

Índice General

7 Fuentes del campo magnético ¹	2
7.1 Introducción	2
7.2 Ley de Biot y Savart	2
7.3 Ley de la circulación de Ampère	6
7.3.1 Aplicaciones de la Ley de Ampère	8
7.4 Flujo magnético y ley de Gauss para \vec{B}	11
7.4.1 Flujo magnético:	11
7.4.2 Ley de Gauss para \vec{B}	12
7.5 Magnetismo en la materia	12
7.5.1 Corrientes de magnetización y vector magnetización	13
7.5.2 Intensidad de campo magnético \vec{H}	13
7.5.3 Clasificación de las sustancias magnéticas	14
7.5.4 Ferromagnetismo	15

¹Versión 2010

Tema 7

Fuentes del campo magnético ¹

7.1 Introducción

Hemos visto que un campo magnético produce fuerzas sobre cargas móviles, tanto cuando estas cargas se consideran aisladamente como cuando constituyen una corriente que circula por un circuito. En este último caso, las fuerzas sobre el circuito pueden producir pares que fuerzan al giro del circuito. En este tema estudiaremos cómo las cargas en movimiento o las corrientes producen campos magnéticos.

Ya sabemos que los primeros sistemas que fueron observados por el hombre como productores de campos magnéticos eran los imanes. Sin embargo, en 1819 **Oersted** observó que cuando colocaba una brújula en las proximidades de un hilo conductor por el que circulaba una corriente, la aguja de la brújula se desviaba. Este efecto también sucede cuando en las proximidades de la brújula se coloca un imán.

De ahí, se dedujo que si ambos (imán y circuito) producían el mismo efecto lo hacían mediante el mismo sistema, es decir, ambos creaban un **campo magnético**. Esta observación fue la primera que estableció una conexión íntima entre la electricidad (la corriente) y el magnetismo, que hasta ese momento eran ciencias separadas.

7.2 Ley de Biot y Savart

Después de los descubrimientos de Oersted, **Biot** y **Savart** observaron que **una corriente eléctrica es capaz de ejercer fuerza sobre cualquier imán**.

Realizaron una serie de experimentos con corrientes llegando a una ley que lleva su nombre y

que resulta ser el equivalente en Magnetostática a la ley de Coulomb en la Electrostática.

Campo magnético creado por un elemento diferencial de corriente filiforme:

Supongamos un hilo conductor recorrido por una corriente I tal y como muestra la figura 7.1.

Consideremos un elemento diferencial de longitud $d\vec{\ell}'$ tal que \vec{r}' es el vector de posición de este elemento diferencial de longitud respecto de un origen de coordenadas O .

Consideremos también un punto de observación P definido mediante el vector de posición \vec{r} .

El vector que determina la posición relativa del punto de observación P respecto del elemento $d\vec{\ell}'$ vendrá dado por $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ y su correspondiente vector unitario será $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$.

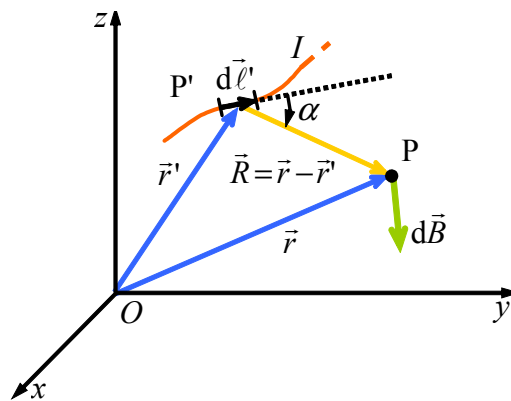


Figura 7.1: Campo magnético creado por un elemento diferencial de corriente filiforme.

Los experimentos llevados a cabo por **Biot y Sa-**

varit mostraron que el campo magnético $d\vec{B}$ en un punto P creado por un elemento diferencial de corriente $d\vec{\ell}'$ viene dado por

$$d\vec{B} = K_m \frac{Id\vec{\ell}' \times \hat{R}}{R^2}$$

El valor de la constante K_m depende del sistema de unidades usado. En el SI vale:

$$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T m/A}$$

La cantidad μ_0 se la conoce como **permeabilidad del vacío** y su valor, usando las expresiones anteriores es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m/A}$$

Por lo tanto, la ecuación de Biot y Savart puede escribirse como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell}' \times \hat{R}}{R^2}$$

Es importante señalar que el vector $d\vec{B}$ es perpendicular tanto a $d\vec{\ell}'$ como a \vec{R} .

Analogías y diferencias entre la ley de Coulomb y la de Biot-Savart:

Obsérvese las similitudes (y diferencias) entre la expresión anterior y una similar para la ley de Coulomb:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' \hat{R}}{R^2}$$

- En ambos casos hay una constante que depende del sistema de unidades y que multiplica a la expresión: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ para el caso de la fuerza eléctrica y $\frac{\mu_0}{4\pi}$ para el caso de la fuerza magnética.
- En un caso el elemento que produce el campo es dq' y en el otro es $Id\vec{\ell}'$.
- Ambas tienen una dependencia de $\frac{1}{R^2}$ con la distancia.
- La dirección de $d\vec{E}$ es radial respecto a la carga fuente, mientras que la de $d\vec{B}$ es perpendicular al plano formado por $Id\vec{\ell}'$ y \vec{R} .

Campo magnético creado por una corriente filiforme:

En un caso real no existen elementos de corriente aislados sino circuitos.

Por ello, para hallar el campo magnético producido por una corriente que sigue un hilo definido por la curva C' , la expresión a usar es la suma de todos y cada uno de los elementos de corriente que contribuyen a ella, es decir

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{Id\vec{\ell}' \times \hat{R}}{R^2}$$

Si el valor de la corriente es constante

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\vec{\ell}' \times \hat{R}}{R^2}$$

con la integral extendida a toda la distribución de corriente.

Ejemplo 1 Hallar el vector inducción magnética \vec{B} creado por una corriente recta I de longitud finita L .

