo  $\Delta V = V_1 - V_2$  se obtiene

$$U_e = \frac{1}{2}Q\Delta V.$$

Expresión que nos da la energía de un condensador en función de su carga y de la diferencia de potencial entre sus armaduras. Recordando la definición de capacidad,  $C = Q/\Delta V$ , podemos expresar la energía almacenada en un condensador de las siguientes formas alternativas

$$U_e = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

pudiendo elegir aquella que más nos convenga en cada caso.

**Ejemplo 13** Calcular la energía electrostática almacenada en un condensador esférico de radios  $a$  y  $b$ , cargado con una carga  $Q$ .

### Solución:

En problemas anteriores se obtuvo la capacidad de un condensador esférico:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

Teniendo en cuenta además que el enunciado nos da la carga del condensador, la energía almacenada se puede calcular simplemente mediante la expresión

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} \quad \text{J}$$

## 4.6 Energía en función del campo eléctrico

Cuando se aborda el estudio de fenómenos electromagnéticos variables con el tiempo, resulta más conveniente calcular la energía eléctrica en función del campo eléctrico que en función de la carga. El objetivo de este apartado es obtener una expresión general para la energía en función del campo, lo cual se puede hacer, mediante deducción matemática rigurosa, a partir de la expresión de la energía en función de la carga. Sin embargo, debido a la complejidad de tal deducción, emplearemos un camino alternativo, no riguroso.

Consideremos un condensador de placas planoparalelas de anchura  $S$  y separadas una distancia  $d$ . Si la diferencia de potencial entre las placas es  $\Delta V$ , la energía almacenada se puede expresar como

$$U_e = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 S}{d}\Delta V^2.$$

Relacionando la diferencia de potencial con el campo eléctrico existente en el condensador  $\Delta V = Ed$  y agrupando términos, resulta

$$U_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (Sd) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tau$$

donde  $\tau = Sd$  es el volumen del condensador. Esta expresión se pueden interpretar diciendo que la energía electrostática de un condensador se encuentra en el espacio donde hay campo eléctrico.

Podemos definir la energía por unidad de volumen como

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

La magnitud  $u_e$  se denomina **densidad de energía eléctrica** y tiene unidades de  $\text{J}/\text{m}^3$ . Se observa que para el condensador de placas plan-paralelas la densidad de energía es una constante, por serlo el campo eléctrico. Sin embargo, en un caso general,  $E$  será función de la posición, por lo que tendremos que definir  $u_e$  como

$$u_e = \frac{dU_e}{d\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2,$$

donde, en general,  $u_e$  será función de las coordenadas espaciales. Según la expresión anterior, la energía eléctrica almacenada en un volumen elemental  $d\tau$  es

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau.$$

La energía almacenada en un volumen finito se obtendrá sumando las energías de todos los volúmenes elementales que lo conforman, luego

$$U_e = \iiint \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau,$$

que es la expresión general buscada.

**Ejemplo 14** Calcular la energía electrostática almacenada por una esfera conductora de radio  $a$  con carga neta  $Q$ . Realizar el cálculo empleando el campo eléctrico.

**Solución:**

La campo eléctrico debido a una esfera conductora cargada vale

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r \geq a \end{cases}$$

Para calcular la energía basta con hacer la integral

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |\vec{E}|^2 d\tau$$

Esta integral debe realizarse a todo el espacio. Tomando  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , la expresión la integral resulta

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty |\vec{E}|^2 4\pi r^2 dr$$

Teniendo en cuenta que para  $r < a$  el campo es nulo, se obtiene

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad \text{J} \end{aligned}$$

## 4.7 Medios dieléctricos. Consideraciones generales

Todos los medios materiales se componen de moléculas formadas por átomos, que a su vez están formados por entes cargados (núcleos atómicos y electrones). Veamos que ocurre cuando un medio dieléctrico se sitúa en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico aplicado  $\vec{E}_0$ . Inicialmente describiremos la acción de un campo externo sobre un átomo aislado y sobre una molécula aislada. Posteriormente abordaremos el caso de un dieléctrico.