Solución:

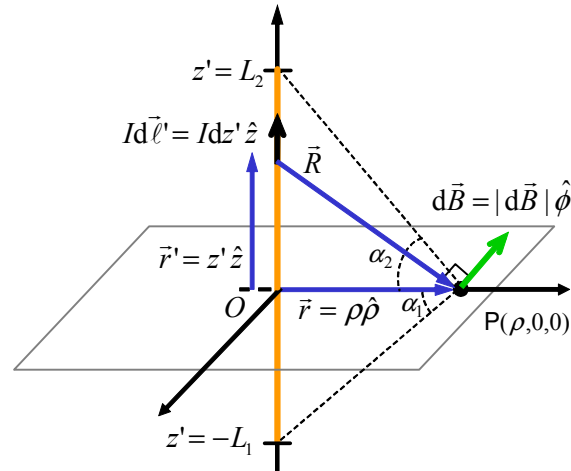


Figura 7.2: Inducción magnética \vec{B} creada por una corriente recta I de longitud finita L . Geometría del problema.

Dada la forma del problema usaremos coordenadas cilíndricas. Hacemos que el hilo que transporta

la corriente coincida con el eje z y tomamos el origen de coordenadas en un punto de ese eje, pero de manera que (y así no perdemos generalidad) el punto donde se va a calcular el campo tenga $z = 0$ y $\phi = 0$. El problema se puede ver en la figura 7.2. Aunque este circuito no es completo, es decir, no es cerrado y por lo tanto no es real, sirve como elemento básico para analizar circuitos de forma compleja. De la figura 7.2 podemos escribir las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho \hat{\rho}, \\ \vec{r}' &= z' \hat{z}, \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' = \rho \hat{\rho} - z' \hat{z}, \\ R^2 &= \rho^2 + z'^2, \\ d\vec{\ell}' &= dz' \hat{z},\end{aligned}$$

luego

$$d\vec{\ell}' \times \vec{R} = dz' \hat{z} \times (\rho \hat{\rho} - z' \hat{z}) = \rho dz' \hat{\phi}$$

y aplicando la ley de Biot y Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell}' \times \hat{R}}{R^2} = \frac{\mu_0 I \rho \hat{\phi}}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Integrales como la de la expresión anterior ya se han resuelto en Electroestática, al hallar el campo eléctrico, por lo que, sin repetir todo el proceso se obtiene

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho \hat{\phi}}{4\pi} \left[\frac{z'}{\rho^2(\rho^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-L_1}^{L_2}$$

de donde

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[\frac{L_2}{(\rho^2 + L_2^2)^{1/2}} + \frac{L_1}{(\rho^2 + L_1^2)^{1/2}} \right] \hat{\phi}$$

o bien en función de los ángulos α_1 y α_2 definidos en la figura 7.2

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) \hat{\phi}$$

y como se ve de la expresión anterior, \vec{B} es siempre perpendicular al plano formado por la corriente y el vector \vec{R} .

A partir de la expresión obtenida podemos hallar el campo creado por un hilo de longitud infinita

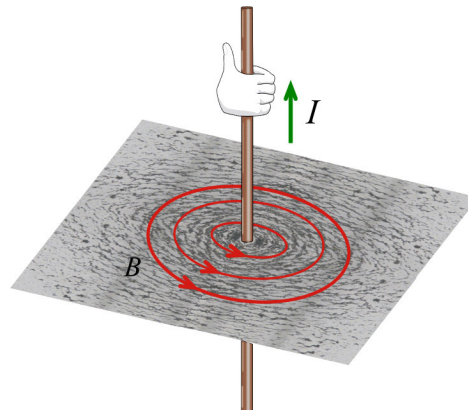
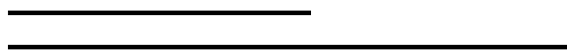


Figura 7.3: Las limaduras de hierro espolvoreadas entorno a un hilo de corriente infinito se alinean de manera tangente a las líneas de campo que son circunferencias cuyo eje coincide con la corriente.

recorrido por una intensidad I . En este caso $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow -\infty$, con lo que $\alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $\alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y el campo magnético para este caso, sería

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}.$$

Esta expresión muestra que para una corriente de longitud infinita las líneas de campo de \vec{B} son circunferencias cuyo eje coincide con la corriente, tal y como se muestra en la figura 7.3.



Ejemplo 2 Hallar la fuerza que se ejercen entre sí dos corrientes. La primera de ellas tiene una longitud infinita y un valor de I' . La segunda tiene una longitud L , un valor de la corriente I , es paralela a la anterior y está situada a una distancia ρ .

Solución:

Elegimos como sistema de coordenadas uno de tipo cilíndrico con la primera de las corrientes situada en el eje z . Esta corriente de longitud infinita crea un campo magnético sobre la segunda, de valor

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi \rho} \hat{\phi}$$

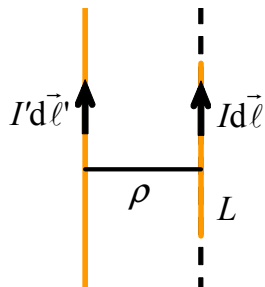


Figura 7.4: Fuerza entre dos líneas de corriente. Geometría del problema.

La expresión de la fuerza creada por un campo magnético sobre una corriente I era

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

y como \vec{B} es uniforme en cada trozo del segundo hilo

$$\vec{F} = I \left(\int d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \hat{z} \times \left(\frac{\mu_0 I' L}{2\pi\rho} \hat{\phi} \right)$$

de donde

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I I' L}{2\pi\rho} \hat{\rho}$$

En este caso en que hemos supuesto que ambas corrientes tienen el mismo sentido, la dirección de la fuerza es $-\hat{\rho}$ es decir, atractiva.

La expresión anterior puede servir para definir el **amperio**. Si los dos hilos conducen la misma corriente, la longitud del segundo hilo es 1 m, la distancia respecto al primero es 1 m y la fuerza es 2×10^{-7} N, las corrientes que circulan tienen un valor de 1 A.

Ejemplo 3 Una espira circular tiene un valor del radio a y por ella circula una corriente I . Hallar la inducción magnética en un punto de su eje y expresarla en función del momento dipolar magnético de la espira.

Solución:

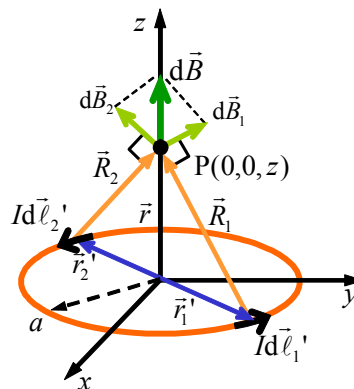


Figura 7.5: Inducción magnética en un punto del eje de una espira circular. Geometría del problema.