### Acción de un campo externo sobre un átomo aislado:

En ausencia de campo externo aplicado, la nube de carga negativa tiene simetría esférica en torno al núcleo (considerado puntual), por tanto los centros de cargas positivas y negativas del átomo coinciden, como se ilustra en la figura 4.23.

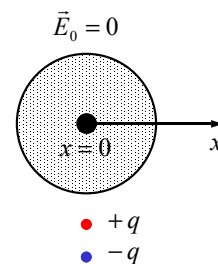


Figura 4.23: Átomo no polarizado. Los centros de carga positivo y negativo coinciden.

Cuando existe un campo externo aplicado se produce fuerza sobre el núcleo positivo en la misma dirección del campo y sobre la nube de carga negativa

en dirección opuesta al campo. Como consecuencia, se deforma la nube de carga negativa, con lo que los centros de cargas positivas y negativas no coinciden. Decimos entonces que el átomo se ha polarizado, o en otras palabras se ha formado un **dipolo eléctrico** como se muestra en la figura 4.24.

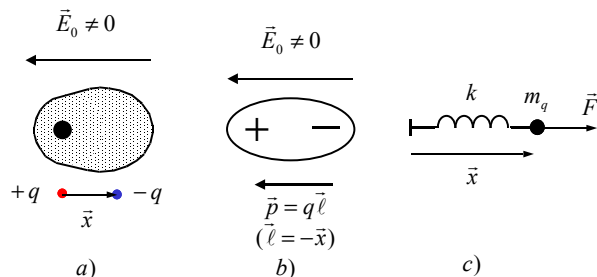


Figura 4.24: a) Átomo polarizado (dipolo atómico). b) Dibujo esquemático de un dipolo. c) Modelo mecánico de un dipolo.

Los desplazamientos producidos por  $\vec{E}_0$  (del orden de fracciones muy pequeñas del diámetro molecular) están compensados por intensas fuerzas restauradoras que se forman al cambiar la configuración de cargas dentro del átomo (modelo mecánico de muelle).

Esta redistribución de cargas en el átomo produce un campo adicional que se superpone al campo inicialmente aplicado. El átomo polarizado se caracteriza mediante una magnitud vectorial llamada **momento dipolar eléctrico**:

$$\vec{p} = q\vec{\ell}.$$

Este proceso se llama **polarización electrónica o de desplazamiento**.

#### Acción de un campo externo sobre una molécula aislada:

Distinguimos dos casos:

1. **Moléculas no polares:** son aquellas que en ausencia de campo aplicado tienen un momento dipolar eléctrico nulo. Al actuar un campo aplicado se polarizan de manera análoga al caso del átomo (polarización electrónica)
2. **Moléculas polares:** son aquellas que, en ausencia de campo aplicado, tienen un momento

dipolar permanente (no nulo). Al actuar un campo aplicado, se produce un par de fuerzas y el dipolo molecular se orienta paralelo al campo aplicado (**polarización por orientación**). Ej.: Agua

#### Acción de un campo externo sobre un dieléctrico:

Consideraremos un medio dieléctrico como una colección de moléculas todas iguales y que no interactúan entre sí. Además, en un dieléctrico ideal no existe carga libre. Casos:

1. **Medio no polar:** (colección de moléculas no polares). En ausencia de campo aplicado no existen dipolos moleculares. Con campo eléctrico aplicado se forman dipolos moleculares por polarización electrónica. Todos los dipolos tienen la misma orientación del campo  $\Rightarrow$  el medio se polariza.
2. **Medio polar:** (colección de moléculas polares). En ausencia de campo aplicado cada molécula tiene momento dipolar no nulo. Los momentos dipolares se orientan al azar  $\Rightarrow$  el momento dipolar total del material es nulo. Con campo eléctrico aplicado todos los dipolos se orientan con el campo  $\Rightarrow$  el material se polariza (polarización por orientación). A esta ordenación se oponen fenómenos como la agitación térmica.

Sea el medio polar o no polar, al aplicar un campo eléctrico externo el resultado final es el mismo: el medio se comporta como una colección de dipolos orientados con el campo aplicado como se ilustra en la figura 4.25.

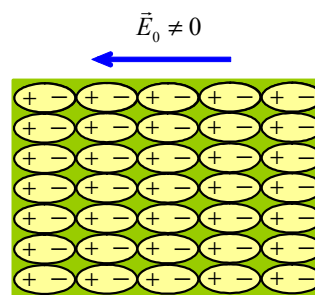


Figura 4.25: Dieléctrico polarizado.

## 4.8 Experimento de Faraday

Consideremos un condensador de placas planoparalelas separadas una distancia  $d$  y con vacío entre las placas. Conectamos este condensador a una diferencia de potencial  $V_0$  y adquiere una carga  $Q$  (figura 4.26-a)

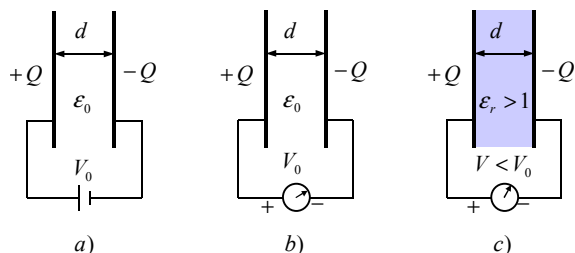


Figura 4.26: a) Carga del condensador vacío. b) Medida de la d.d.p. con el condensador vacío. c) Medida de la d.d.p. con el condensador relleno de dieléctrico.

La capacidad del condensador será

$$C_0 = \frac{Q}{V_0}.$$

Si desconectamos el condensador de la batería, la carga permanecerá en las armaduras y por tanto la diferencia de potencial, que podemos medir con un voltímetro, seguirá siendo  $V_0$  (figura 4.26-b). En estas condiciones, introducimos entre las placas del condensador un dieléctrico. Al medir de nuevo la d.d.p. entre las placas del condensador se obtiene un valor  $V < V_0$  (figura 4.26-c). En todo el proceso la carga se mantiene constante. Finalmente, al retirar el material, el voltímetro vuelve a marcar  $V_0$ .

Repitiendo esta experiencia con distintos materiales se comprueba que la relación  $V_0/V$  es una constante cuyo valor depende del tipo de material. Al introducir el material en el condensador cambia la d.d.p. manteniéndose constante la carga, por tanto debe cambiar la capacidad del condensador. La capacidad con el condensador lleno es

$$C = \frac{Q}{V},$$

entonces

$$\frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} = \text{cte} = \epsilon_r > 1.$$

La constante  $\epsilon_r$  es una propiedad que caracteriza cada material y se denomina **constante dieléctrica o permitividad relativa**. Para la mayoría de los materiales, su valor es mayor que la unidad. La **permitividad** del dieléctrico  $\epsilon$  se define como

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0.$$

La presencia del dieléctrico también afecta al valor del campo eléctrico dentro del condensador y al de la energía almacenada. Para el condensador vacío

$$E_0 = \frac{V_0}{d}.$$

Para el condensador con dieléctrico

$$E = \frac{V}{d},$$

Por tanto, al introducir el dieléctrico, el campo dentro del condensador disminuye, ya que

$$\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V} = \epsilon_r > 1,$$

La energía almacenada en el condensador vacío es

$$U_{e0} = \frac{1}{2} QV_0.$$

La energía almacenada en el condensador cargado vale

$$U_e = \frac{1}{2} QV.$$

Por tanto, al introducir el dieléctrico, la energía almacenada disminuye, ya que

$$\frac{U_{e0}}{U_e} = \frac{V_0}{V} = \epsilon_r > 1,$$

## 4.9 Interpretación del experimento de Faraday

En este apartado abordaremos la interpretación del experimento de Faraday, descrito en el apartado anterior, desde dos puntos de vista complementarios:

1. En términos de la carga de polarización que aparece en el material dieléctrico
2. Mediante la introducción de un nuevo campo que llamaremos **vector polarización**.