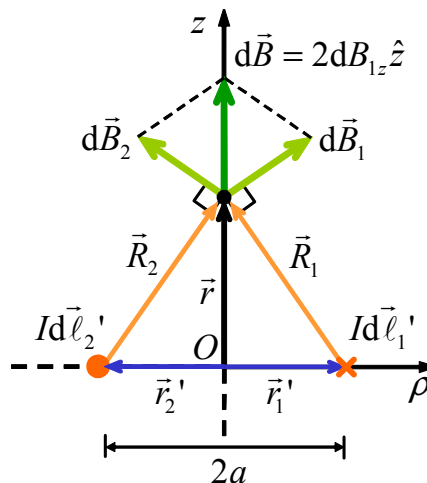


Figura 7.6: Inducción magnética en un punto del eje de una espira circular. Geometría del problema.

En la figura 7.5 se puede ver la espira circular de radio a que yace en el plano xy . El eje z coincide con el eje de la espira y es en los puntos de este eje donde hay que hallar la inducción magnética. Tomando dos elementos de corriente simétricos respecto al origen, se observa que la inducción magnética total producida por ambos tiene dirección \hat{z} . Por tanto, la inducción magnética debida al anillo completo tendrá también dirección \hat{z} . La inducción magnética debida a los dos elementos de corriente

simétricos es:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = 2dB_{1z} \hat{z} = 2 \left(d\vec{B}_1 \cdot \hat{z} \right) \hat{z}$$

donde

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}' \times \vec{R}}{R^3}$$

Observando la figura

$$\begin{aligned} \vec{r} &= z \hat{z}, \\ \vec{r}' &= a \hat{\rho}, \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - a \hat{\rho}, \\ R^3 &= (a^2 + z^2)^{3/2}, \\ d\vec{\ell}' &= a d\phi' \hat{\phi}, \end{aligned}$$

de donde

$$d\vec{\ell}' \times \vec{R} = a d\phi' \hat{\phi} \times (z \hat{z} - a \hat{\rho}) = a d\phi' z \hat{\rho} + a^2 d\phi' \hat{z}$$

luego

$$\begin{aligned} |d\vec{B}| &= 2 \left(d\vec{B}_1 \cdot \hat{z} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^3} \left(d\vec{\ell}' \times \vec{R} \right) \cdot \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^3} (a d\phi' z \hat{\rho} + a^2 d\phi' \hat{z}) \cdot \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R^3} d\phi' \end{aligned}$$

Integrando

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi'$$

de donde

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

En el centro del círculo $z = 0$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}$$

mientras que a gran distancia del disco $z \gg a$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \hat{z}$$

Como el momento magnético \vec{m} de la espira es un vector cuya magnitud es el producto de la intensidad de la espira por su superficie IS y su dirección es perpendicular a la superficie de la espira con el

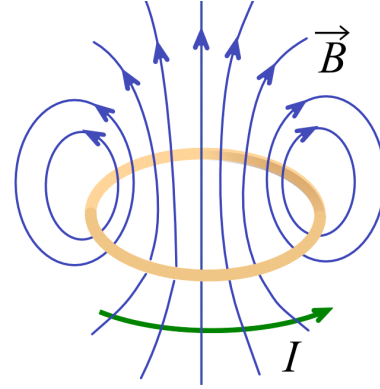


Figura 7.7: Líneas de campo magnético de una espira de corriente circular.

sentido de avance de un tornillo que gire en el mismo sentido que la intensidad, es decir,

$$\vec{m} = I \vec{S} = I\pi a^2 \hat{z}$$

la inducción magnética creada por la espira en un punto de su eje se puede expresar como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

7.3 Ley de la circulación de Ampère

Vimos en Electroestática la existencia de una ley, la de Gauss, que relacionaba las fuentes del campo con el valor de éste y que en casos de especial simetría permitía calcular el vector campo eléctrico de forma sencilla.

En Magnetostática existe una ley similar aunque con una formulación bastante diferente denominada ley de Ampère.

Hemos resuelto, usando la ley de Biot y Savart, el problema de calcular la inducción magnética \vec{B} creada por un hilo recto y de longitud infinita recorrido por una intensidad I . El resultado obtenido

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}$$

muestra que las líneas de campo de \vec{B} son circunferencias concéntricas que yacen en planos perpendiculares al eje del hilo y con centro en éste.

Si calculamos $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ tomando como curva C una cualquiera de estas circunferencias se obtiene,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} (\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}) d\ell \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \oint_C d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} 2\pi\rho = \mu_0 I.\end{aligned}$$

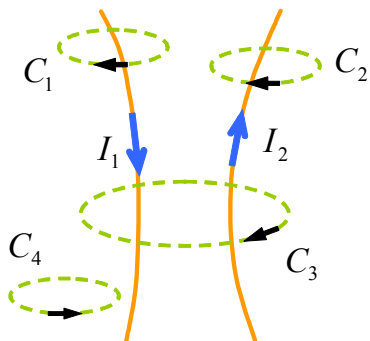
Se puede demostrar que este resultado, obtenido para el caso de una corriente recta y de longitud infinita, y tomando como curva C una circunferencia concéntrica con ella, tiene en realidad un carácter mucho más general: el mismo resultado se obtendría eligiendo cualquier curva cerrada así como cualquier configuración de corrientes.

De esta manera, podemos enunciar la ley de la circulación de Ampère, de forma matemática como

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}}$$

donde C indica cualquier curva cerrada e I_{enc} es la intensidad total encerrada por esa curva. Dada una curva C se obtendría el valor de I_{enc} sumando algebraicamente (es decir, cada una con su signo) todas las corrientes que atraviesan la superficie encerrada por C .

Ejemplo 4 Sean dos corrientes $I_1 = I$ e $I_2 = I$ que tienen los sentidos marcados en la figura. Calcular la circulación de \vec{B} a lo largo de cada una de las curvas representadas en la figura.