### 4.9.1 Densidad de carga de polarización

Hemos visto que al colocar un dieléctrico entre las placas de un condensador cargado y desconectado de la batería, el campo en el condensador disminuye, mientras que la carga sobre las placas permanece constante. La disminución del campo debe provenir de la aparición, dentro del dieléctrico, de cargas de polarización.

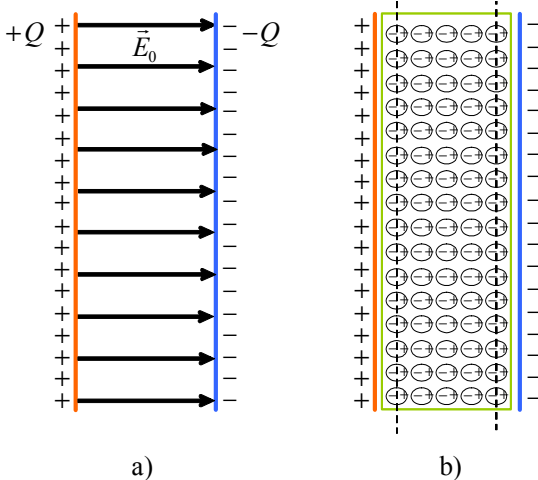


Figura 4.27: a) Condensador vacío. b) Condensador lleno de dielectrico polarizado.

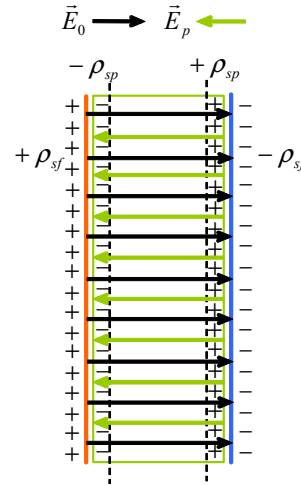


Figura 4.28: Campo eléctrico de polarización  $\vec{E}_p$  y densidades de carga de polarización  $\rho_{sp}$ .

Tal como se ilustra en la figura 4.27, como consecuencia del fenómeno de polarización del dieléctrico, aparece carga positiva en una de las caras del dieléctrico y carga negativa en la otra. El efecto neto del fenómeno de polarización del dieléctrico es, por tanto, la formación de una densidad de carga superficial en el dieléctrico, que denominaremos **densidad de carga de polarización** y denotaremos como  $\rho_{sp}$ .

La carga de polarización que aparece en el dieléctrico da lugar a un campo que llamaremos campo eléctrico de polarización  $\vec{E}_p$ , tal como se muestra en la figura 4.28. Este campo se opone al campo externo  $\vec{E}_0$  creado por las cargas libres, dando como resultado un campo total  $\vec{E}$ . Como  $\vec{E}_0$  y  $\vec{E}_p$  son de sentido contrario, el módulo de  $\vec{E}$  vale

$$E = E_0 - E_p.$$

Como ya conocemos, para un condensador planoparalelo el campo externo se expresa en función de la densidad de carga que hay en sus placas como

$$E_0 = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon_0}$$

siendo  $\rho_{sf}$  la densidad superficial de carga libre. Análogamente, el campo eléctrico de polarización se expresa en función de la densidad de carga de polarización:

$$E_p = \frac{\rho_{sp}}{\epsilon_0}.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación anterior resulta

$$E = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon_0} - \frac{\rho_{sp}}{\epsilon_0}$$

Teniendo en cuenta además que, según el experimento de Faraday, el campo total  $E$  y el campo externo  $E_0$  se relacionan a través de la constante dieléctrica del material como  $E = E_0/\epsilon_r$  podemos escribir

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

que sustituyendo en la expresión anterior resulta

$$\frac{\rho_{sf}}{\epsilon_r} = \rho_{sf} - \rho_{sp},$$

de donde podemos calcular la densidad de carga de polarización en función de la densidad de carga libre

$$\rho_{sp} = \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \rho_{sf}.$$

Como  $\epsilon_r > 1$ , la densidad de carga de polarización es menor que la densidad de carga libre. El fenómeno de polarización ocurre en todo el volumen del dieléctrico, por ello, en general, si el dieléctrico no es homogéneo, aparecen cargas de polarización tanto en la superficie como en el volumen del dieléctrico.

### 4.9.2 Vectores polarización y desplazamiento. Susceptibilidad y permitividad dieléctricas

En este apartado abordaremos la polarización dieléctrica desde un punto de vista alternativo al considerado en el apartado anterior. Ahora nuestro objetivo es introducir, con un enfoque teórico, la permitividad como parámetro que caracteriza las propiedades eléctricas de un material, desde un punto de vista macroscópico.

#### Vector polarización:

Como ya sabemos, desde un punto de vista microscópico, la materia está constituida por un conjunto de dipolos eléctricos.

Con el propósito de pasar a una descripción macroscópica que nos sea útil desde el punto de vista

de la teoría de campos definiremos el vector polarización  $\vec{P}$  como el momento dipolar por unidad de volumen:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}.$$

Si consideramos un volumen elemental  $d\tau$  dentro de un dieléctrico polarizado, el momento dipolar total correspondiente a dicho volumen será

$$d\vec{p} = \vec{P}d\tau.$$

Se supone que  $d\tau$  es pequeño a escala macroscópica pero grande a escala atómica, de manera que en el volumen elemental  $d\tau$  hay un gran número de moléculas, cada una con un momento dipolar  $\vec{p}$ , y todas igualmente orientadas. El vector  $\vec{P}$  es un campo vectorial que tendrá valor nulo fuera del dieléctrico polarizado y, en general, valor no nulo en su interior. El vector polarización puede interpretarse como la respuesta del dieléctrico a la aplicación de un campo eléctrico

#### Vector desplazamiento:

En problemas que involucran dieléctricos conviene introducir un nuevo campo vectorial que llamaremos vector desplazamiento  $\vec{D}$  y que definiremos como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

#### Susceptibilidad y permitividad dieléctricas:

Como  $\vec{P}$  representa la respuesta del dieléctrico a la aplicación de un campo eléctrico  $\vec{E}$ , debe existir una relación entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}).$$

Esta relación se puede determinar bien experimentalmente, bien a partir de las propiedades microscópicas de la materia. Para la mayor parte de los materiales, el vector polarización resulta proporcional al campo eléctrico, lo cual podemos expresar en la forma

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E},$$

donde  $\chi_e$  es una constante propia de cada material llamada **susceptibilidad dieléctrica**. Los materiales que verifican la relación anterior de denominan dieléctricos lineales e isotrópicos. Además, si  $\chi_e$

no depende de la posición se dice que el dieléctrico es homogéneo.

Una vez establecida una relación entre  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$ , podemos relacionar directamente  $\vec{D}$  con  $\vec{E}$ , para lo cual basta sustituir el valor de  $\vec{P}$  en la expresión  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , obteniéndose

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \kappa_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \kappa_e) \vec{E},$$

que puede escribirse como

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}},$$

donde

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \kappa_e),$$

es la permitividad del dieléctrico, y

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

es la permitividad relativa o constante dieléctrica. La relación  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  se llama **ecuación de constitución**.

**Ejemplo 15** Sea un condensador planoparalelo con placas de anchura  $S$  separadas una distancia  $d$ , al que se introduce un dieléctrico entre las placas de manera que se mantiene la carga constante. Determinar como varían los vectores  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$ , la d.d.p. y la capacidad.

**Solución:**

Determinaremos antes las cantidades pedidas para el caso del condensador vacío.