Solución:

a) La curva C_1 encierra la corriente I_1 y se recorre en la dirección marcada en la propia curva. La corriente I_1 tiene la misma dirección que el vector superficie (perpendicular a la superficie encerrada

y con sentido de avance del tornillo que gire como C) por lo que

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

La corriente I_2 influye en el valor del campo pero no en su circulación.

b) La curva C_2 encierra la corriente I_2 y se recorre en la dirección marcada en la propia curva. La corriente I_2 tiene dirección opuesta al vector superficie (perpendicular a la superficie encerrada y con sentido de avance del tornillo que gire como C_2) por lo que

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\mu_0 I$$

La corriente I_1 influye en el valor del campo pero no en su circulación.

c) La curva C_3 encierra las corrientes I_1 e I_2 y se recorre en la dirección marcada en la propia curva. La corriente total encerrada sería $I_1 + I_2 = I - I = 0$ por lo que

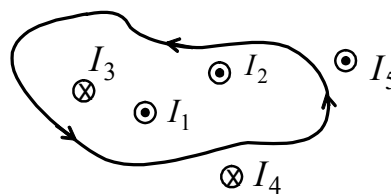
$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

La situación de ambas corrientes, siempre que estén dentro de C_3 , influye en el valor del campo pero no en su circulación.

d) La curva C_4 no encierra ninguna corriente

$$\oint_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Ejemplo 5 ¿Cuál es la circulación de \vec{B} a lo largo de la curva señalada en la figura?



Solución:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

7.3.1 Aplicaciones de la Ley de Ampère

La ley circuital de Ampère se puede emplear para, en casos de gran simetría y conociendo la distribución de corrientes, hallar la inducción magnética \vec{B} .

En este sentido su aplicación práctica sigue un camino paralelo a la ley de Gauss en Electrostática.

Como sucedía allí, el principal problema para hallar la inducción magnética está en la elección correcta de la curva C . Para poder aplicar la ley con provecho se deben elegir curvas en las que \vec{B} sea constante y con dirección bien paralela, bien perpendicular a la curva C , con objeto de simplificar el proceso.

Ejemplo 6 Hallar la inducción magnética \vec{B} creada por un hilo recto de longitud infinita que transporta una corriente I .

Solución:

Por consideraciones de simetría, la inducción magnética debida a un hilo infinito coincidente con el eje z tendrá dirección $\hat{\phi}$ y dependerá sólo de la distancia del hilo al punto de observación, luego

$$\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}.$$

La ley de Ampère establece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Tomamos como curva amperiana una circunferencia de radio ρ , contenida en el plano $x-y$ y centrada en el origen. Además, tomamos como sentido positivo de la circunferencia $+\hat{\phi}$, por tanto

$$d\vec{\ell} = d\ell\hat{\phi}.$$

La circulación resulta

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint_C B(\rho)\hat{\phi} \cdot d\ell\hat{\phi} \\ &= \oint_C B(\rho)d\ell = B(\rho) \oint_C d\ell = B(\rho)2\pi\rho. \end{aligned}$$

La corriente encerrada vale

$$I_{\text{enc}} = I.$$

Sustituyendo las dos últimas expresiones en la ley de Ampère se obtiene

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

Teniendo en cuenta el análisis inicial de la simetría del problema, el resultado buscado es

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}.}$$

Ejemplo 7 Un hilo conductor recto de longitud infinita y radio a conduce una corriente continua I_0 que está distribuida uniformemente a través de su sección recta. Hallar el campo magnético en todo punto del espacio.

Solución:

Por consideraciones de simetría, el campo buscado tiene la forma

$$\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}.$$

Calcularemos \vec{B} mediante la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Igual que en el problema del hilo delgado, la amperiana será una circunferencia. En este caso, el cable tiene grosor finito, por tanto tendremos que distinguir dos regiones: el interior del cable ($\rho < a$); y el exterior ($\rho > a$).

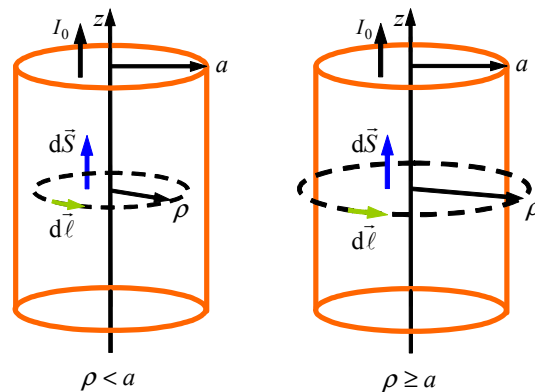


Figura 7.8: Caminos de integración para el cálculo del campo \vec{B} creado por un hilo conductor de longitud infinita y radio a .

Caso $\rho < a$:

La circulación vale

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B(\rho)\hat{\phi} \cdot d\ell\hat{\phi} = \oint_C B(\rho)d\ell$$

$$= B(\rho) \int_C d\ell = B(\rho)2\pi\rho.$$

Para determinar la corriente encerrada, comenzaremos calculando la densidad de corriente. Teniendo en cuenta que la corriente está uniformemente distribuida

$$\vec{J} = \frac{I_0}{\pi a^2} \hat{z}$$

Por tanto, la corriente encerrada vale

$$I_{\text{enc}} = \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \iint_s dS = \frac{I_0}{\pi a^2} \pi \rho^2 = I_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ley de Ampère se obtiene:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi}$$

Caso $\rho > a$:

La circulación tiene la misma expresión que en el caso $\rho < a$, es decir

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(\rho)2\pi\rho.$$

Ahora la corriente encerrada será la corriente total

$$I_{\text{enc}} = I_0,$$

Teniendo esto en cuenta, se obtiene

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

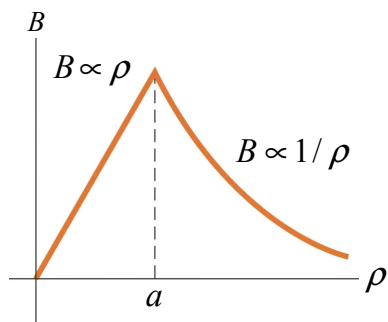


Figura 7.9: Dependencia con ρ del campo \vec{B} debido a un hilo conductor de longitud infinita y radio a .

Ejemplo 8 Hallar la inducción magnética en todo punto del espacio, creada por un hilo conductor recto, de longitud infinita y de sección recta circular con radio a que conduce una corriente continua distribuida en su sección recta de forma no uniforme según la expresión $J = J_0\rho/a$.