Suponiendo que el condensador está cargado con una carga  $Q^f$ , la densidad de carga en las placas será

$$\rho_{sf} = \frac{Q^f}{S}.$$

Los campos  $E_0$ ,  $D_0$  y  $P_0$  valen

$$E_0 = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon_0}, \quad D_0 = \rho_{sf}, \quad P_0 = 0.$$

La d.d.p. es

$$\begin{aligned} V_0 &= V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_d^0 \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} = E_0 d = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon_0} d \end{aligned}$$

y la capacidad

$$C_0 = \frac{Q^f}{V_0} = \frac{\rho_{sf} S}{\frac{\rho_{sf}}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Al introducir el dieléctrico la carga libre en las placas no varía, luego

$$D = D_0 = \rho_{sf}.$$

El campo eléctrico vale ahora

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon},$$

y el vector polarización

$$P = D - \epsilon_0 E = \rho_{sf} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \rho_{sf} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \rho_{sf}.$$

La d.d.p. es

$$\begin{aligned} V &= V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E d = \frac{\rho_{sf}}{\epsilon} d = \frac{V_0}{\epsilon_r} < V_0, \end{aligned}$$

y la capacidad

$$C = \frac{Q^f}{V} = \frac{\rho_{sf} S}{\frac{\rho_{sf}}{\epsilon} d} = \frac{\epsilon S}{d} = \epsilon_r C_0 > C_0.$$

## 4.10 Diseño de condensadores

Según se desprende del experimento de Faraday, la capacidad de un condensador es proporcional a  $\epsilon_r$ , por tanto es preferible emplear medios de alta permitividad para aumentar la capacidad.

Por otra parte, el campo de ruptura del dieléctrico (campo por encima del cual se produce un arco eléctrico que perfora el dieléctrico) debe ser alto. En un condensador planoparalelo  $V = E d$ , de forma que  $V_{\max} = E_{\max} d$  y si  $E_{\max}$  es grande  $d$  puede elegirse pequeño sin tener que disminuir la d.d.p. máxima de trabajo.

El dieléctrico debe ser sólido para evitar el contacto eléctrico entre placas.

Existen muchos tipos de condensadores; aquí se comentan sólo dos:

- **Condensador de papel:** se fabrica con dos hojas metálicas, intercalando entre ambas placas delgadas de papel impregnadas en parafina que actúan de dieléctrico.
- **Condensador electrolítico de gran capacidad:** Consta de una hoja de metal en contacto con un electrolito. Cuando se aplica el voltaje entre las hojas de metal y el electrolito, se forma una capa de óxido metálico (aislante) que sirve de dieléctrico. Al ser esta capa muy delgada se consiguen capacidades muy altas.

Hay otros tipos de condensadores como los electrolíticos que utilizan aceite como dieléctrico y los condensadores variables, formados por placas móviles.

Material	$\epsilon_r$	$E_{rup}$ (MV/m)
Vacío	1	$\infty$
Aire seco	1.00059	3
Teflón	2.1	60
Cuarzo	3.78	8
Papel	3.7	15
Agua	80	—
Titanato de estroncio	233	8
Titanato de bario	10000	—

**Ejemplo 16** *Se construye un condensador plano-paralelo con papel de  $d = 0.14$  mm de espesor entre láminas de aluminio de superficie  $S = 15 \times 480$  mm<sup>2</sup>. Calcular:*

1. La capacidad
2. Diferencia de potencial máxima
3. Si se conecta a una d.d.p. de 180V determinar  $E$  y  $E_0$ .

**Solución:**

1. La capacidad vale

$$\begin{aligned} C &= \frac{\epsilon S}{d} \\ &= \frac{3.7\epsilon_0 \times 15 \times 480 \times 10^{-6}}{0.14 \times 10^{-3}} = 1.6 \text{ nF.} \end{aligned}$$

2. La d.d.p. máxima es

$$\begin{aligned} V_{\max} &= E_{\max} d \\ &= 15 \times 10^6 \times 0.14 \times 10^{-3} \\ &= 2.1 \times 10^3 \text{ V.} \end{aligned}$$

3. El campo eléctrico cuando el condensador está cargado con el dieléctrico es

$$E = \frac{V}{d} = \frac{180}{0.14 \times 10^{-3}} = 1.3 \times 10^6 \text{ V/m,}$$

y para el condensador vacío

$$\begin{aligned} E_0 &= \epsilon_r E = 3.7 \times 1.3 \times 10^6 \\ &= 4.8 \times 10^6 \text{ V/m.} \end{aligned}$$

## 4.11 Ley de Gauss en medios dieléctricos

Como consecuencia de la presencia de medios dieléctricos es necesario reconsiderar la forma de la ley de Gauss que hemos estado utilizando hasta este momento:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

Recordamos que en esta ecuación  $Q_{\text{enc}}$  representa la carga encerrada dentro de la superficie gaussiana  $S$ . Cuando estamos en el vacío se trata siempre de carga libre, sin embargo cuando existen medios dieléctricos la carga encerrada puede ser tanto carga libre como carga de polarización, por tanto, escribiremos ahora la ley de Gauss para el campo  $\vec{E}$  como

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{\text{enc}}^f + Q_{\text{enc}}^p)$$

donde  $Q_{\text{enc}}^f$  y  $Q_{\text{enc}}^p$  son, respectivamente, la carga libre y de polarización encerradas. Desde un punto de vista teórico, esta ecuación muestra de forma explícita cómo las fuentes del campo eléctrico son todas las cargas, tanto las libres como las de polarización. No obstante, desde un punto de vista práctico, no tiene apenas utilidad, ya que normalmente sólo se conocen las cargas libres.

Para el cálculo del campo eléctrico en problemas que involucren materiales dieléctricos, y siempre



que haya la simetría necesaria, puede utilizarse la ley de Gauss, pero expresada en términos del vector desplazamiento, dicha ley se escribe como

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}}^f$$

Esta ecuación indica que las únicas fuentes de  $\vec{D}$  son las cargas libres. En consecuencia, su valor no depende del dieléctrico particular que tengamos en el problema. Una vez determinado  $\vec{D}$ , el campo eléctrico se obtiene a través de la expresión  $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon$ . Como aplicación de todo esto consideramos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 17** Calcular el vector desplazamiento y el campo eléctrico creado por una carga puntual  $q'$  inmersa en un dieléctrico infinito de permitividad  $\epsilon$ . Determinar la fuerza ejercida por  $q'$  sobre otra carga puntual  $q$ .

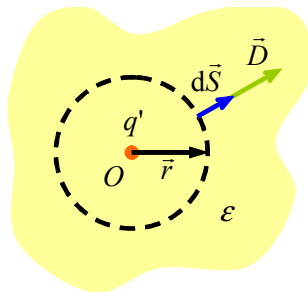


Figura 4.29:

**Solución:**

Como el dieléctrico es infinito, el problema tiene simetría esférica

$$\vec{D} = D(r) \hat{r},$$

y se puede usar Gauss para calcular  $\vec{D}$ :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}}^f$$

El flujo del vector desplazamiento a través de una esfera de radio  $r$  centrada en la carga  $q'$  es

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint_S dS = D4\pi r^2,$$

y la carga libre encerrada en dicha esfera es  $Q_{\text{enc}}^f = q'$ .

Sustituyendo los dos últimos resultados en la ley de Gauss, despejando  $D$  y poniendo el resultado en forma vectorial se obtiene

$$\vec{D} = \frac{q'}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Calculamos ahora el campo eléctrico como

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{q'}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}.$$

Obsérvese que el resultado obtenido es el mismo que en el vacío con la sustitución de  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ .

Si ahora colocamos una carga puntual  $q$ , la fuerza que la carga fuente  $q'$  ejerce sobre ella es

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = q\vec{E} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r},$$

que es la expresión de la ley de Coulomb en el vacío donde se ha cambiado  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ .

**Ejemplo 18** Un conductor esférico de radio  $a$  tiene una carga total  $Q$ . Dicho conductor está recubierto con un material aislante de permitividad  $\epsilon_1$ , forma esférica y concéntrica con él, que se extiende desde  $r = a$  hasta  $r = b$ . Desde  $r = b$  hasta el infinito hay un segundo material aislante de permitividad  $\epsilon_2$ . Hallar  $\vec{D}$  en cada punto del espacio.