Solución:

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{3\rho} \hat{\phi} \quad \text{para } \rho > a$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \rho^2}{3a} \hat{\phi} \quad \text{para } 0 < \rho < a$$

Ejemplo 9 Un solenoide recto se forma al enrollar un hilo conductor alrededor de un cilindro de sección recta circular de radio a . Hallar la inducción magnética creada por un solenoide de longitud infinita, por el que circula una corriente I , con una densidad de n espiras por unidad de longitud.

Solución:

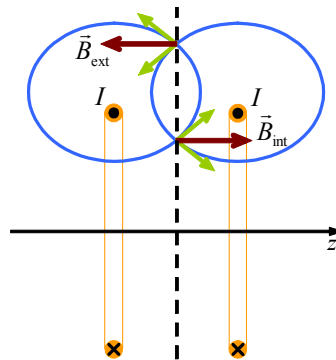


Figura 7.10: Líneas de campo magnético creado por dos espiras.

Según la simetría del problema, la inducción magnética tendrá la dirección del eje del solenoide. Denotaremos por B_{int} la inducción en el interior del solenoide y por B_{ext} la inducción en el exterior, luego

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} B_{\text{int}} \hat{z} & \rho < a \\ -B_{\text{ext}} \hat{z} & \rho > a \end{cases}$$

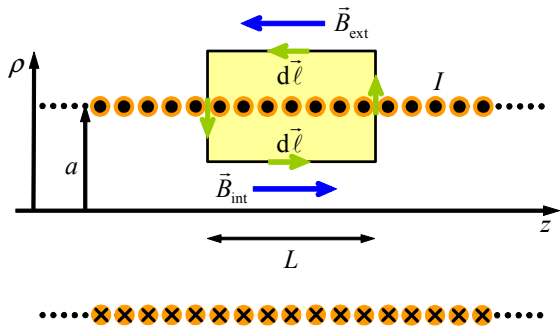


Figura 7.11: Trayectoria de integración utilizada para calcular el campo magnético \vec{B} producido por un solenoide de longitud infinita.

Aplicamos la ley de Ampère tomando como camino de integración el rectángulo de la figura 7.11, la circulación resulta

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}}L + B_{\text{ext}}L$$

y la corriente encerrada

$$I_{\text{enc}} = nIL$$

por tanto

$$B_{\text{int}}L + B_{\text{ext}}L = \mu_0 nIL$$

de donde

$$B_{\text{int}} + B_{\text{ext}} = \mu_0 nI$$

Se observa que la expresión anterior no depende ρ , por otra parte, el campo en el infinito debe ser cero, por tanto $B_{\text{ext}} = 0$, de donde

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 nI \hat{z} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

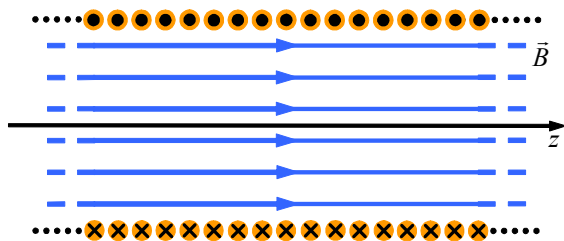


Figura 7.12: Inducción magnética creada por un solenoide de longitud infinita.



Ejemplo 10 Hallar la inducción magnética creada por una bobina toroidal. Una bobina toroidal se consigue arrollando un conductor que transporta una corriente I alrededor de un anillo (toroide).

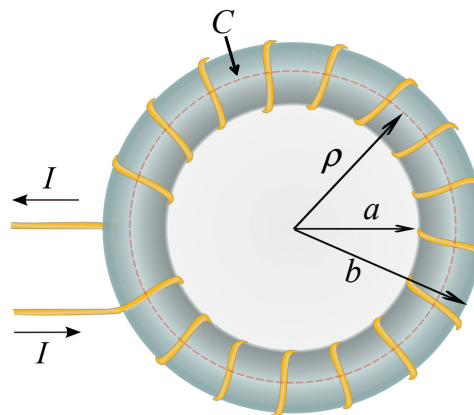


Figura 7.13: Bobina toroidal. Trayectoria de integración para el cálculo de la inducción magnética.

Solución:

El cálculo exacto de la inducción magnética creada por una bobina toroidal debe hacerse aplicando la ley de Boit-Savart. Aquí, haremos un cálculo aproximado. Para ello, adoptaremos coordenadas cilíndricas y supondremos que

$$\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}.$$

Aplicaremos ahora la ley de Ampère. Consideraremos amperianas circulares de radio ρ , centradas en el eje del anillo y que se encuentran en el plano que contiene al eje central del toroide (eje del arrollamiento). Denotando por a y b a los radios internos y externo del toroide, respectivamente, se distinguen tres zonas: $\rho < a$; $a < \rho < b$ y $b < \rho$.

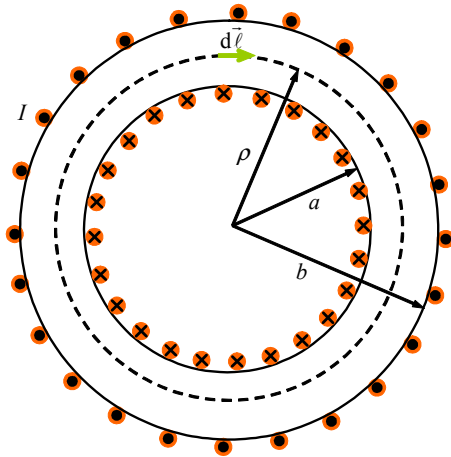


Figura 7.14: Trayectoria de integración para el cálculo de la inducción magnética.

En los tres casos, la circulación vale

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = B2\pi\rho$$

Para la corriente encerrada tenemos:

$$I_{\text{enc}} = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ NI & a < \rho < b \\ 0 & b < \rho \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en la ley de Ampère, se obtiene

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \hat{\phi} & a < \rho < b \\ 0 & b < \rho \end{cases}$$

En algunas situaciones, conviene aproximar esta expresión por una constante. Esto puede hacerse sin más que reemplazar la coordenada ρ por el radio medio del toroide, es decir

$$\rho \simeq \frac{a+b}{2},$$

entonces

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{\pi(a+b)} \hat{\phi}$$

7.4 Flujo magnético y ley de Gauss para \vec{B}

7.4.1 Flujo magnético:

El flujo magnético se define de la misma manera que el flujo eléctrico.

Supongamos que tenemos una superficie S a la que dividimos en elementos infinitesimales $d\vec{S}$ de forma que este vector sea perpendicular a la superficie en cada punto.

El flujo magnético de \vec{B} a través de $d\vec{S}$ se define como

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

El flujo a través de toda la superficie se obtendría por integración, de manera que

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

La unidad de flujo magnético es el *weber*, de manera que $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \times \text{m}^2$.

Ejemplo 11 Hallar el flujo magnético a través de la sección circular de un solenoide con un radio interno $a = 7,5 \text{ mm}$, un número de vueltas por unidad de longitud $n = 2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ y por el que pasa una corriente $I = 320 \text{ mA}$.

Solución:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS = \mu_0 n I \pi a^2 = 1,4 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

Ejemplo 12 Una espira rectangular de ancho a y de altura b se encuentra a una distancia c de un hilo infinito que transporta una corriente I . El hilo es paralelo al lado b de la espira. Hallar el flujo magnético a través de la espira.

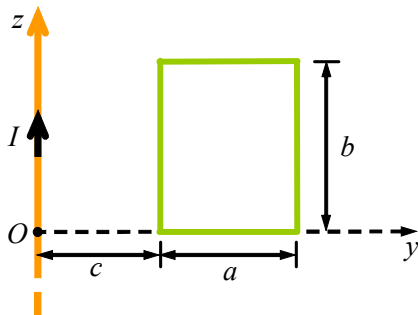


Figura 7.15: Flujo magnético a través de una espira rectangular debido a un hilo infinito de corriente. Geometría del problema.

Solución:

Según la definición de flujo, tendremos que calcular

$$\Phi_m = \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B}_{\text{hilo}} \cdot d\vec{S}.$$

La inducción magnética producida por un cable de longitud infinita vale

$$\vec{B}_{\text{hilo}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}.$$

En el plano de la espira se cumple $\rho = y$ y $\hat{\phi} = -\hat{x}$, por tanto

$$\vec{B}_{\text{hilo}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x}.$$

El diferencial de superficie para la espira es $d\vec{S} = -dydz \hat{x}$, por tanto el flujo será

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B}_{\text{hilo}} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_{\text{espira}}} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x} \right) \cdot (-dydz \hat{x}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^b dz \int_c^{c+a} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(\frac{c+a}{c} \right) \end{aligned}$$

7.4.2 Ley de Gauss para \vec{B}

En Electroestática veíamos que el flujo del campo eléctrico era proporcional a la carga eléctrica encerrada, es decir, el número de líneas de campo que

salen a través de una superficie cerrada sólo dependía de la carga neta encerrada.

La situación es distinta en el caso de los campos magnéticos. Las líneas de campo de estos últimos forman lazos cerrados por lo que, cuando consideramos una superficie cerrada que rodea un volumen por cada línea de fuerza que entra en el volumen debe haber otra que sale y el flujo será nulo:

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

La ecuación anterior muestra que la carga magnética encerrada en un volumen, cualquiera que éste sea, es siempre nula, lo que implica que no existen las cargas magnéticas o lo que es lo mismo, no hay polos magnéticos aislados. Las fuentes más simples de campo magnético son los dipolos magnéticos.

7.5 Magnetismo en la materia

Los átomos poseen momentos magnéticos debidos tanto al movimiento orbital de los electrones como al spin. Estos momentos magnéticos tienen un efecto conjunto de modo que en la mayoría de los casos se producen interferencias de unos con otros dando como consecuencia un momento magnético total nulo. Sin embargo, determinadas sustancias presentan momentos magnéticos totales distintos de cero incluso en ausencia de campos magnéticos externos, es decir, tienen momentos magnéticos permanentes.

Mediante el uso de la Física Clásica no es posible estudiar los orígenes del magnetismo en la materia de forma satisfactoria; para ello es necesario recurrir a la Física Cuántica. En cambio si es posible describir los aspectos más básicos del magnetismo en la materia apoyándonos en observaciones experimentales y en explicaciones de tipo fenomenológico.

De esta manera es posible clasificar la casi totalidad de los materiales frente a su comportamiento magnético en tres categorías:

- **Materiales diamagnéticos:** no tienen momentos magnéticos permanentes. Si a estos materiales se les somete a un campo magnético externo, aparecen momentos magnéticos inducidos. En realidad estos momentos magnéticos inducidos aparecen en todos los materiales por

lo que se puede decir que todos los materiales son diamagnéticos. Sin embargo, el efecto diamagnético es tan débil frente a otros efectos que su presencia pasa desapercibida cuando los materiales presentan momentos magnéticos permanentes.

- **Materiales paramagnéticos:** El paramagnetismo se produce cuando al aplicar un campo magnético externo los dipolos magnéticos permanentes sufren una alineación parcial con este campo externo. En estos materiales, la interacción entre los momentos magnéticos permanentes es débil de manera que se encuentran orientados aleatoriamente. La alineación parcial que sufren los dipolos en presencia de campo externo crece con la intensidad del campo y decrece con el aumento de temperatura.
- **Materiales ferromagnéticos:** Su comportamiento es muy complejo. Presentan una fuerte interacción entre los momentos magnéticos vecinos por lo que el alineamiento, incluso en ausencia de campo magnético externo, es muy fuerte. De esta manera pueden formar imanes permanentes.

7.5.1 Corrientes de magnetización y vector magnetización

El estudio de los materiales magnéticos sigue un camino muy similar al de los materiales dieléctricos.

Supongamos que colocamos algún tipo de material dentro de un campo magnético. Por ejemplo, podríamos situar un material de forma cilíndrica en el interior de un solenoide.

El material se magnetiza de manera que las corrientes atómicas del cilindro se alinean de manera que sus momentos magnéticos respectivos quedan paralelos al eje del cilindro.

Debido a la cancelación recíproca de las corrientes entre momentos magnéticos vecinos la corriente neta en cualquier punto del interior del material es nula, quedando sólo una corriente neta de naturaleza superficial como muestra la figura 7.16, por lo que el material magnético se comportaría de forma similar a como lo hace un solenoide.