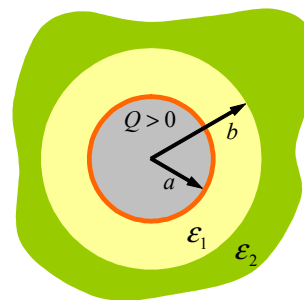


Figura 4.30:

**Solución:**

Para calcular el vector desplazamiento podemos aplicar la ley de Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}}^f.$$

Teniendo en cuenta que el problema tiene simetría esférica y por tanto  $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ , el primer miembro de esta ecuación vale

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint_S dS = D4\pi r^2.$$

Para calcular la carga encerrada consideraremos tres regiones:

- $r < a$  (interior de la esfera interna). En este caso  $Q_{\text{enc}}^f = 0$ , luego

$$\vec{D}_0 = 0.$$

- $a < r < b$  (dieléctrico 1). Ahora  $Q_{\text{enc}}^f = Q$ , por tanto

$$\vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

- $b < r$  (dieléctrico 2). En este caso  $Q_{\text{enc}}^f = Q$ , entonces

$$\vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Se observa que el cálculo de  $\vec{D}$  es independiente de las permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .

## 4.12 Energía eléctrica en problemas con dieléctricos

### Energía en función de la carga:

En el vacío se obtuvo una expresión para la energía de un sistema de cargas

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo esp.}} \rho_{\tau} V d\tau.$$

En aquel caso no se hizo ninguna distinción sobre si las cargas eran libres o ligadas, simplemente calculamos la energía reversible del sistema, es decir, la energía que se puede extraer del sistema.

De la misma manera, al calcular la energía de un sistema de cargas en presencia de medios dieléctricos, tendremos en cuenta la energía útil o energía extraíble del sistema, ya que es la energía sobre la que se tiene control. Dicha energía es la asociada a las cargas libres, por tanto, escribiremos

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo esp.}} \rho_{\tau f} V d\tau.$$

En realidad el efecto de las cargas ligadas también es tenido en cuenta a través del potencial  $V$ .

### Energía en función del campo:

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo esp.}} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{\text{todo esp.}} \epsilon |\vec{E}|^2 d\tau.$$

Si consideramos un volumen elemental  $d\tau$  la energía contenida en este volumen será

$$dU_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 d\tau,$$

de donde podemos definir la densidad de energía (energía por unidad de volumen) como

$$u_e = \frac{dU_e}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2.$$

Podemos entonces expresar la energía en función de la densidad de energía como

$$U_e = \iiint_{\text{todo esp.}} u_e d\tau.$$

**Ejemplo 19** Determinar la energía y la capacidad de un condensador esférico de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  totalmente lleno con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  y cargado con una carga  $Q$ .

### Solución:

Supondremos que la esfera interna está cargada positivamente y la esfera externa negativamente. Debido a la simetría del problema el vector desplazamiento será de la forma

$$\vec{D} = D(r)\hat{r}.$$

Aplicaremos entonces la ley de Gauss tomando una esfera gaussiana de radio  $r$ :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}}^f.$$

El primer miembro de esta ecuación vale

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint_S dS = D(r)4\pi r^2.$$

Para calcular la carga encerrada dividiremos el espacio en tres regiones:

- $r < a$  (interior de la esfera interna). En este caso  $Q_{\text{enc}}^f = 0$ , luego

$$\vec{D} = 0.$$

- $a < r < b$  (espacio entre conductores). Ahora  $Q_{\text{enc}}^f = Q$ , por tanto

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

- $b < r$  (espacio exterior). En este caso  $Q_{\text{enc}}^f = Q - Q = 0$ , entonces

$$\vec{D} = 0.$$

En la región  $a < r < b$  la densidad de energía vale

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon r^4}$$

y la energía

$$U_e = \iiint u_e d\tau = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left( -\frac{1}{r} \right)_a^b,$$

de donde

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Si entre las placas hubiera vacío, la energía almacenada en el condensador sería

$$U_{e0} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Por tanto

$$\frac{U_e}{U_{e0}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$$

y como  $\epsilon > \epsilon_0$  entonces  $U_{e0} > U_e$ .

Una vez calculada la energía, la capacidad puede obtenerse a partir de la relación

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

de donde

$$C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{U_e} = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}.$$

Se observa que  $C = \epsilon C_0$ .