Otra forma de estudiar el problema es definir en el interior del material una densidad de dipolos magnéticos mediante un nuevo campo vectorial

denominado vector magnetización \vec{M} , como la densidad de momento magnético por unidad de volumen, es decir

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$$

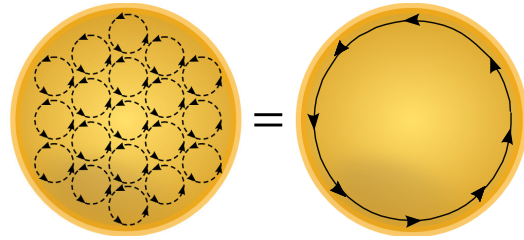


Figura 7.16: Las corrientes en el interior de un material uniformemente imanado se cancelan quedando sólo una corriente neta de naturaleza superficial.

Parece evidente que ambas magnitudes, la densidad de corriente equivalente y la magnetización deben estar relacionadas.

No entraremos aquí a estudiar esta relación sino que seguiremos un camino similar al que utilizamos en medios dieléctricos definiendo un nuevo vector denominado intensidad de campo.

7.5.2 Intensidad de campo magnético \vec{H}

Supongamos que disponemos de una región en la que existe un campo magnético \vec{B}_0 producido por algún conductor por el que circula corriente.

Si llenamos esa región con un material, el campo magnético total \vec{B} en la región sería

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

donde \vec{B}_m es el campo producido por el material.

Parece claro que el valor de \vec{B}_m debe estar relacionado con el vector magnetización \vec{M} de manera lineal. Es posible demostrar que

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$$

Resulta conveniente introducir un nuevo vector denominado **intensidad de campo magnético** \vec{H} de manera que

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

En el caso de estar en el vacío, el vector magnetización sería nulo con lo que

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

De la ecuación que define \vec{H} de forma general podemos hallar \vec{B}

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Tanto \vec{H} como \vec{M} tienen dimensiones de Am.

Para poder comprender mejor las implicaciones de las expresiones anteriores consideremos el caso particular de un toroide que conduce una corriente I así como el espacio encerrado por el toroide. Si este espacio estuviera vacío

$$\begin{aligned}\vec{M} &= 0 \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}\end{aligned}$$

Tal y como vimos, en el caso del toroide vacío

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I \hat{z}$$

por lo que

$$\mu_0 n I = \mu_0 H$$

es decir

$$H = n I$$

Si ahora llenamos el interior del toroide con una sustancia magnética, H dentro de la sustancia no cambia y sigue valiendo nI , por lo que el vector intensidad de campo magnético sólo depende de las corrientes verdaderas, es decir de las corrientes en el devanado del toroide.

Sin embargo el campo magnético $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$ depende tanto de las corrientes verdaderas \vec{B}_0 como de las de magnetización \vec{B}_m es decir, de todos los tipos de corriente.

Vemos como el papel de \vec{H} es similar al que en Electrostatica juega el vector desplazamiento \vec{D} mientras que el jugado por el campo magnético \vec{B} es similar al del campo eléctrico \vec{E} .

7.5.3 Clasificación de las sustancias magnéticas

En la mayor parte de las sustancias, por ejemplo en las diamagnéticas y en las paramagnéticas, el vector

magnetización \vec{M} es proporcional a la intensidad de campo \vec{H} . En este caso se puede escribir

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

donde χ es un factor llamado **susceptibilidad magnética** que no tiene dimensiones.

Para muestras paramagnéticas χ es positivo y \vec{M} y \vec{H} tienen la misma dirección, mientras que para muestras diamagnéticas χ es negativo y \vec{M} y \vec{H} tienen direcciones opuestas. La relación entre \vec{M} y \vec{H} en las sustancias ferromagnéticas es mucho más complicada que la descrita.

Si sustituimos la relación anterior en la expresión de la inducción magnética obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}\end{aligned}$$

o bien

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

donde la constante μ recibe el nombre de **permeabilidad magnética** del material

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi)$$

Podemos hacer una clasificación del comportamiento de la materia en presencia de campos magnéticos en función del valor de la permeabilidad magnética de la siguiente forma:

Diamagnéticas	$\mu < \mu_0$
Paramagnéticas	$\mu > \mu_0$
Ferromagnéticas	$\mu \gg \mu_0$

En las sustancias diamagnéticas, que son las más usadas en ingeniería de comunicaciones, se cumple que μ es casi idéntico a μ_0 por lo que habitualmente se hace $\mu = \mu_0$.

Ejemplo 13 *El devanado de un toroide tiene 60 vueltas/m de hilo de cobre que transporta una corriente de 5 A. El núcleo es de hierro con una permeabilidad magnética de $5000\mu_0$ en las condiciones que se indican. Hallar \vec{H} , \vec{B} y \vec{M} tanto si el núcleo fuera el vacío como si fuera hierro.*

Solución:

En el vacío:

$$H_0 = nI = 60 \text{ vueltas/m} \times 5 \text{ A} = 300 \text{ vueltas} \times \text{A/m}$$

$$B_0 = \mu_0 H = 4\pi \times 10^{-7} \times 300 = 3 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$M = 0$$

y en el hierro:

$$H = 300 \text{ vueltas} \times \text{A/m}$$

$$B = \mu_m H = 5000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 300 = 1.88 \text{ T}$$

$$M = 1.5 \times 10^6 \text{ A/m}$$

siendo B 5000 veces mayor que B_0 .

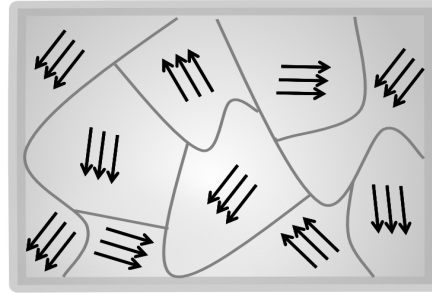


Figura 7.17: Dominios magnéticos en un medio ferromagnético. Cuando el material está desmagnetizado los dominios se orientan al azar y el momento magnético total es nulo.

7.5.4 Ferromagnetismo

Los materiales ferromagnéticos son sustancias de naturaleza cristalina (su estructura atómica interna está ordenada) que presentan dipolos magnéticos permanentes y muestran efectos magnéticos intensos, como por ejemplo el hierro, cobalto, níquel, etc. Los momentos magnéticos permanentes de estas sustancias tienden a alinearse paralelos entre sí, incluso en presencia de campos magnéticos muy débiles. Una vez alineados, la sustancia permanece magnetizada incluso en ausencia de campo magnético externo, es decir, presenta magnetización permanente (son imanes). Esto se debe al fuerte acoplamiento entre momentos magnéticos próximos.

En los materiales ferromagnéticos hay unas regiones microscópicas denominadas **dominios**, dentro de las cuales todos los momentos magnéticos están alineados. El tamaño de estos dominios está comprendido entre $10^{-8}m$ y $10^{-12}m$. Las fronteras entre los dominios se llaman **paredes de los dominios**.

Cuando la muestra está desmagnetizada los dominios se orientan al azar de manera que el momento magnético total es nulo como se muestra en la figura 7.17.

Cuando la muestra se somete a un campo magnético externo, los momentos de algunos dominios tienden a alinearse con el campo lo que da lugar a una magnetización total neta distinta de cero. Las observaciones experimentales muestran que los dominios orientados en la dirección del campo aplicado crecen a expensas de los no orientados.

Al eliminar el campo externo puede permanecer una magnetización debido a que el predominio de dominios orientados permanece. La agitación térmica a temperaturas normales no es suficiente para romper esta orientación privilegiada.

Pensemos en un sistema experimental capaz de medir la respuesta característica de un material ferromagnético. Supongamos una muestra de un material de este tipo con forma de toroide. Sobre esta muestra se realiza un arrollamiento de N vueltas que se conecta a un generador. Para medir el flujo magnético en este toroide se usa una segunda bobina que también utiliza el toroide como núcleo pero cuyos terminales están unidos a un galvanómetro.

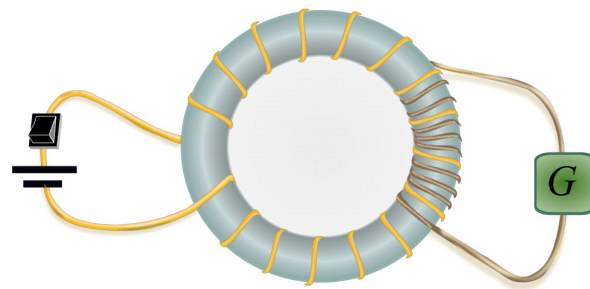


Figura 7.18: Sistema experimental para la medir la respuesta magnética de un material ferromagnético. Sobre el material, con forma de toroide, se realizan dos arrollamientos. En el primero se conecta un generador y en el segundo un galvanómetro.

Se aumenta el flujo magnético aumentando la in-

tensidad de la primera bobina desde 0 hasta I . En la segunda bobina se detecta esta variación del flujo (se induce una corriente en la segunda bobina tal y como veremos en el siguiente tema). El dispositivo completo se muestra en la figura 7.18.

Supongamos ahora que, inicialmente la muestra está desmagnetizada. Al aumentar la corriente desde 0 hasta I el campo H aumenta desde 0 hasta nI . Esto hace que B aumente. La curva que describe la variación de B con H se muestra en la figura 7.19 y corresponde a la zona Oa

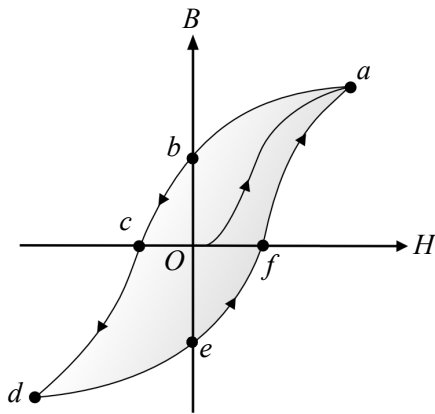


Figura 7.19: Ciclo de histéresis de un material magnético.

A medida que el campo aumenta también aumenta el número de dipolos alineados que se hace máximo al llegar al punto a . En este punto el núcleo de hierro estará próximo a la saturación, es decir, con la totalidad de sus dominios orientado en la misma dirección del campo.

Si ahora la corriente se reduce a cero eliminando el campo externo, la **curva de magnetización** o curva B-H sigue el camino ab . Vemos que en b la inducción magnética \vec{B} no es cero aunque si lo es el campo externo \vec{H} , lo que se explica por el hecho de que, ahora, el núcleo de hierro del toroide está magnetizado debido a la magnetización remanente producida por el alineamiento de un gran número de dipolos.

Si a partir de b invertimos el campo externo y aumentamos su intensidad los dominios se reorientan en la nueva dirección del campo hasta que la muestra está de nuevo desmagnetizada cuando se llega

al punto c donde $\vec{B} = 0$. Un aumento adicional de la corriente provoca que el hierro se magnetice en la dirección opuesta acercándose a la saturación al llegar al punto d .

Si ahora invertimos todo el proceso reduciendo primero la corriente a cero, y luego la aumentamos pero en la dirección positiva se sigue la trayectoria $defa$. Vemos que de esta manera se ha descrito un ciclo conocido como **ciclo de histéresis** que es característico y distinto para cada material ferromagnético.

Así por ejemplo, el ciclo de histéresis mostrado en la figura 7.20.a es característico de las sustancias ferromagnéticas denominadas duras: es ancho lo que indica una magnetización remanente grande. Los materiales "blandos" como el hierro muestran ciclos estrechos y se magnetizan y desmagnetizan con facilidad, figura 7.20.b. Así el área encerrada en el lazo representa el trabajo necesario para llevar el material por el ciclo de histéresis. Por ello los materiales de determinados dispositivos como los transformadores deben hacerse con materiales blandos para que las pérdidas de energía sean mínimas

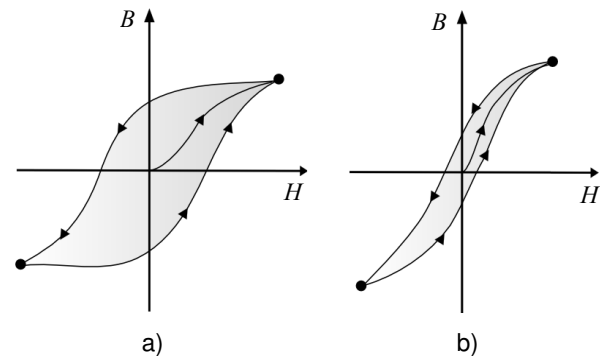


Figura 7.20: Ciclos de histéresis: a) Material magnéticamente duro, el campo remanente es grande. b) Material magnéticamente blando, el campo remanente es pequeño.